

Analisi nello spazio delle configurazioni

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

1 Introduzione

In quest'articolo mostriamo che un sistema non autonomo (nel caso specifico di una diffusione virale)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(t) N, \quad (\alpha(t) \geq 0, \quad \forall t)$$

può essere descritto da un insieme al più infinito numerabile, di sistemi istantaneamente autonomi, ciascuno dei quali è del tipo *mappa logistica* i.e. **macchina ricorsiva**.

2 Dominio del tempo. Approssimazione logistica

Abbiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha(t) N \\ N(0) = t_0 \end{cases} \quad (1)$$

Non conosciamo l'espressione analitica di $\alpha(t)$; ciò che è noto sono i suoi valori assunti in istanti t_k con $k = 0, 1, 2, \dots, n$, essendo n un intero che indicizza l'istante giornaliero t_n . Precisamente, l'equazione differenziale (1) può essere scritta come

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \alpha(t) N$$

Campionando la variabile t

$$t \rightarrow t_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

Ne segue l'equazione di ricorrenza

$$N_{k+1} - N_k = \alpha_k N_k \quad (2)$$

Siccome N_k, N_{k+1} possono essere presi dal sito web della Protezione civile, si ha

$$\alpha_k = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad (3)$$

E quindi il valor medio nell'intervallo $[0, t_n]$:

$$\rho_n = \langle \alpha \rangle_{t_n} \quad (4)$$

Ciò premesso, in approssimazione logistica per un assegnato n abbiamo il sistema autonomo:

$$\frac{dN}{dt} = \rho_n N - \beta_n N^2, \quad (5)$$

dove $\beta_n = f(\rho_n)$ è determinato in base ai dati osservativi (cioè i valori α_k e quindi, il valor medio ρ_n), risultando

$$0 < \beta_n \ll \rho_n, \quad \forall n$$

Imponendo la condizione iniziale $N(0) = N_0 = 221$, otteniamo una famiglia di logistiche ad un parametro, quali curve del piano cartesiano (t, N) :

$$\Gamma_{\rho_n} : N(t) = \frac{\rho_n N_0}{\beta_n N_0 + (\rho_n - \beta_n) e^{-\rho_n t}}, \quad \forall \rho_n \in A \subset [0, +\infty) \quad (6)$$

Segue il comportamento all'infinito di singola logistica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\rho_n}{\beta_n} \equiv L_n \in \mathbb{R} \quad (7)$$

3 Dominio delle configurazioni

Dall'equazione differenziale (5) possiamo facilmente passare all'equazione di ricorrenza (campionando al solito modo la variabile t):

$$N_{k+1} = (\rho_n + 1) N_k - \beta_n N_k^2 \quad (8)$$

ottenendo un sistema a tempo discreto Σ_n con funzione di trasferimento

$$f_n(N_k) = (\rho_n + 1) N_k - \beta_n N_k^2; \quad N_{k+1} = f_n(N_k) \quad (9)$$

Più precisamente, abbiamo un insieme al più infinito numerabile di sistemi autonomi a tempo discreto:

$$\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

La (9) è l'equazione di una parabola γ_n nel piano delle configurazioni (N_k, N_{k+1}) :

$$\gamma_n : N_{k+1} = (\rho_n + 1) N_k - \beta_n N_k^2,$$

come illustrato in fig. 1, da cui vediamo l'esistenza di un *fixed point* (punto fisso), dato dall'intersezione della parabola con la semibisettrice del primo quadrante.

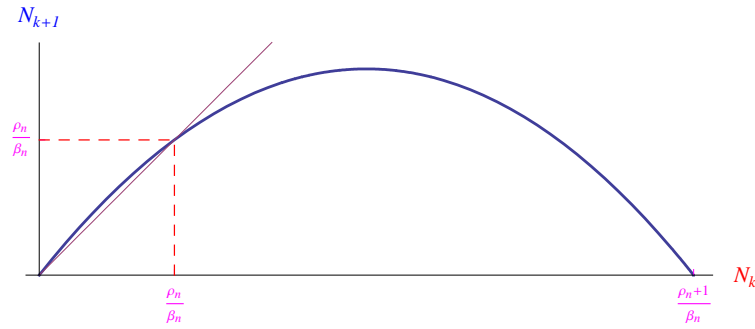


Figura 1: Regione dello spazio delle configurazioni accessibile al sistema Σ_n .

Più precisamente, il sistema è avviato da $N_0 = 221$, per cui passa per gli stati (N_k, N_{k+1}) fino al raggiungimento del punto fisso, che restituisce (per iterazione) il medesimo stato. Ciò può essere verificato simulando l'evoluzione dinamica con *Mathematica*, ottenendo il cosiddetto *diagramma delle orbite* (o *diagramma di König-Lemary*), come in fig. 2. Qui abbiamo un automa cellulare che parte dallo stato iniziale $N_0 = 221$, ed evolve deterministicamente verso il fixed point:

$$\left(\frac{\rho_n}{\beta_n}, \frac{\rho_n}{\beta_n} \right)$$

Per un assegnato n abbiamo, dunque, una successione di punti

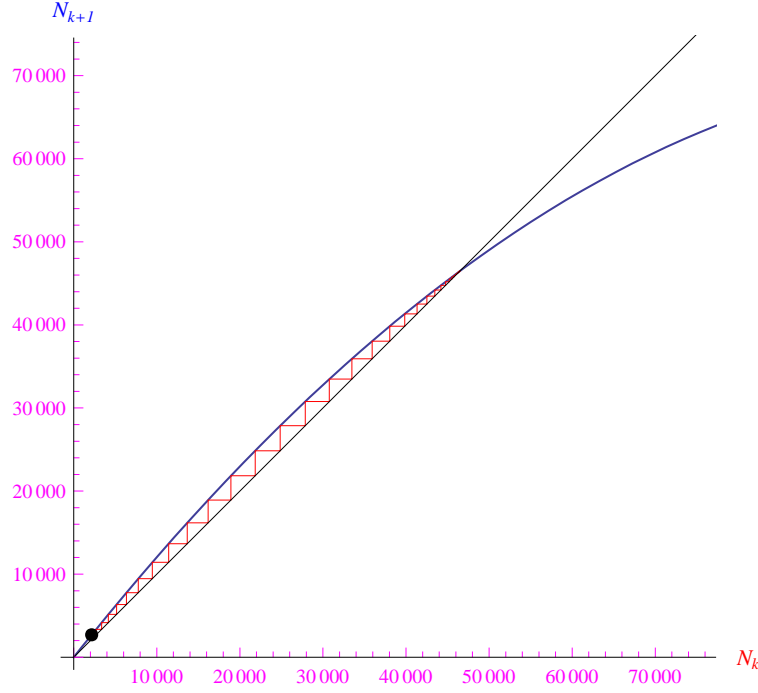
$$\{P_k(N_k, N_{k+1})\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad P_k(N_k, N_{k+1}) \in \gamma_n$$

tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P_n^{fixed}(L_n, L_n), \quad (10)$$

giacché

$$L_n = \frac{\rho_n}{\beta_n}$$


 Figura 2: Diagramma delle orbite per $n = 19$.

Notiamo che la convergenza (10) è assicurata dal *teorema del punto fisso*. Al variare di n ci aspettiamo una famiglia di parabole γ_n , per cui da un punto di vista formale, il punto P_n^{fixed} può essere interpretato come lo stato di un nuovo sistema Σ^* tale che la sua regione accessibile nello spazio delle configurazioni è la semibisettrice del primo e terzo quadrante, giacchè gli punti P_n^{fixed} appartengono a tale luogo. Diremo allora che il sistema non autonomo (1) è stabile se la successione $\{P_n^{fixed}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^{fixed} = P^{fixed} \quad (11)$$

Nel caso contrario

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^{fixed} = \infty,$$

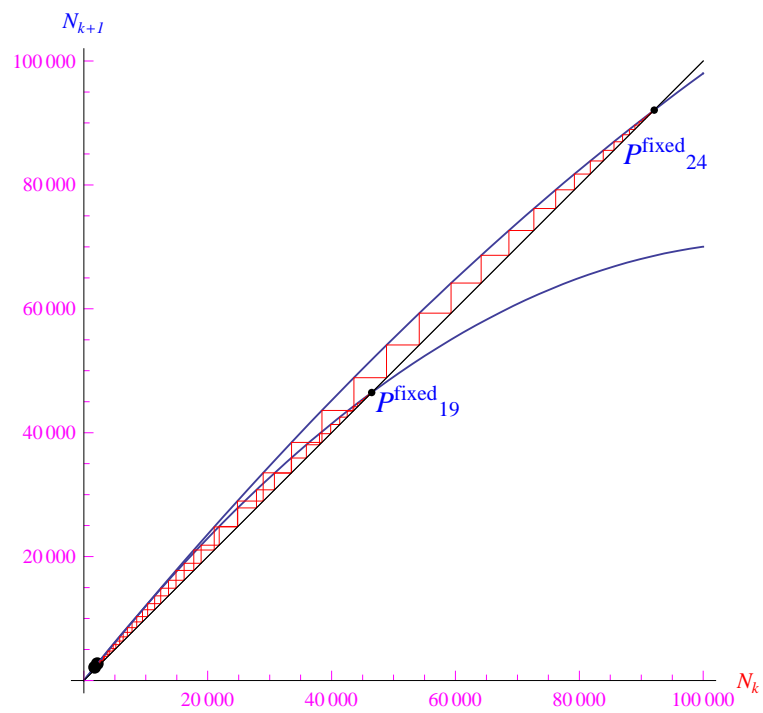
diremo che il sistema è instabile. Nel caso di convergenza, definiamo

$$\Delta_n = \text{dist}(P_n^{fixed}, P^{fixed}) = \sqrt{(L_n - \Lambda)^2 + (L_n - \Lambda)^2} = \sqrt{2}(L_n - \Lambda),$$

essendo (Λ, Λ) le coordinate cartesiane nel piano delle configurazioni, di P^{fixed} . Segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0 \implies (\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies |\Delta_n| < \varepsilon)$$

In fig. 3 vediamo due posizioni non successive di P_n^{fixed} .

Figura 3: Diagramma delle orbite per $n = 19$.