

Interpretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale

Marcello Colozzo

[<http://www.extrabyte.info>]

Consideriamo una particella di massa m compie un moto piano lungo una traiettoria γ di rappresentazione parametrica:

$$x = v_0 t, \quad y = y(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

essendo t il tempo, mentre

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t}, & \text{se } t < t_0 \end{cases}, \quad (2)$$

dove $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni¹. Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ non è una curva regolare poiché $\ddot{y}(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0 . Infatti, osservando che

$$\frac{d}{dt} \sqrt{t - t_0} = \frac{1}{2\sqrt{t - t_0}}, \quad \frac{d}{dt} \sqrt{t_0 - t} = -\frac{1}{2\sqrt{t_0 - t}},$$

si ha:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \quad (3)$$

cioè

$$\dot{y}(t) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t - t_0|}} \quad (4)$$

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{y}(t) = +\infty, \quad (5)$$

da cui si ha che (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale per $\Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

Insieme di definizione

La funzione (2) è definita in \mathbb{R} , ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (1).

Intersezione con gli assi

$$y(0) = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} y_1, \quad (6)$$

per cui il Γ_y interseca l'asse delle ordinate in $(0, y_1)$. Per determinare le radici di $y(t) = 0$, dobbiamo separare i due casi $t > t_0$ e $t < t_0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} t > t_0 &\implies y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0} = 0 \implies \sqrt{t - t_0} = -\frac{y_0}{\eta_0} < 0 \quad \text{mai!} \\ 0 \leq t < t_0 &\implies y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} = 0 \implies t_0 - t = \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2, \end{aligned}$$

da cui $t_1 = t_0 - \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2 < t_0$ è uno zero di $y(t) \implies \Gamma_y$ interseca l'asse delle ascisse in $(t_1, 0)$.

Segno della funzione

¹In particolare, v_0 è la componente della velocità \mathbf{v} della particella nella direzione dell'asse x .

Riesce

$$y(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Per $0 \leq t < t_0$ dobbiamo risolvere la disequazione

$$y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} > 0 \iff t \geq t_1$$

Cioè

$$y(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_1)$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}) = +\infty$$

Cioè la funzione diverge positivamente per $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{t} = \frac{y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}}{t} = 0 \quad (\text{per confronto tra infiniti})$$

Ne consegue l'assenza di asintoti obliqui.

Studio della derivata prima

Dalle (4) vediamo che

$$\dot{y}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) - \{t_0\} \quad (7)$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in X .

Derivata seconda

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (t - t_0)^{-1/2} &= -\frac{1}{2} (t - t_0)^{-3/2} \\ \frac{d}{dt} (t_0 - t)^{-1/2} &= -\frac{1}{2} (t_0 - t)^{-3/2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (8)$$

Riesce

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &> 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \\ \ddot{y}(t) &< 0, \quad \forall t \in (t_0, +\infty) \end{aligned}$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso l'alto in $[0, t_0)$, verso il basso in $(t_0, +\infty)$.

Tracciamento del grafico

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y , come illustrato in fig. 1.

Eliminando il parametro t tra le (1), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_{++} : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (9)$$

essendo $x_0 \stackrel{def}{=} x(t_0)$. La cui derivata prima della funzione (9) è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x-x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0-x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases},$$

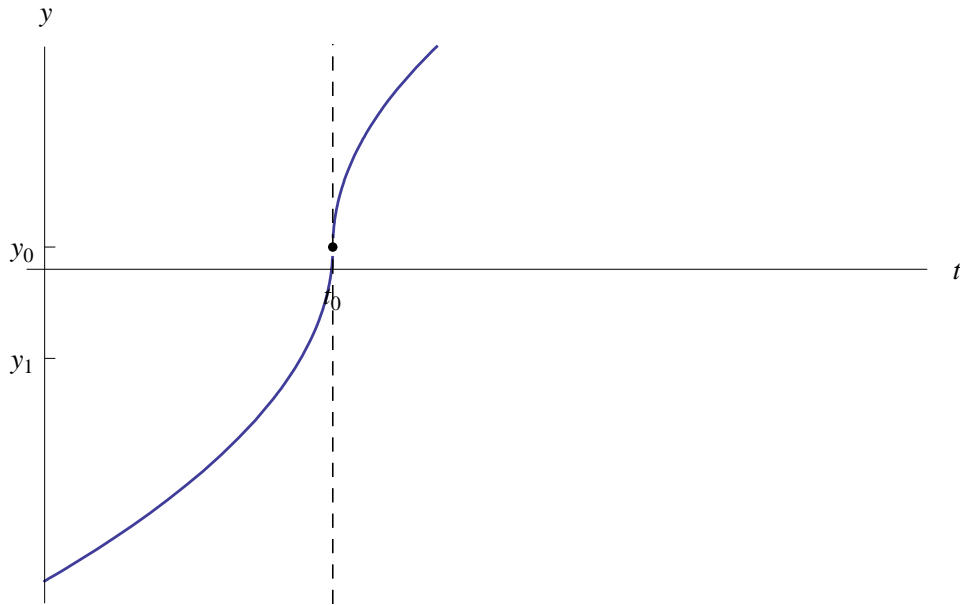


Figura 1: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale (tracciata in tratteggio).

