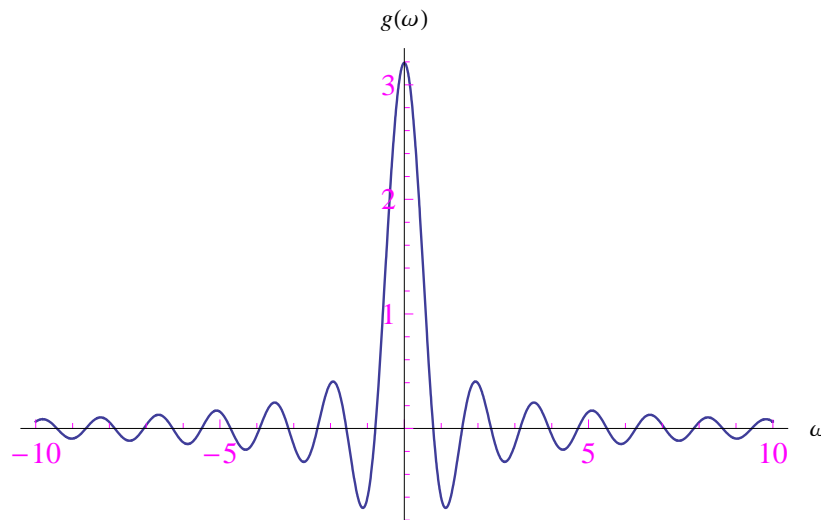


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Esperimenti computazionali con Mathematica: la trasformata di Fourier

Marcello Colozzo



1 La trasformata di Fourier

Proponiamo un semplice esempio in modo da capire i concetti fondamentali, che ci darà tra l'altro, la possibilità di calcolare la trasformata a mano, cioè senza eseguire calcoli mostruosi.

Supponiamo di avere una grandezza y variabile in funzione del tempo t , secondo la legge:

$$f(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{se } t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \end{cases}, \quad (1)$$

essendo ω_0 la frequenza angolare, come riportato in fig. 1.

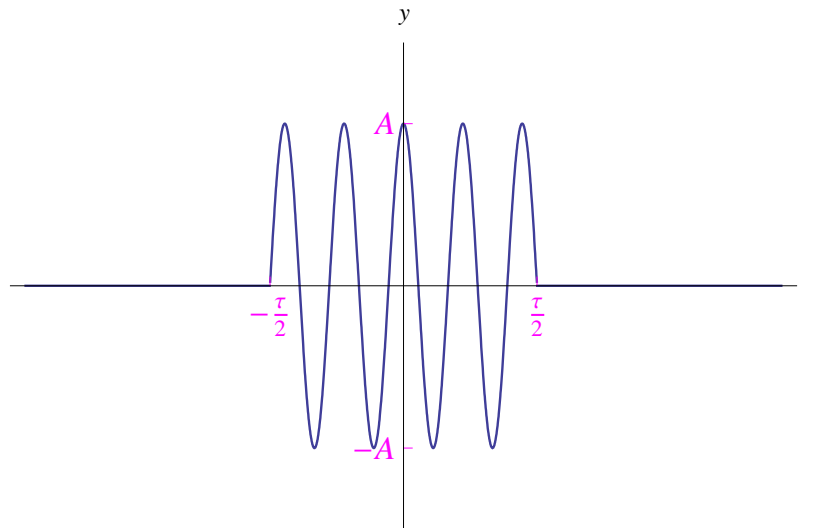


Figura 1: Andamento in funzione del tempo della grandezza y data dalla (1).

La grandezza $f(t)$ non è periodica, ma è tuttavia esprimibile attraverso uno sviluppo in integrale di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

da cui vediamo che $f(t)$ si esprime come una sovrapposizione lineare di infiniti termini monocromatici (o armonici o *componenti di Fourier*) di frequenza ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$. La funzione $g(\omega)$ è continua in $(-\infty, +\infty)$ ed è tale che $g(\omega) d\omega$ è l'ampiezza delle componenti di Fourier la cui frequenza è compresa tra ω e $\omega + d\omega$. Ne consegue che la funzione $g(\omega)$ è la *densità spettrale* nota anche come *trasformata di Fourier* della $f(t)$. Invertendo la (2):

