La funzione esponenziale nel campo complesso

[Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info]

Prima di definire la funzione esponenziale complessa, dimostriamo la seguente proprietà:

Proprietà 1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \tag{1}$$

Dimostrazione. Assegnata la successione di funzioni complesse:

$$\left\{f_n\left(z\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}, \tag{2}$$

il cui termine generale è:

$$f_n\left(z\right) = 1+\frac{z}{n},$$

Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n\left(z\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) + i\lim_{n\to+\infty}\frac{y}{n} = 1, \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

In altri termini, la successione di funzioni complesse (2) converge alla funzione (reale) costante $f\left(x\right)=1$. Ciò implica:

$$\lim_{n\to+\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \arg 1 = 0$$

Applicando la definizione di limite:

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\nu_\varepsilon\left(z\right)\in\mathbb{N} \mid n>\nu_\varepsilon\left(z\right) \Longrightarrow \left|\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)\right| < \varepsilon$$

Per $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$:

$$\left|\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)\right| < \frac{\pi}{2}, \quad \forall n > \nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$$

In altri termini, possiamo determinare un indice $\nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$ tale che per $n>\nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$, l'immagine del numero complesso $1+\frac{z}{n}$ appartiene al semipiano $x>0$. Ne consegue

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \arctan\frac{y}{x+n}, \quad \forall n>\nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$$

Passando alla forma trigonometrica:

$$1+\frac{z}{n} = \left|1+\frac{z}{n}\right|\left[\cos\left(\arctan\frac{y}{x+n}\right) + i\sin\left(\arctan\frac{y}{x+n}\right)\right], \quad \forall n>\nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$$

Per la formula di de Moivre, la potenza *n-esima* di $1+\frac{z}{n}$ è:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n\left[\cos\left(n\arctan\frac{y}{x+n}\right) + i\sin\left(n\arctan\frac{y}{x+n}\right)\right], \quad \forall n>\nu_{\frac{\pi}{2}}\left(z\right)$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lambda_1\lambda_2,$$

dove

$$\lambda_1 \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n, \quad \lambda_2 \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty}\left[\cos\left(n\arctan\frac{y}{x+n}\right) + i\sin\left(n\arctan\frac{y}{x+n}\right)\right]$$

Calcoliamo λ_1.

$$\begin{aligned}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n &= \left|1+\frac{x}{n}+\frac{iy}{n}\right|^n \\ &= \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$

$$\lambda_1 = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

Ma $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, onde:

$$\lambda_1 = e^x\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}},$$

risultando

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = 1^\infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, applichiamo il seguente artificio:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\left(\frac{x+n}{y}\right)^2}\right\}^{\frac{ny^2}{(x+n)^2}}$$

Ponendo $t = \left(\frac{x+n}{y}\right)^2$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\left(\frac{x+n}{y}\right)^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e,$$

per cui:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{ny^2}{(x+n)^2}} = e^0 = 1$$

Ne consegue:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = 1$$

Cioè:

$$\lambda_1 = e^x$$

Passiamo al limite λ_2. Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to+\infty} n\arctan\frac{y}{x+n} = y,$$

per cui

$$\lambda_2 = \cos y + i\sin y,$$

onde l'asserto. ■

La proprietà (1) suggerisce la seguente definizione della funzione esponenziale nel campo complesso:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall z = x + iy \tag{3}$$

Separando la parte reale da quella immaginaria:

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y \tag{4}$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione $e^z = 1$. Abbiamo:

$$e^z = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} e^z = 1, \ \operatorname{Im} e^z = 0,$$

da cui $x = 0, \ y = 2k\pi$ per cui è $e^z = 1$ in tutti e soli i punti $z_k = 2k\pi i$. Ne consegue che e^z è periodica di periodo $2\pi i$. Mostriamo ora che $f(z) = e^z$ è olomorfa in tutto il piano complesso. Si tratta di provare che è differenziabile secondo Stolz in $\mathbb{R}^2$ e che verifica le equazioni di Cauchy-Riemann. La differenziabilità segue immediatamente dalla (4). Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ f_y(x, y) &= e^x (-\sin y + i \cos y), \end{aligned}$$

per cui $f_x(x, y) + i f_y(x, y) \equiv 0$. La derivata è

$$f'(z) = f_x(x, y) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Cioè

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,$$

in perfetta analogia con il caso reale. Infine, per $x = 0$ otteniamo la nota formula di Eulero

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Riferimenti bibliografici

[1] FicheraG., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.