Cioè

$$f'(x) = \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{|x - x_0|}},$$

avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di flesso a tangente verticale per γ_{++} . Inoltre:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty) - \{x_0\}$$

Ciò implica che f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. La derivata seconda è:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x-x_0)^3}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x_0-x)^3}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0, \quad \forall x \in [0, x_0) \\ f''(x) &< 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty) \end{aligned}$$

Significa che γ_{++} è concavo verso l'alto in $[0, x_0)$, concavo verso il basso in $(x_0, +\infty)$. Riguardo al comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Per ultimo:

$$f(0) = y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0} = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} = y_1,$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (6). Inoltre:

$$f(x) = 0 \iff x = x_0 - v_0 \left(\frac{y_0}{\eta_0} \right)^2 \stackrel{def}{=} x_1$$

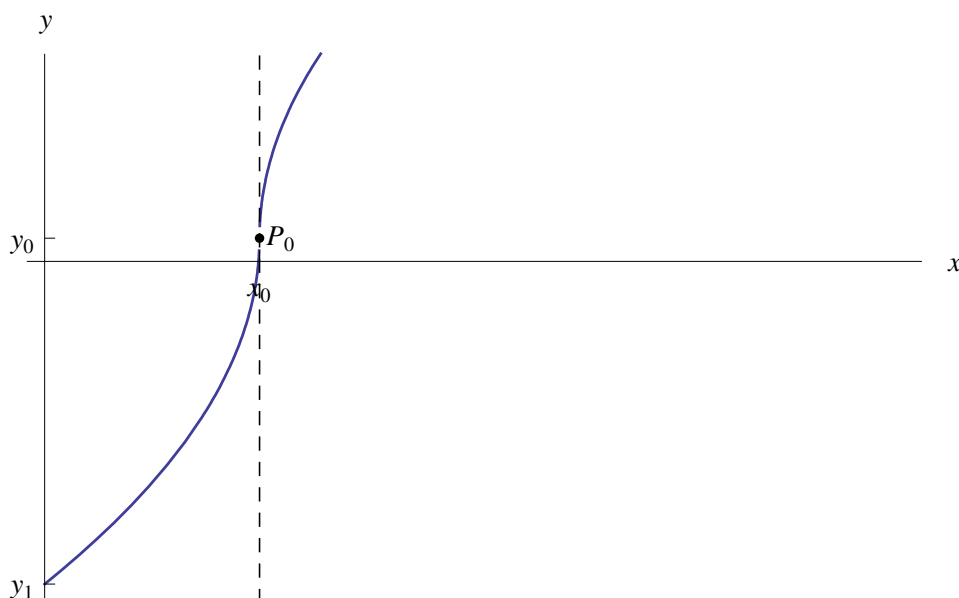


Figura 2: Traiettorie della particella.

Significa che γ_{++} interseca l'asse x nel punto di ascissa x_1 . L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. 2).

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} \quad (10)$$

essendo \mathbf{i} e \mathbf{j} i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t-t_0|}} \mathbf{j} = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (11)$$

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x . Per contro, il moto componente lungo l'asse y è accelerato per $t \in [0, t_0)$, giacchè $\ddot{y}(t) > 0$ in tale intervallo, mentre è decelerato per $t > t_0$ ($\ddot{y}(t) < 0, \forall t > t_0$). Inoltre, la funzione vettoriale (??) della variabile reale t , ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}$$

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y , della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge positivamente per $t \rightarrow t_0$. Ciò implica che quando la particella transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità tende a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita. Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} \quad (12)$$

Tenendo conto delle (8):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (13)$$