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

Per determinare la densità spettrale della (1) utilizziamo la notazione complessa:

$$f(t) = \begin{cases} A e^{i\omega_0 t}, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{se } t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \end{cases} \quad (4)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} [e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}}] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau\right)}{i(\omega_0 - \omega)}
 \end{aligned}$$

Cioè

$$g(\omega) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0} \quad (5)$$

Tale funzione è definita in $\mathbb{R} - \{\omega_0\}$. Studiamo il comportamento in un intorno di ω_0 :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} g(\omega) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x = \frac{\omega - \omega_0}{2}\tau$, si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0} = \frac{\tau}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\tau}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} g(\omega) = \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}}$$

Prolungando per continuità:

$$g(\omega) = \begin{cases} A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0}, & \text{se } \omega \neq \omega_0 \\ \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = \omega_0 \end{cases} \quad (6)$$

Notiamo che ω_0 è un punto di massimo assoluto per $g(\omega)$, mentre i punti di massimo relativo si ottengono risolvendo:

$$\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right) = 1,$$

cioè:

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{\pi}{\tau} (1 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dall'espressione analitica di $g(\omega)$ vediamo che tale funzione è un'oscillazione sinusoidale modulata da $(\omega - \omega_0)^{-1}$, come illustrato in fig. 2.

Inoltre, dalla fig. 2 vediamo che il contributo dominante a $f(t)$ proviene dalle componenti di Fourier con frequenza prossima a ω_0 . D'altra parte, al crescere della durata τ del segnale, la densità spettrale diviene progressivamente più piccata intorno a ω_0 , come mostrato dal grafico di fig. 3.

Al limite:

$$\frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} +\infty \implies g(\omega) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} A \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0),$$

dove $\delta(\omega - \omega_0)$ è la funzione delta di Dirac centrata in ω_0 . In tal caso, dalla (2) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= A e^{i\omega_0 t},
 \end{aligned}$$

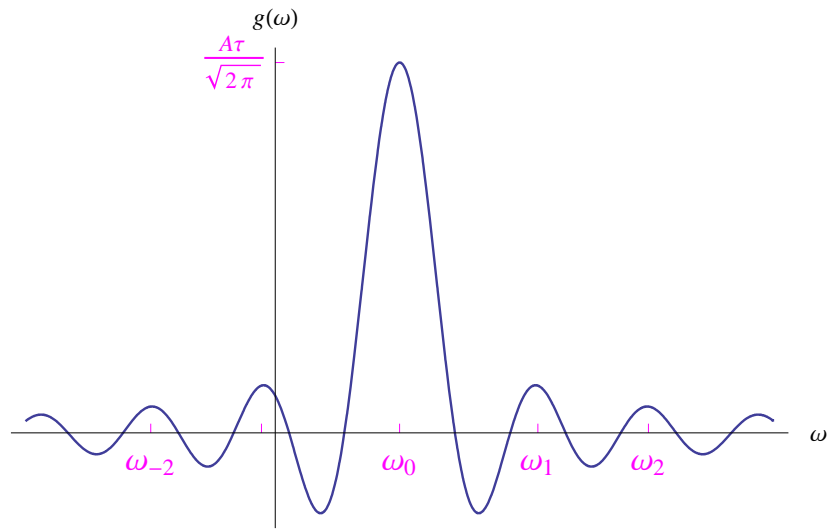


Figura 2: Andamento della densità spettrale della grandezza $y = f(t)$ data dalla (1).

