La funzione potenza di esponente reale

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Definizione 1 *Assegnato* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dicesi* ***funzione potenza di esponente reale***, *la funzione reale:*

$$f(x) = x^{\lambda} \tag{1}$$

Per determinare l'insieme di definizione della (1) consideriamo:

1. $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
2. $\lambda \in \mathbb{Q}$

dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali. Prima di discutere i suddetti casi, assumiamo $\lambda > 0$. Nel caso 1, λ è irrazionale per cui la potenza x^{λ} ha significato solo per $x \geq 0$. Quindi nel caso 1 l'insieme di definizione è $X = [0, +\infty)$.

Nel caso 2:

$$\lambda \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists (n, m) \in \mathbb{N}^2 - \{(0, m)\} \mid \lambda = \frac{m}{n},$$

con m, n primi tra loro. Pertanto:

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\Longrightarrow X = [0, +\infty) \\ n \text{ dispari} &\Longrightarrow X = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$:

$$f(x) = x^{-|\lambda|} = \frac{1}{x^{|\lambda|}}, \tag{2}$$

Tale relazione ci dice che per ciò che riguarda la ricerca dell'insieme di definizione, il caso $\lambda < 0$ si riduce a quello con $\lambda > 0$ escludendo il punto $x = 0$. Quindi:

$$0 > \lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Longrightarrow X = (0, +\infty)$$

Per λ razionale e negativo:

$$f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}},$$

onde:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\Longrightarrow X = (0, +\infty) \\ n \text{ dispari} &\Longrightarrow X = \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Per $\lambda = 0$, la funzione si riduce alla funzione costante, giacchè:

$$f(x) = x^0 = 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Passiamo ora allo studio della funzione. Escludendo il valore $\lambda = 0$, i casi interessanti sono:

A. $\lambda > 0$

B. $\lambda < 0$

0.0.1 Caso A: funzione potenza di esponente reale positivo

Per quanto precede, l'insieme di definizione è $[0,+\infty)$ se λ è irrazionale o razionale $\lambda=\frac{m}{n}$ con n pari; è $(-\infty,+\infty)$ se $\lambda=\frac{m}{n}$ con n dispari. In altri termini, comunque prendiamo $\lambda>0$, l'intervallo $X'=[0,+\infty)$ è un sottoinsieme dell'insieme di definizione X. Risulta, allora, conveniente studiare la funzione in X' (ovvero la restrizione $f_{X'}$ di f a X'). Per λ irrazionale o razionale $(\lambda=\frac{m}{n})$ con n pari, lo studio risulta completo. Viceversa, per λ razionale con n dispari, occorre completare lo studio nell'intervallo $(-\infty,0)$.

Ciò premesso, abbiamo:

$$\begin{aligned} & f(x)=x^\lambda>0, \quad \forall x\in(0,+\infty) \\ & f(0)=0, \end{aligned}$$

cosicchè $\min f=0$ e $x=0$ è un punto di minimo. Per stabilire l'invertibilità locale della funzione dobbiamo studiare l'equazione algebrica:

$$y=x^\lambda \tag{3}$$

nell'intervallo X'. Per quanto visto è $x^\lambda\geq 0,\ \forall x\in X'$, onde assegnato $y\geq 0$, la (3) ammette l'unica soluzione:

$$x=y^{\frac{1}{\lambda}} \tag{4}$$

Viceversa, per $y<0$, la (3) è priva di soluzioni. Ne consegue che il codominio di $f_{X'}$ è $[0,+\infty)$ e quindi l'inversa locale

$$f_{X'}^{-1}(y)=y^{\frac{1}{\lambda}} \tag{5}$$

è definita in $[0,+\infty)$.

Conclusione 2 *L'inversa locale della funzione potenza di esponente $\lambda>0$ è la funzione potenza di esponente $\frac{1}{\lambda}$.*

Riguardo alla monotonia, la funzione potenza è strettamente crescente in $[0,+\infty)$. Ciò può essere visto se $\lambda\in\mathbb{N}-\{0\}$, ad esempio $\lambda=n$. In tal caso

$$f(x)=x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n},$$

cioè f è il risultato del prodotto di n fattori ciascuno dei quali è la funzione identica (che è strettamente crescente). Per $\lambda\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ l'implicazione

$$x'>x''\Longrightarrow f(x')>f(x''), \quad x',x''\in[0,+\infty)$$

è meno immediata, per cui ne omettiamo la dimostrazione.

Conclusione 3 *Per $\lambda>0$ la funzione $f(x)=x^\lambda$ è strettamente crescente in $[0,+\infty)$.*

Nel caso particolare $\lambda=1$ è $f(x)=x$, cioè la funzione potenza di esponente reale si riduce alla funzione identica. Inoltre, $f(1)=1$, $\forall\lambda$. Più specificatamente, per $\lambda\neq 1$ il punto $(1,1)$ è il punto di intersezione della curva $y=x^\lambda$ con la retta $y=x$:

$$\left\{\begin{array}{l} y=x^\lambda \\ y=x \end{array}\right. \Longleftrightarrow x^\lambda=x$$