In fig. 3 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m \mathbf{a}(t)$$

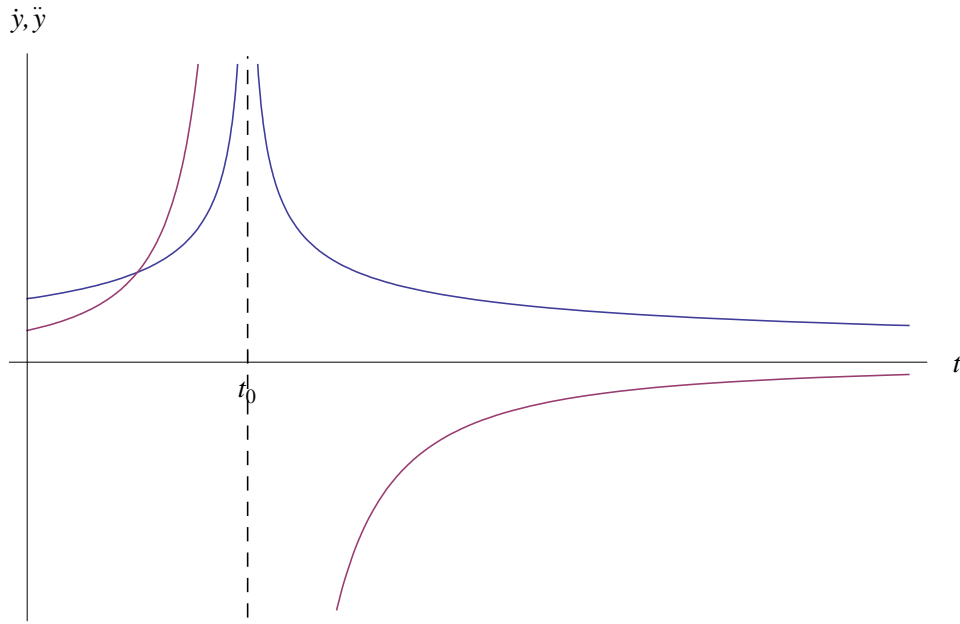


Figura 3: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (14)$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0 - t}$ (valida per $t < t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t_0 - t} = \frac{y_0 - y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0]$$

Dalla $y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{t - t_0}$ (valida per $t \geq t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t - t_0} = \frac{y - y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty)$$

Sostituendo le formule trovate nella (14):

$$\mathbf{F}(y) = \begin{cases} \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}\mathbf{j}, & \text{se } -\infty < y < y_0 \\ -\frac{m\eta_0^4}{4(y - y_0)^3}\mathbf{j}, & \text{se } y > y_0 \end{cases} \quad (15)$$

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che \mathbf{F} dipende dalla sola variabile y :

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j},$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = -\frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} dy = \frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} d(y - y_0) \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2} + V_0 \end{aligned}$$

Un qualunque campo scalare di energia potenziale deve annullarsi all'infinito nelle coordinate spaziali:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V(y) = 0 \implies V_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \quad (16)$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y - y_0)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2} + V'_0 \end{aligned}$$

Ma

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \implies V'_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (17)$$

Le (16)-(17) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \quad (18)$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. 4.

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \rightarrow t_0 \implies |\mathbf{F}(t)| \rightarrow +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso l'alto. Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme \mathcal{V} dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

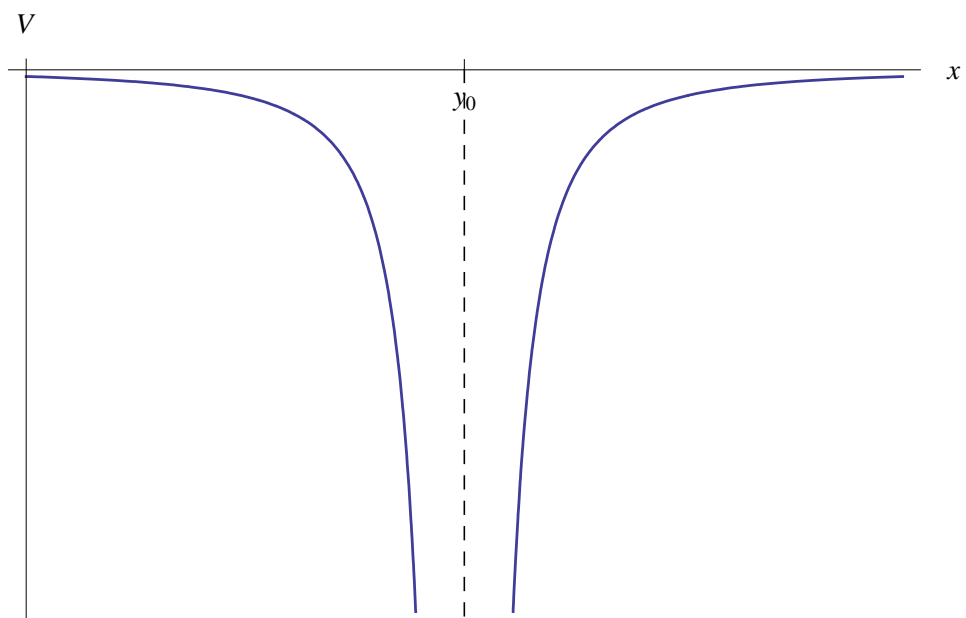


Figura 4: Buca di potenziale infinitamente profonda.