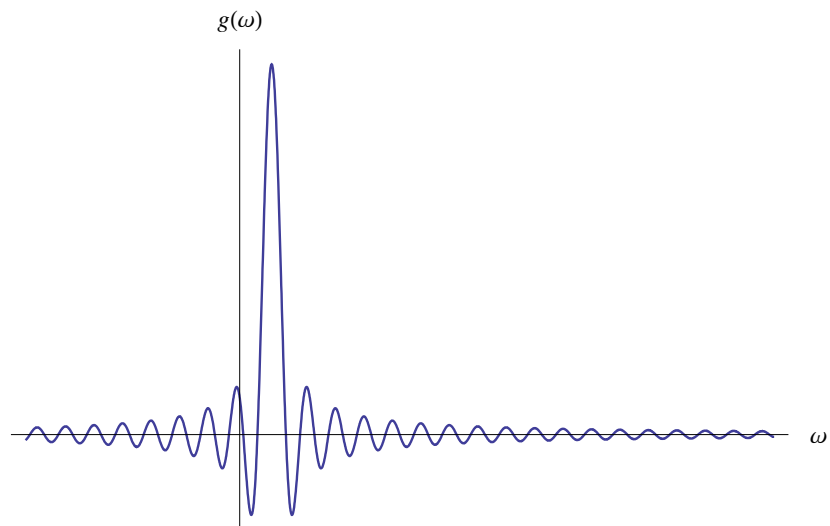


Figura 3: All'aumentare della durata τ , la densità spettrale diviene estremamente piccata intorno a ω_0 . Ciò vuol dire che il contributo dominante a $f(t)$ proviene dalle componenti di Fourier con $\omega \simeq \omega_0$. Viceversa, per $|\omega - \omega_0| \gg 1$, il contributo è trascurabilmente piccolo.

da cui prendendo la parte reale:

$$f(t) = A \cos \omega_0 t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Viceversa, al diminuire di τ la distribuzione $g(\omega)$ delle frequenze tende ad allargarsi, come mostrato in fig. 4.

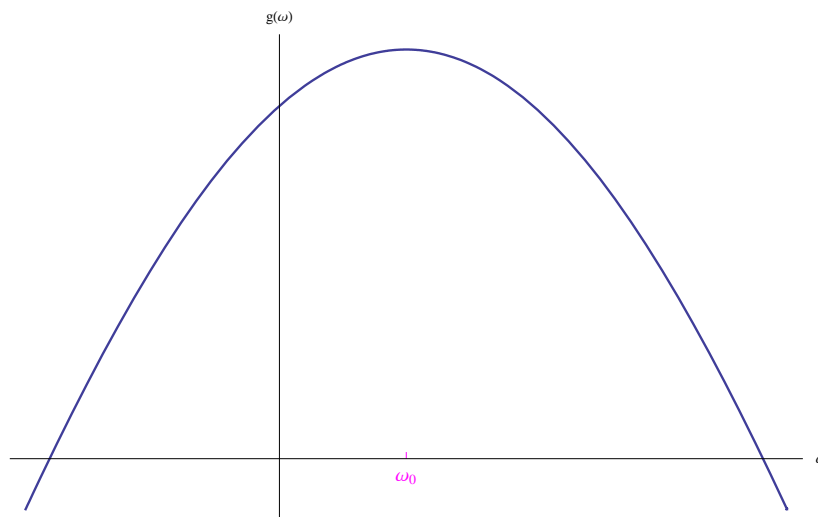


Figura 4: Al diminuire della durata τ , la densità spettrale tende ad allargarsi intorno a ω_0 . Ciò vuol dire che le componenti di Fourier con $|\omega - \omega_0| \gg 1$ forniscono un contributo non trascurabile.

Per $\tau \rightarrow 0$, abbiamo un segnale $y = f(t)$ impulsivo, i.e. deltiforme: $y = A\delta(t)$ a cui contribuiscono tutte le componenti di Fourier con ω da $-\infty$ a $+\infty$. Infatti:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega \cdot 0} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

2 La trasformata di Fourier con Mathematica

Per quanto visto nella sezione precedente, assegnata una funzione $f(t)$ sufficientemente regolare, più precisamente appartenente allo spazio funzionale $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, abbiamo la seguente rappresentazione integrale:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7)$$

dove $g(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $f(t)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

In termini operatoriali, l'equazione precedente si scrive:

$$g(\omega) = \mathcal{F}_t[f(t)](\omega), \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad (8)$$

dove

$$\mathcal{F}_t[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad (9)$$

In altri termini, il risultato dell'applicazione dell'operatore \mathcal{F}_t all'elemento f dello spazio funzionale $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, è la trasformata di Fourier di f . La (7) ci dice che tale operatore è dotato di inverso:

$$f(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[g(\omega)](t) \quad (10)$$

Esistono alcune convenzioni riguardo al coefficiente moltiplicativo $(2\pi)^{-1/2}$ e al segno dell'esponente nell'esponenziale immaginario. Ad esempio, possiamo scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{array} \right.$$

e viceversa. Oppure:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right.$$