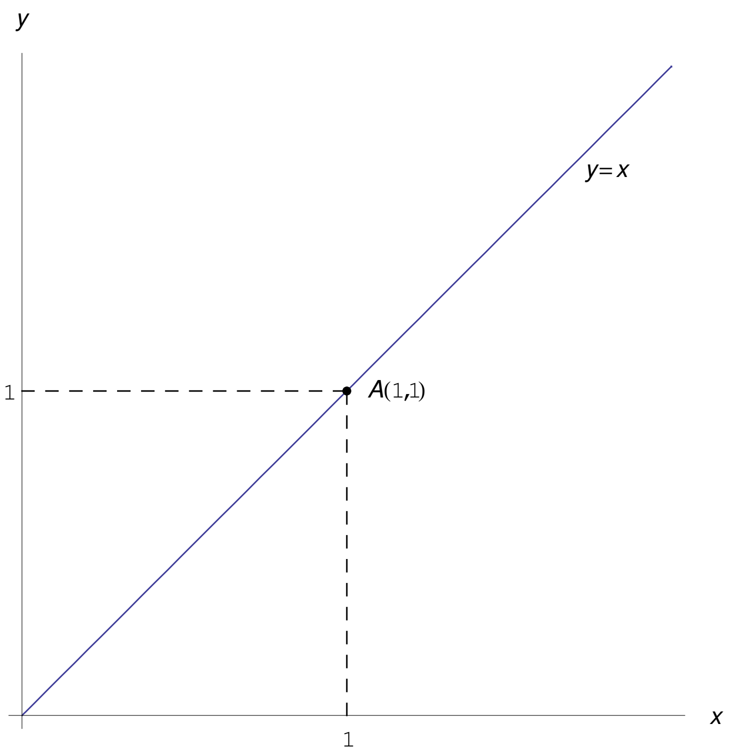

Figura 1: Per $\lambda \neq 1$ i luoghi geometrici $y = x^\lambda$ e $y = x$ si intersecano nell'origine delle coordinate e nel punto $A(1,1)$.

Le soluzioni di

$$x^\lambda = x \tag{6}$$

sono[1] $x = 0$ e $x = 1$, per cui i luoghi geometrici si intersecano nei punti $(0,0)$ e $(1,1)$, come illustrato in fig. 1.

Nel caso $\lambda = 1$ i suddetti luoghi sono coincidenti i.e. coincidono con $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante).

Il caso $\lambda \neq 1$ si scinde nei sottocasi:

I. $\lambda > 1$

II. $0 < \lambda < 1$ (si ricordi che stiamo considerando il caso $\lambda > 0$)

Caso I Per quanto visto, i luoghi geometrici $y = x^\lambda$ e $y = x$ hanno in comune (per $x \geq 0$) i punti $O(0,0)$ e $A(1,1)$. Inoltre, in $[0,+\infty)$ la funzione è non negativa, per cui il grafico di $f_{X'}$ attraversa la seguente regione del piano cartesiano:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty,\ 0 \leq y < +\infty\right\} \\ &= [0,+\infty) \times [0,+\infty)\end{aligned}$$

[1]Infatti, per $x = 0$ la (6) si riduce all'identità $0 = 0$. Per $x \neq 0$ possiamo dividere primo e secondo membro per x ottenendo:

$$\frac{x^\lambda}{x} = 1 \Longleftrightarrow x^{\lambda-1} = 1,$$

da cui $x = 1$.

Risulta $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$. dove:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < +\infty,\ x < y < +\infty\right\} \\
\mathcal{R}_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < +\infty,\ 0 \le y < x\right\} \\
\mathcal{R}_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < +\infty,\ y = x\right\}
\end{aligned}$$

Cioè $\mathcal{R}_1$ è la regione situata al disopra della semibisettrice del primo e terzo quadrante; $\mathcal{R}_2$ è la regione situata al disopra dell'asse x e al disotto della suddetta semibisettrice (escludendo quest'ultima). Infine, $\mathcal{R}_3$ è la semibisettrice medesima. Determiniamo i punti $x > 0$ per i quali il luogo geometrico $y = x^\lambda$, ovvero il grafico della restrizione di $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $[0, +\infty)$, è contenuto in $\mathcal{R}_1$. Denotando il suddetto grafico con $\Gamma_{f_{X'}}$:

$$\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_1 \Longleftrightarrow x^\lambda > x \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} g(x) > 1,$$

dove $g(x) \overset{def}{=} x^\alpha$ con $\alpha = \lambda - 1 > 0$. La funzione $g(x)$ è la funzione potenza di esponente $\alpha > 0$ e come tale, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. Inoltre è $g(1) = 1$, onde:

$$g(x) > 1, \ \ \forall x > 1$$

Vale a dire:

$$x^\lambda > x, \ \ \forall x > 1$$

Ne consegue che per $x > 1$ il grafico $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto nella regione $\mathcal{R}_1$. Determiniamo ora i punti $x > 0$ per i quali è $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2$. Deve essere:

$$\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow x^\lambda < x \Longleftrightarrow g(x) < 1,$$

È $g(1) = 1$ e siccome $g(x)$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ si ha $g(x) < 1, \ \forall x \in [0, 1)$. per cui:

$$x^\lambda < x, \ \ \forall x \in [0, 1)$$

Ciò implica che $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_2$ per $x \in [0, 1)$. In fig. 2 riportiamo il grafico $\Gamma_{f_{X'}}$.

Caso II Basta ripetere il procedimento precedente. Ricerchiamo, dunque, i punti $x > 0$ per i quali è $\Gamma_{f_{X'}} \subset \mathcal{R}_1$. Deve essere:

$$x^\lambda > x \underset{x^\lambda>0}{\Longleftrightarrow} 1 > x^{\lambda-1} \Longleftrightarrow h(x) < 1,$$

dove $h(x) \overset{def}{=} x^\beta$ con $\beta = 1 - \lambda > 0$. Ma $h(x)$, essendo una funzione potenza di esponente reale positivo, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e si ha $h(1) = 1$, onde:

$$h(x) < 1, \ \ \forall x \in [0, 1)$$

Cioè:

$$x^\lambda > x, \ \ \forall x \in [0, 1)$$

Ne consegue che $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto in $\mathcal{R}_1$ per $x < 1$. In maniera simile si mostra che $\Gamma_{f_{X'}}$ è contenuto in $\mathcal{R}_2$ per $x > 1$. In sintesi, abbiamo l'andamento riportato in fig. 3.

