Esempio di funzione non analitca

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Studiare la funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \tag{1}$$

Insieme di definizione

f è definita in

$$X = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

La funzione è periodica di periodo π, per cui limitiamoci a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

Intersezione con gli assi

$f(x) > 0 \ \forall x$ per cui non esistono intersezioni con l'asse x. In $x = 0$ non è definita, onde non ci poniamo il problema dell'intersezione con l'asse y.

Simmetrie

La funzione è pari

$$f(-x) \equiv f(x)$$

Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Derivata prima

$$f'(x) = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x} f(x) \tag{3}$$

Non è definita in $x = 0$. Applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{\arcsin \frac{1}{t}}}{e^{t^2}} = 0 \quad \text{(per confronto tra infiniti)}$$

Quindi

$$f'(0) = 0$$

Dalla (3)

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2 \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \cos x}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^3 x}}_{=\lambda}$$

Per calcolare λ poniamo $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lambda = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

Allo stesso modo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, per cui

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

Conclusione: la derivata $f'(x)$ è continua in $x = 0$. Studiamo il segno

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\cos x}{\sin^3 x} > 0 \underset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Longleftrightarrow} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ne segue che f è strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo proprio. Inoltre $f'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, cioè il grafico di f parte dai punti $\left(\pm\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}\right)$ con tangente orizzontale.

Derivata seconda

$$f''(x) = -2f(x)\frac{\sin x \sin^3 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^6 x} + 2\frac{\cos x}{\sin^3 x} f'(x)$$

Facendo i dovuti passaggi e semplificazioni:

$$f''(x) = 2e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\frac{2 + 2\sin^4 x - 5\sin^2 x}{\sin^6 x}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 0 \cdot \infty$$

Per rimuovere l'indeterminazione, poniamo $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 2\lim_{t\to\infty}\frac{t^2\left(2t^4 - 5t^2 + 2\right)}{e^t} = 0$$

Quindi

$$f''(x) = 0$$

Derivata di ordine n

Calcolando le derivate di ordine successivo, si perviene

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cosicché la funzione assegnata pur essendo di classe C^∞ non è analitica.

Punti di flesso

Dobbiamo trovare le radici dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

Cioè

$$2 + 2\sin^4 x - 5\sin^2 x = 0$$

Ponendo $t = \sin^2 x$ e risolvendo

$$x_1 = -\frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{4}$$

che sono punti di flesso a tangente obliqua

$$F_1\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{e^2}\right),\quad F_2\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico

È in fig. 1.

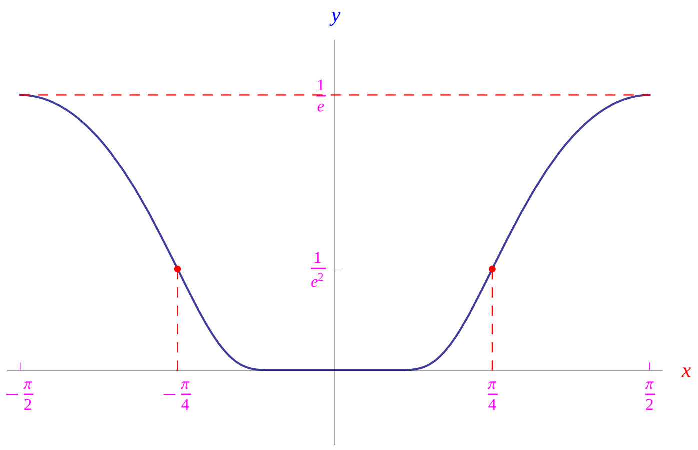

Figura 1: Grafico di $f(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$.