La scelta delle singole convenzioni è legata all'ambito applicativo della trasformata di Fourier. *Mathematica* utilizza la seguente espressione generale:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt$$

dove a, b sono coefficienti tali che $a \in \{0, 1, -1\}$, $b \in \{-1, 1\}$. Più precisamente:

1. **Fisica moderna:** $a = 0, b = 1$. Queste sono le impostazioni di default dell'istruzione `FourierTransform` con cui *Mathematica* calcola la TF. Quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right. \quad (11)$$

2. **Matematica, ingegneria:** $a = 1, b = -1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{array} \right. \quad (12)$$

3. **Fisica classica:** $a = -1$, $b = 1$.

$$\begin{cases} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \end{cases} \quad (13)$$

4. **Teoria dei segnali:** $a = 0$, $b = -2\pi$

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) e^{-2\pi i\nu t} d\nu \\ g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i\nu t} dt \end{cases} \quad (14)$$

Ciò premesso, proviamo a calcolare con Mathematica (nelle impostazioni di default) la TF di un segnale **modulato in ampiezza**:

$$f(t) = Ae^{-kt}U(t) \sin \omega_0 t, \quad (15)$$

dove $k > 0$ è una costante con le dimensioni dell'inverso di un tempo, mentre $U(t)$ è la funzione **unit step**. Per $\omega_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $k = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$, $A = 1$, la trasformata di Fourier è:

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{5 \times 10^3}{1000001 - 20i\omega - 100\omega^2}, \quad (16)$$

Plottando $|g(\omega)|$ logaritmicamente su entrambi gli assi, fornisce il grafico di fig. 5, da cui vediamo che il contributo dominante proviene dalle componenti di Fourier di frequenza $\omega \sim 10^2$.

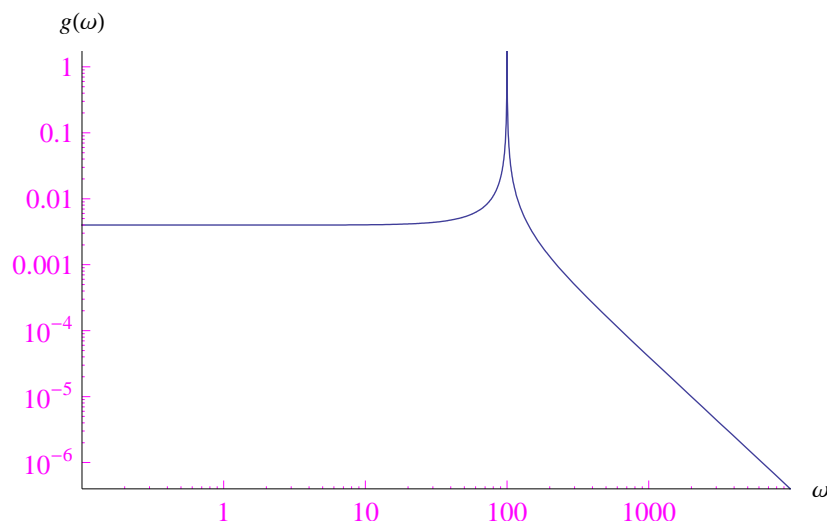


Figura 5: Grafico del modulo della densità spettrale del segnale modulato in ampiezza (15).

Proviamo ora a calcolare la TF della funzione:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq a \\ 0, & \text{se } |x| > a \end{cases}, \quad (17)$$