***

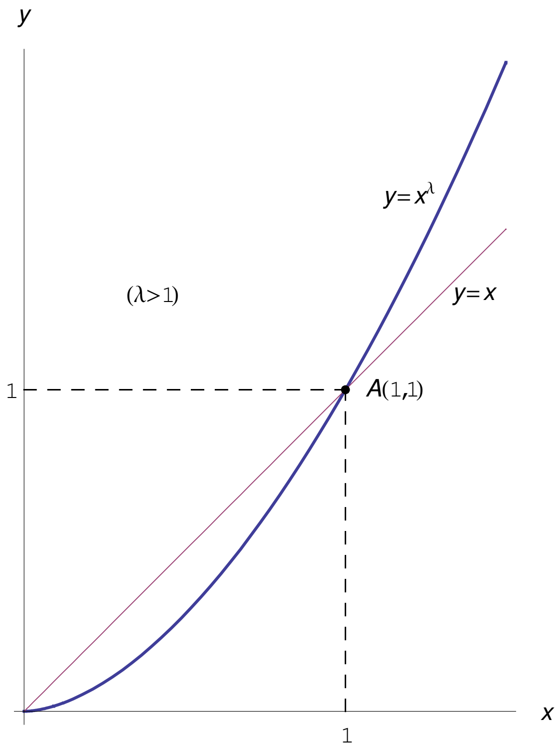

Figura 2: Andamento del grafico della restrizione della funzione $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $X' = [0, +\infty)$ nel caso $\lambda > 1$ (curva in grassetto).

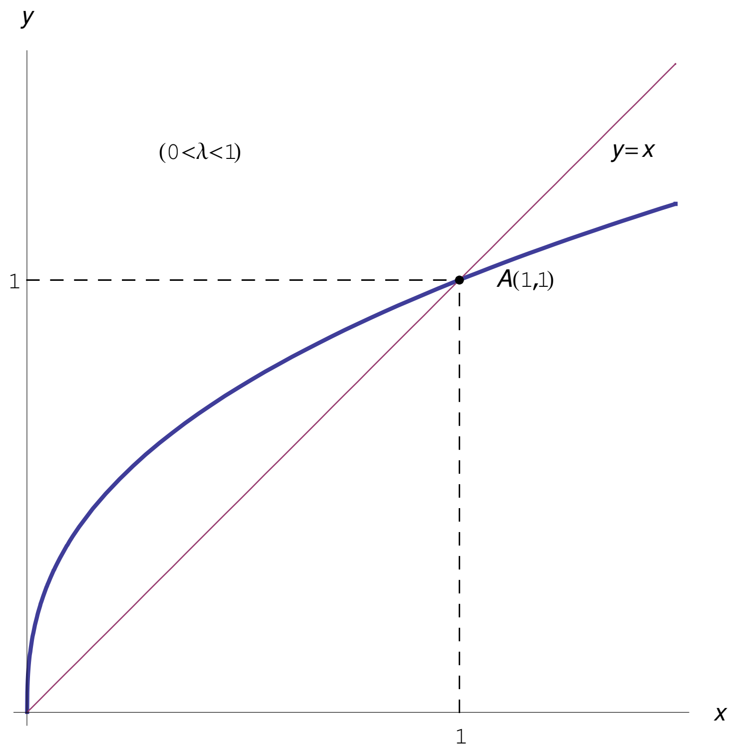

Figura 3: Andamento del grafico della restrizione della funzione $f(x) = x^\lambda$ all'intervallo $X' = [0, +\infty)$ nel caso $0 < \lambda < 1$ (curva in grassetto).

Se $\lambda \in \mathbb{Q}$ ($\Longrightarrow \lambda = \frac{m}{n}$) con n dispari, la funzione potenza è definita in $\mathbb{R}$, per cui dobbiamo estendere lo studio di funzione all'intervallo $(-\infty, 0)$. A tale scopo studiamo la parità della funzione. Evidentemente, se $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$:

$$f(-x) = (-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^{\frac{m}{n}} f(x) = \begin{cases} +f(x), & \text{se } m \text{ è pari} \\ -f(x) & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

Cioè $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è pari per m pari, è dispari per m dispari. Ciò implica che il grafico Γ_f è simmetrico rispetto all'asse y per m pari. È, invece, simmetrico rispetto all'origine per m dispari. Esiste un'ulteriore classificazione indotta dai casi $m > n$ e $m < n$ rispettivamente. Nel primo caso ($m > n$) l'esponente è > 1, per cui in $[0, +\infty)$ abbiamo un andamento del tipo di quello riportato in fig. 2. Conseguentemente, per m pari con $m > n$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 4.

