Calcolo dell'ordine di un infinitesimo

Marcello Colozzo
[http://www.extrabyte.info]

Sia data la funzione:

$$f(x) = \ln x \sqrt{e^x - e} \tag{1}$$

Vogliamo determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo in $x = 1$. Per farci un'idea più precisa, iniziamo a ricercare il campo di esistenza X. Deve essere:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ e^x - e \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \tag{2}$$

cioè $X = [1, +\infty)$. Inoltre:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in X \tag{3}$$

In particolare $f(1) = 0$ e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

Ne consegue che la funzione è infinitesima in $x = 1$ e dalla (3) vediamo che il suo grafico è contenuto nella regione

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x < +\infty, \ \ 0 \leq y < +\infty \right\}$$

Per vedere se tale infinitesimo è dotato di ordine, dobbiamo verificare che:

$$\exists \alpha > 0 \mid \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = l \in R - \{0\},$$

dove $u(x) = x - 1$ è l'infinitesimo campione. Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x \sqrt{e^x - e}}{(x-1)^\alpha} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x \sqrt{e(e^{x-1} - 1)}}{(x-1)^\alpha} = \sqrt{e}\lambda, \end{aligned}$$

dove

$$\lambda \stackrel{def}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x \sqrt{(e^{x-1} - 1)}}{(x-1)^\alpha} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = x - 1$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(t+1)\sqrt{(e^t - 1)}}{t^\alpha} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{\ln(t+1)}{t} \frac{\sqrt{(e^t - 1)}}{t^{\alpha - 1}} \right] \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{\ln(t+1)}{t} \right] \cdot \lim_{t \to 0^+} \sqrt{\frac{e^t - 1}{t^{2(\alpha - 1)}}} \end{aligned}$$

Il primo limite è un limite fondamentale:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

Tenendo conto di quest'altro limite fondamentale:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

si ha:

$$\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{e^t-1}{t^{2(\alpha-1)}}}\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow 2(\alpha-1)=1\Longleftrightarrow\alpha=\frac{3}{2}$$

Cioè $f(x)$ è – per $x\to 1^+$ – un infinitesimo di ordine $3/2$. Inoltre:

$$\lambda\underset{\alpha=3/2}{=}1\Longrightarrow\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{(x-1)^{3/2}}=\sqrt{e}$$

Ne consegue che gli infinitesimi $f(x)$ e $(x-1)^{3/2}$ non sono equivalenti.