il cui grafico è riportato in fig. 6. La trasformata di Fourier per $a = 1$ è

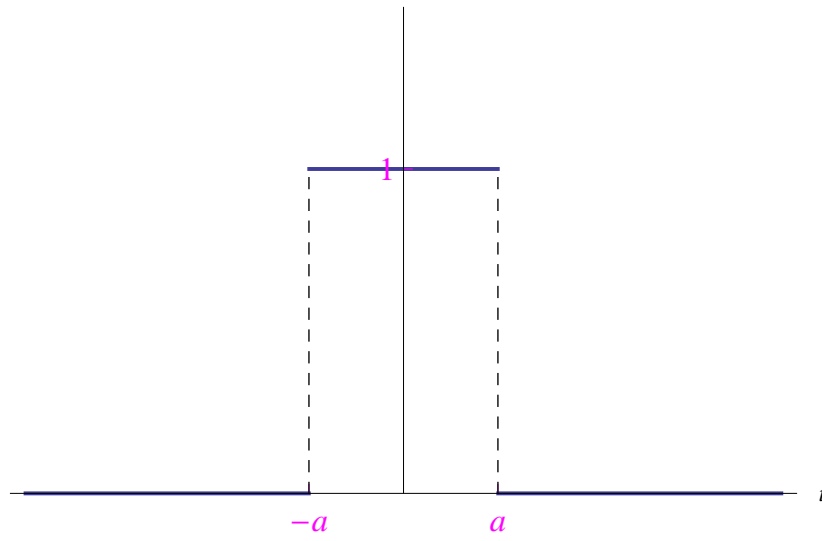
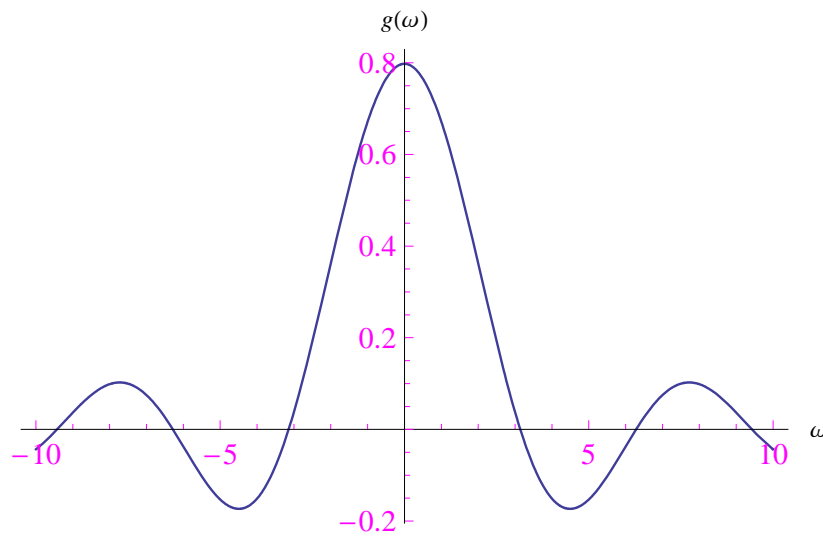


Figura 6: Grafico della funzione (17).

Figura 7: Grafico della TF della funzione (17) per $a = 1$.

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad (18)$$

graficata in fig. 7.

Se proviamo ad aumentare a , ad esempio ponendo $a = 4$, vediamo che la densità spettrale diviene più piccata intorno a $\omega = 0$, come illustrato nel grafico di fig. 8.

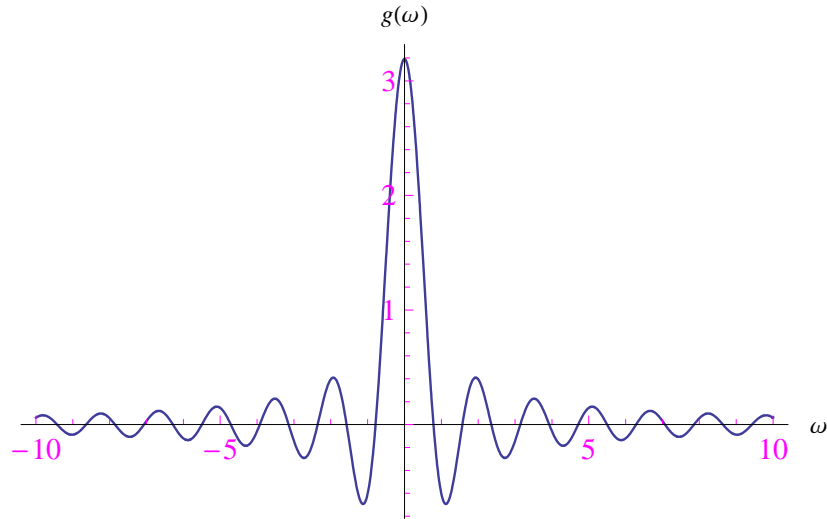


Figura 8: Grafico della TF della funzione (17) per $a = 4$.

Nel limite per $a \rightarrow +\infty$, riesce $g(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega)$.

Il file pdf contenente il codice Mathematica per eseguire la TF degli esempi proposti può essere prelevato da questa [risorsa on-line](#).