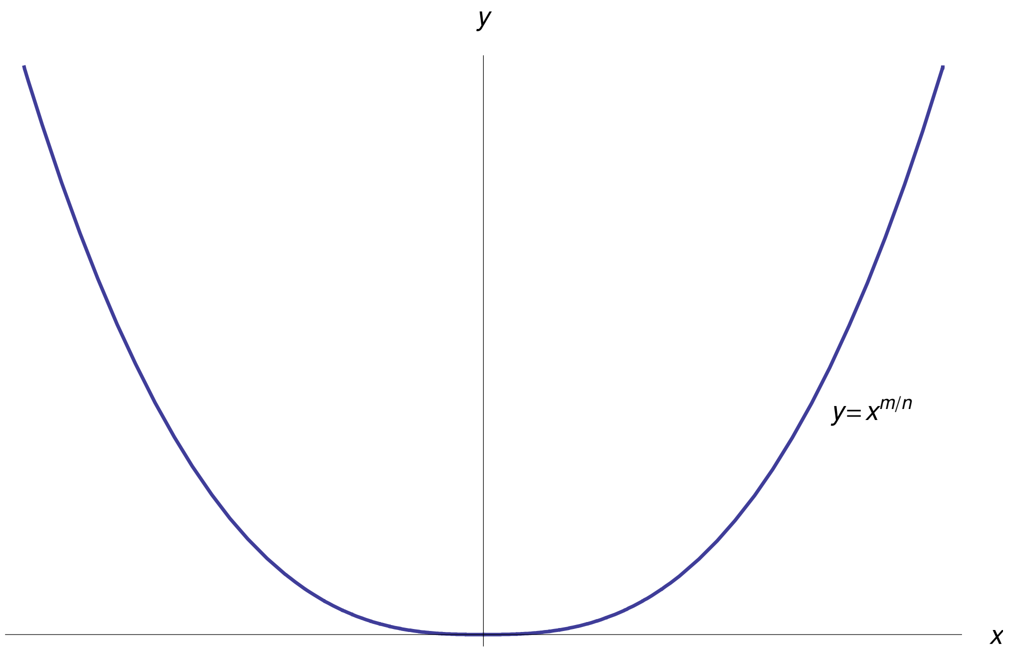

Figura 4: Andamento del grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con n dispari, m pari e $m > n$.

Per m pari con $m < n$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 5.

Nelle figg. 6-7 riportiamo il caso m, n dispari con $m > n$ e $m < n$ rispettivamente.

Nel caso particolare $n = 1$ abbiamo la funzione potenza di esponente intero positivo $f(x) = x^m$.

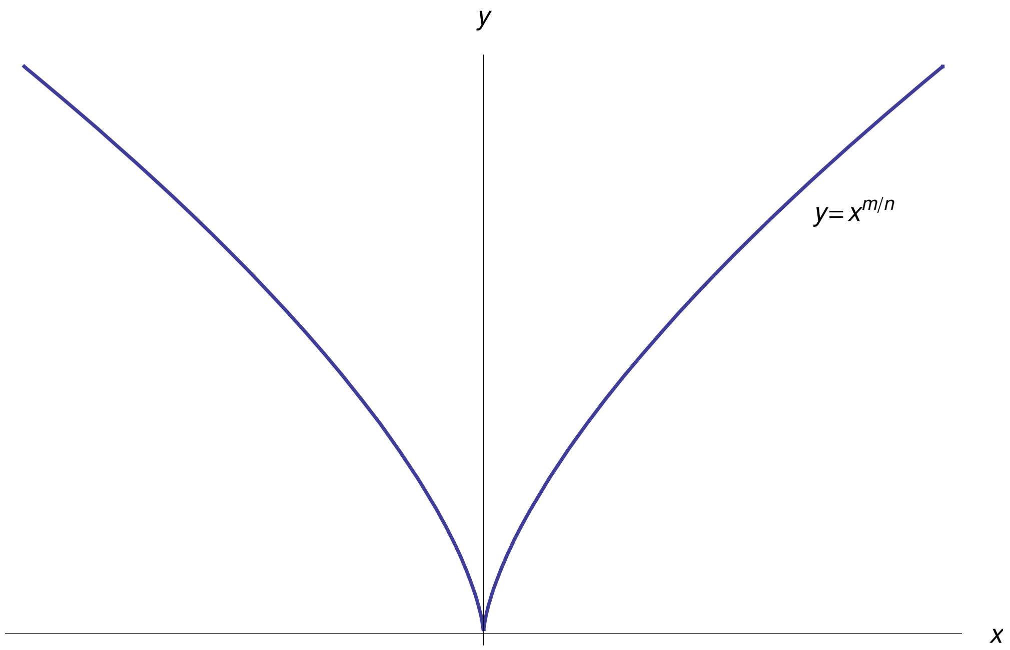

Figura 5: Andamento del grafico della della funzione $f\left(x\right)=x^{\frac{m}{n}}$ con n dispari, m pari e $m<n$.

