Equazione della cicloide

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Assegnato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$, si consideri il cerchio $\Sigma(t)$, essendo t il tempo, che rotola senza strisciare lungo l'asse x (nel verso positivo). All'istante iniziale $t = 0$ è $\Sigma(0) \equiv \Sigma_0$, ove

$$\Sigma_0 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2, \tag{1}$$

cosicché $\gamma_0 = \partial\Sigma_0$ è la circonferenza di centro $C_0(0, R)$ e raggio R:

$$\gamma_0 : x^2 + (y - R)^2 = R^2 \tag{2}$$

Si determini l'equazione della traiettoria del punto $P(t) \in \Sigma(t)$ tale che $P(t = 0) \equiv P_0(0, 0)$, nell'ipotesi in cui il centro di $\Sigma(t)$ compie un moto rettilineo ed uniforme.

Soluzione

Il centro $C(t)$ di $\Sigma(t)$ i.e. della circonferenza $\gamma(t) = \partial\Sigma(t)$ ha coordinate $(s(t), R)$ dove $s(t) = v_0 t$ con v_0 costante reale positiva, giacché per ipotesi tale punto compie un moto rettilineo ed uniforme.

Dal momento che $\Sigma(t)$ rotola senza strisciare, si ha che adottando un riferimento curvilineo su $\gamma(t)$ con origine nel punto $(s(t), 0)$, l'ascissa curvilinea di $P(t)$ è data proprio da $s(t)$, cioè dalla distanza percorsa dal predetto punto al tempo t. Il corrispondente angolo è

$$\alpha(t) = \frac{s(t)}{R} \tag{3}$$

Il problema consiste nel determinare le coordinate cartesiane di $P(t)$. A tale scopo fissiamo un riferimento cartesiano $\mathcal{R}'(C(t)\xi\eta)$ solidale a $\Sigma(t)$ disposto come in fig. 1.

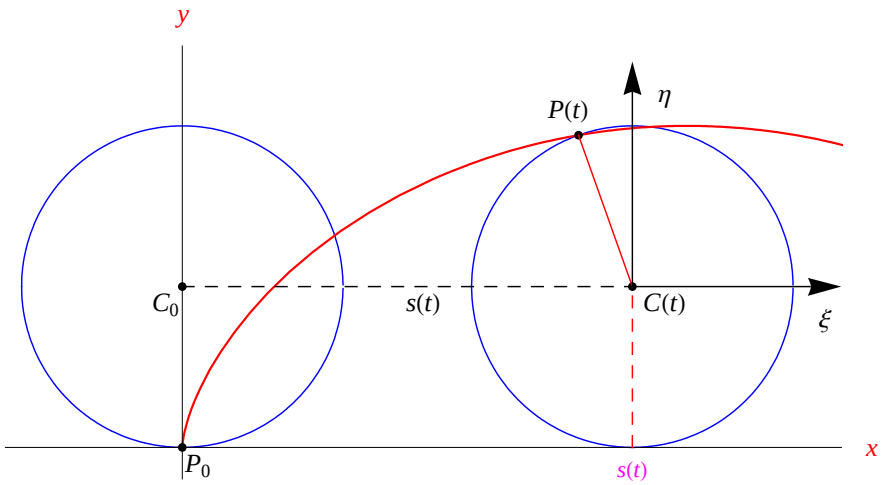

Figura 1: Traiettoria del punto $P(t)$ lungo la cicloide.

In tale riferimento le coordinate cartesiane di $P(t)$ si scrivono

$$\xi(t) = R\cos\varphi(t), \ \eta(t) = R\sin\varphi(t),$$

dove $\varphi(t)$ è l'anomalia di $P(t)$ contata a partire dall'asse ξ positivamente in verso antiorario, per cui

$$\varphi(t) = \frac{3}{2}\pi - \alpha(t),$$

cosicché

$$\xi(t) = -R\sin\alpha(t)\,,\ \ \eta(t) = -R\cos\alpha(t) \tag{4}$$

Le equazioni di trasformazione che connettono le coordinate (ξ, η) alle coordinate (x, y) sono

$$x = s(t) + \xi(t)\,,\ \ y = R + \eta(t) \tag{5}$$

Tenendo conto della (3) e che $s(t) = v_0 t$, si ha finalmente

$$x = v_0 t - R\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right),\ \ y = R\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right],$$

che sono le equazioni orarie del punto $P(t)$ e, quindi, una rappresentazione parametrica della traiettoria Γ. Siccome le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono periodiche di periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v_0},$$

si ha che Γ è periodica di periodo T. Come è noto, Γ è una curva piana notevole, nota come *cicloide*.