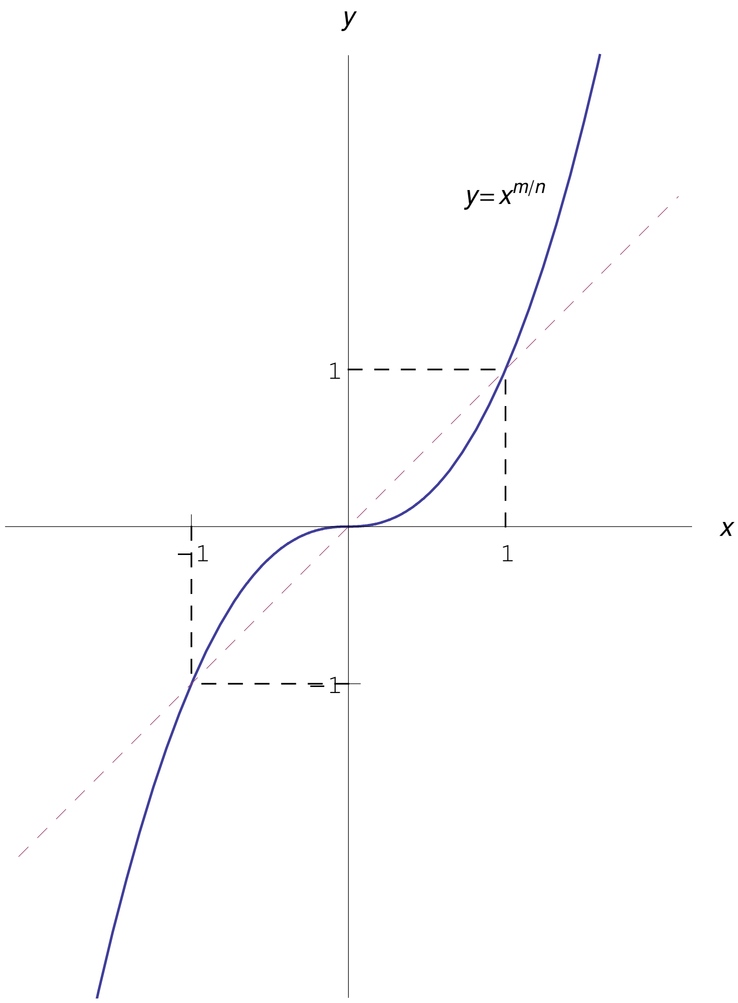

Figura 6: Andamento del grafico della funzione $f\left(x\right)=x^{\frac{m}{n}}$ con m,n dispari e $m>n$.

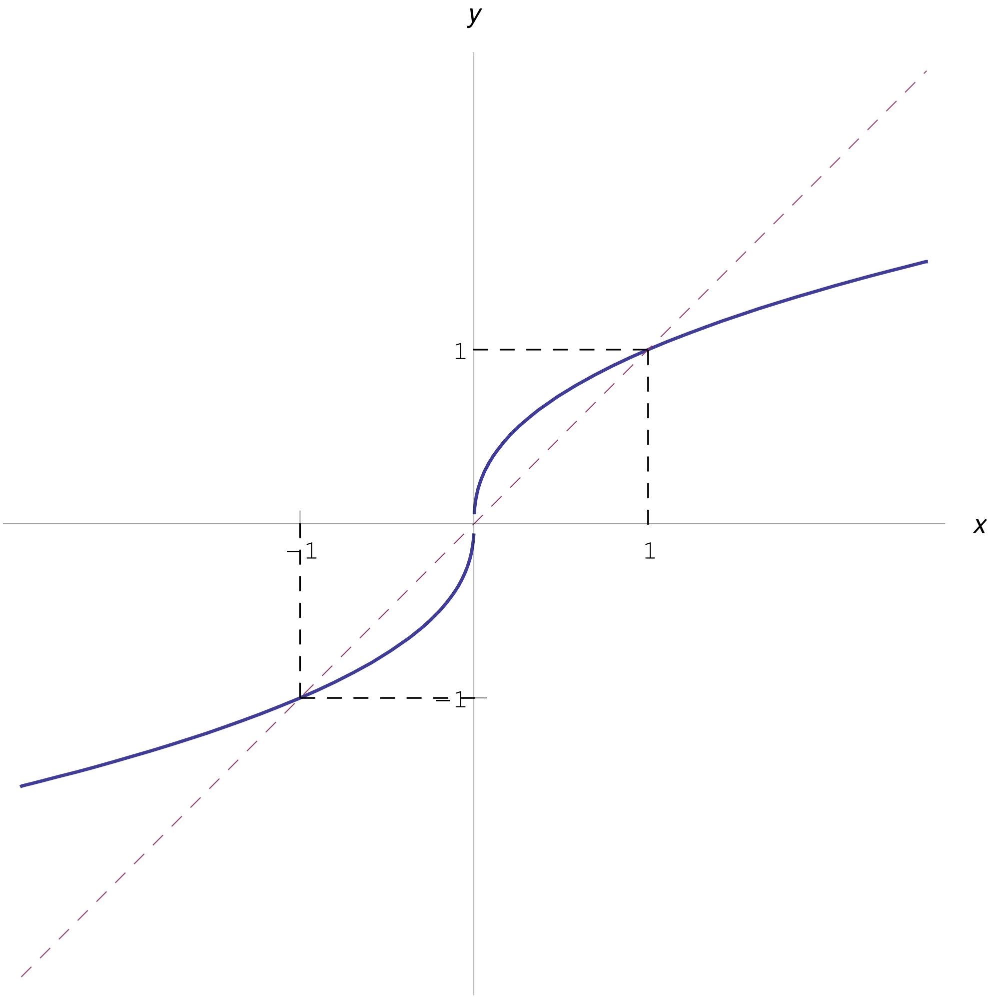

Figura 7: Andamento del grafico della funzione $f\left(x\right) = x^{\frac{m}{n}}$ con m, n dispari e $m < n$.

Definizione 4 *Dicesi* ***parabola di ordine*** m *il grafico della funzione potenza di esponente intero positivo, cioè il luogo geometrico di equazione:*

$$y = x^m \tag{7}$$

I casi geometricamente significativi sono quelli con $m \geq 2$, poichè per $m = 0$ la parabola degenera nella retta $y = 1$ (per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$) e per $m = 0$ degenera nella bisettrice $y = x$.

Essendo n dispari e $m > n$, gli unici andamenti possibili sono tutti e soli quelli riportati nelle figg. 8-9.

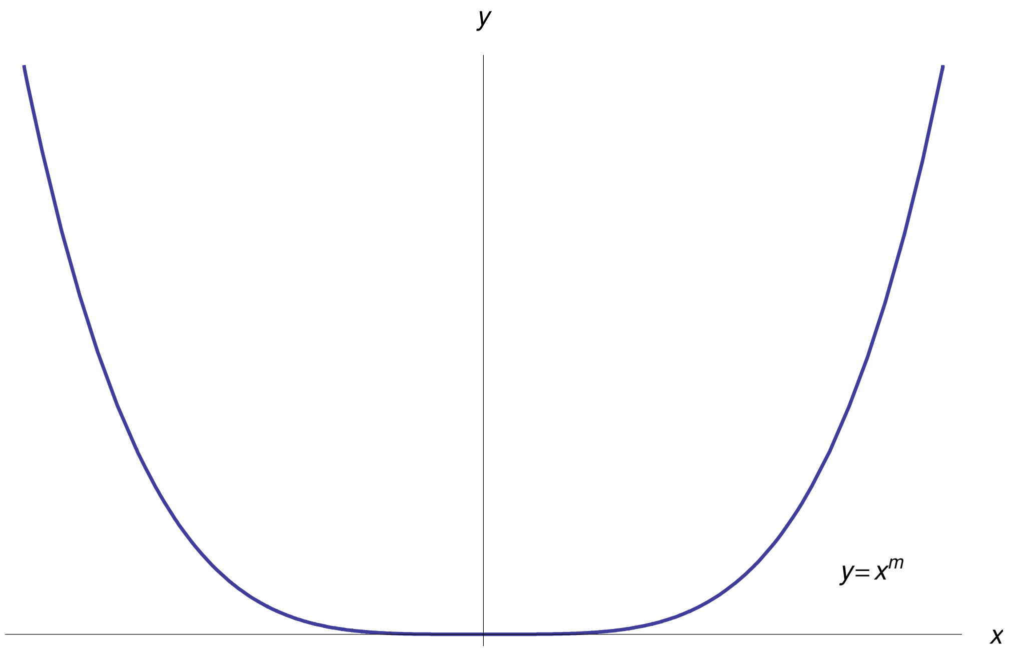

Figura 8: Parabola di ordine m (pari).

Per $m = 2$ abbiamo la comune parabola, mentre per $m = 3$ la **parabola cubica**.

Osservazione 5 *La denominazione "parabola" è utilizzata anche per* $n = 3$*. Più precisamente, se* $m = 2$ *il luogo geometrico* $y = x^{2/3}$ *è la* ***parabola di Neile****, riportata in fig. 10.*

0.0.2 Caso B: funzione potenza di esponente reale negativo

Riscriviamo la (2):

$$f(x) = \frac{1}{x^{|\lambda|}} \tag{8}$$

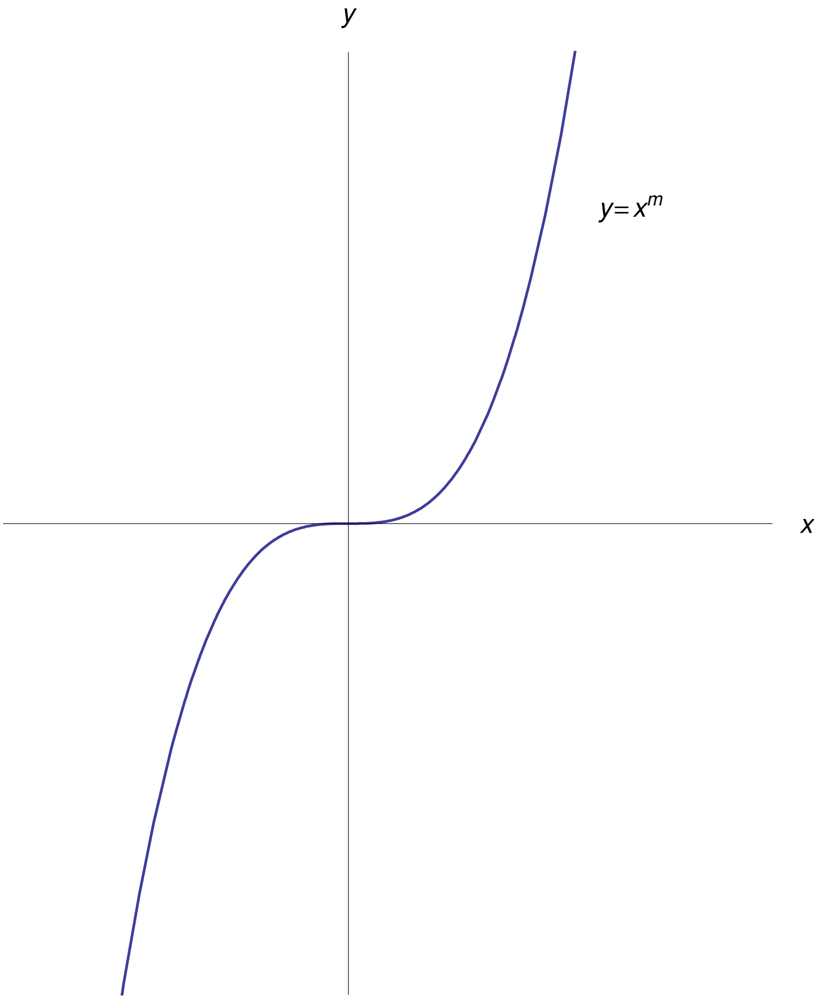

Figura 9: Parabola di ordine m (dispari).

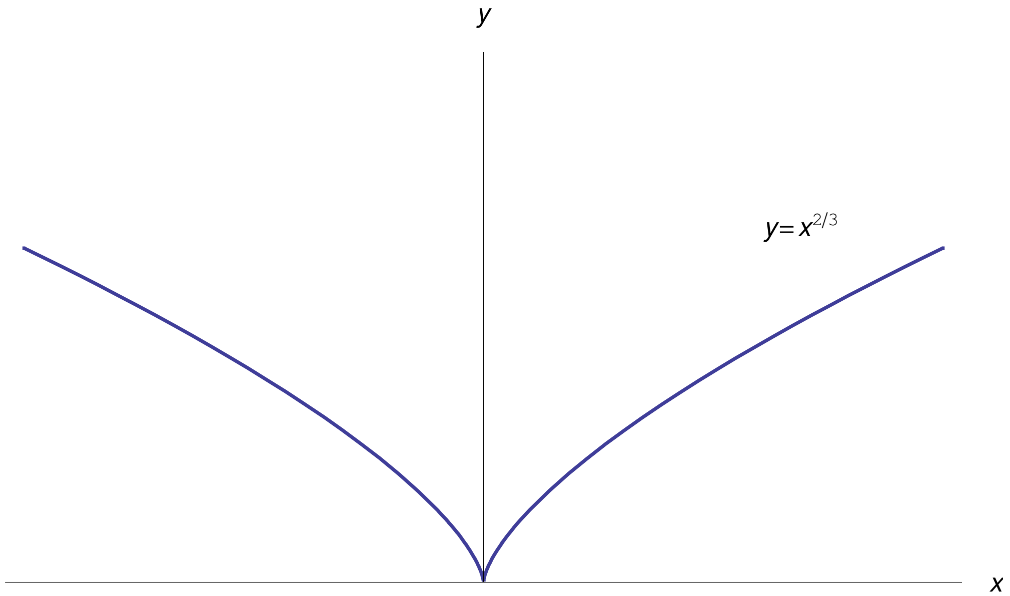

Figura 10: Parabola di Neile.

Per quanto precede, l'insieme di definizione di f è $(0,+\infty)$ se λ è irrazionale o razionale $(\lambda = -\frac{m}{n})$ con n pari; è $\mathbb{R} - \{0\}$ se $\lambda = -\frac{m}{n}$ con n dispari. Dalla (8) vediamo che la funzione potenza di esponente reale negativo è la reciproca della funzione potenza di esponente reale positivo x^{α}, dove $\alpha = |\lambda|$.

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ abbiamo l'andamento riportato in fig. 11.

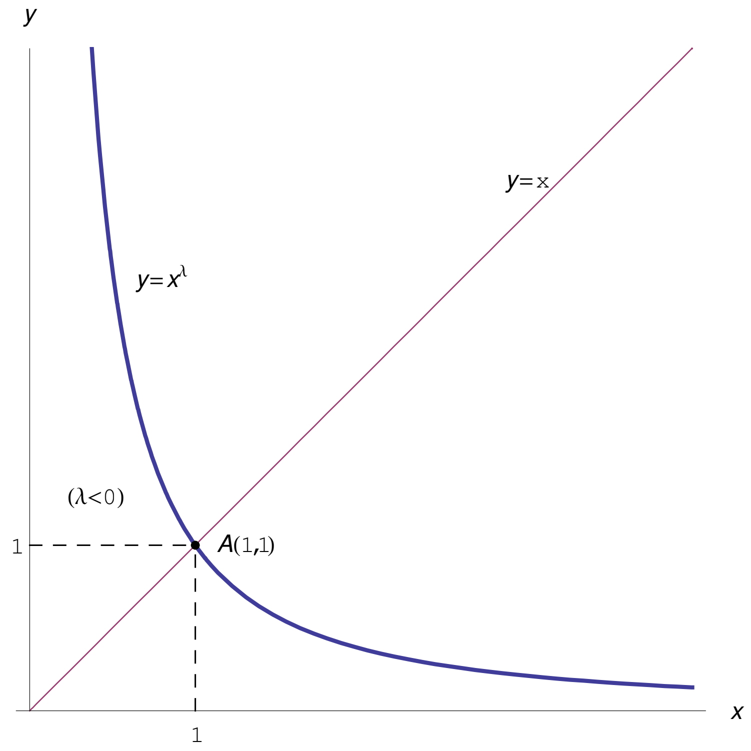

Figura 11: Grafico della funzione di esponente irrazionale negativo.

Per $\lambda \in \mathbb{Q}$, cioè $\lambda = -\frac{m}{n}$ con n dispari, dobbiamo distinguere i due casi: m pari, m dispari. Nel primo caso la funzione è pari e il suo grafico è riportato in fig. 12.

Nel secondo caso, cioè m dispari, abbiamo l'andamento riportato in fig. 13.

Nel caso particolare $n = 1$ abbiamo la funzione potenza di esponente intero negativo $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

Definizione 6 *Dicesi iperbole equilatera il grafico della funzione potenza di esponente* -1, *cioè il luogo geometrico di equazione:*

$$y = \frac{1}{x}$$

riportato in fig. 14.

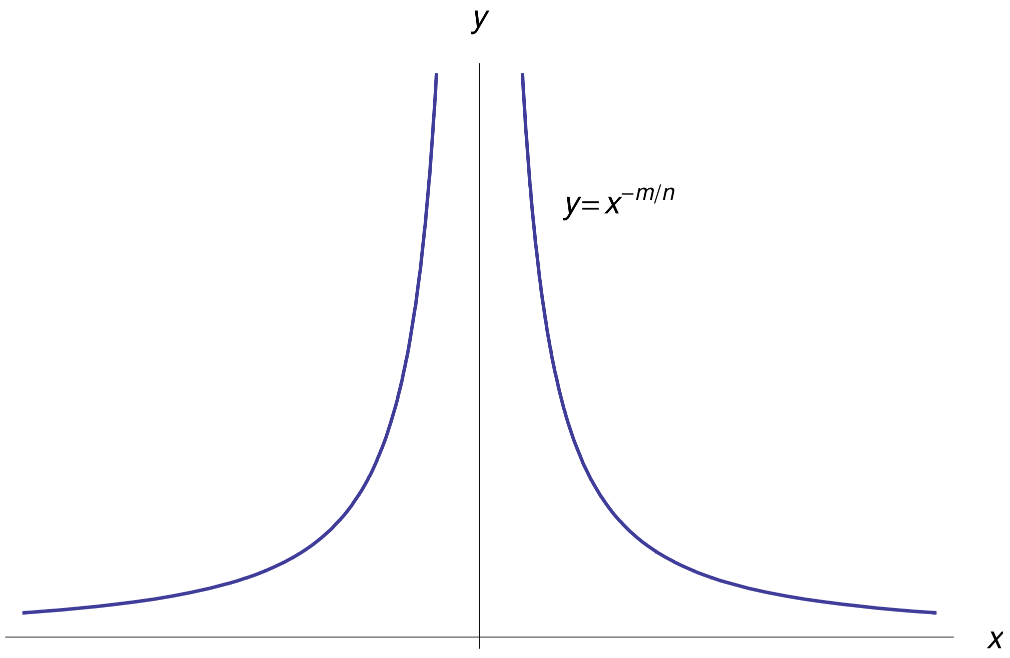

Figura 12: Grafico della funzione $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ con n dispari e m pari.

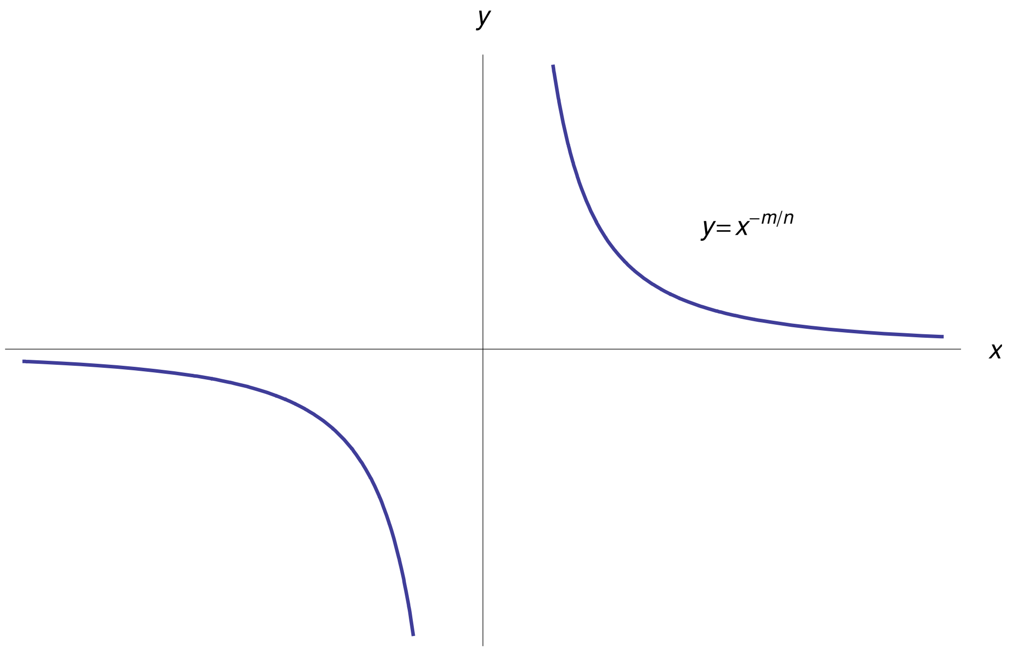

Figura 13: Grafico della funzione $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ con n dispari e m dispari.

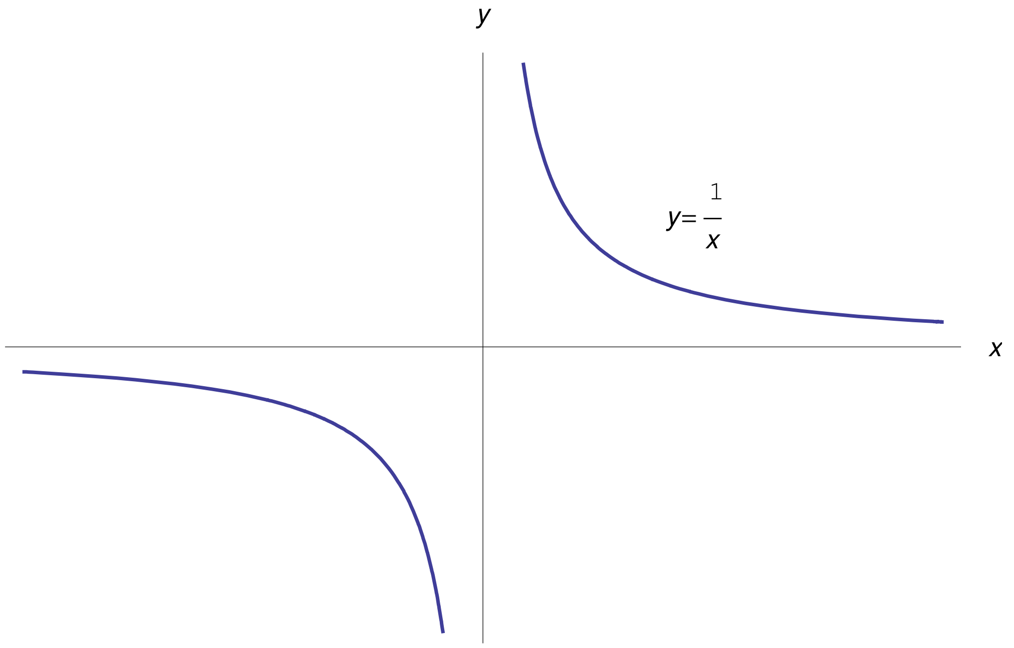

Figura 14: Iperbole equilatera