

CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 ESERCIZI

Carlo Ravaglia

17 settembre 2013

Indice

1	Numeri reali	1
1.1	Ordine fra numeri reali	1
1.2	Funzioni reali	4
1.3	Radici aritmetiche	7
1.4	Valore assoluto	8
1.5	Polinomi	8
1.6	Equazioni	10
1.7	Disequazioni	13
1.8	Dominio naturale di funzioni	21
2	Numeri complessi	23
2.1	Parte reale, parte immaginaria, modulo	23
2.2	Rappresentazione di sottoinsiemi di $\mathbf{C}$	24
3	Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$	25
3.1	Componenti di una funzione vettoriale	25
3.2	Prodotto scalare e norma	25
3.3	Distanza	26
4	Topologia di $\mathbf{R}^N$	27
4.1	Intorni in $\mathbf{R}^N$	27
4.2	Insiemi aperti ed insiemi chiusi	27
4.3	Gli spazi topologici $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(-)}$	28
4.4	Funzioni continue	28
4.5	Limiti	29
5	Confronto asintotico	35
5.1	Confronto asintotico	35
5.2	Principio di sostituzione	36
5.3	Asintoti	36

6	Serie	39
6.1	Serie convergenti	39
6.2	Serie geometrica	39
6.3	Serie a termini positivi	48
6.4	Limiti di successioni	50
7	Serie di potenze	53
7.1	Serie di potenze	53
7.2	Esponenziale, seno, coseno	56
7.3	Limiti	57
7.4	Serie	62
8	Derivate	65
8.1	Derivate	65
8.2	Massimo, minimo	67
8.3	Teorema del valor medio	68
8.4	Derivabilità e derivata	69
8.5	Studio funzione	71
8.6	Polinomio di Taylor	79
9	Funzioni elementari reali	81
9.1	Funzione esponenziale reale	81
9.2	Potenze di esponente reale	82
9.3	Funzioni esponenziali di base a	85
9.4	Funzioni circolari	86
9.5	Funzioni elementari reali	87
9.6	Massimi e minimi di funzioni	87
9.7	Equazioni reali	89
9.8	Limiti	89
9.9	Serie	91
9.10	Derivabilità e derivate	92
9.11	Studio di funzione	94
10	Argomento di un numero complesso	111
10.1	Argomento di un numero complesso	111
10.2	Radici complesse	111
10.3	Logaritmi complessi	117
11	Primitive ed integrali	119
11.1	Integrali di base	119
11.2	Integrali immediati	119
11.3	Integrazione per sostituzione	121
11.4	Integrazione per parti	123
11.5	Integrazione delle funzioni razionali	126
11.6	Integrazione di alcune funzioni irrazionali	128
11.7	Integrazione di alcune funzioni trascendenti	132

12 Sviluppi in serie	137
12.1 Limiti	137
12.2 Asintoti	144
12.3 Serie	146
13 Integrali impropri	147
13.1 Integrali impropri	147
13.2 Valore di un integrale improprio	147
13.3 Convergenza di integrali impropri	148
13.4 Convergenza e valori di integrali impropri	151
13.5 Integrali impropri su intervalli aperti	159
13.6 Integrali impropri su intervalli privati di punti	164

Capitolo 1

Numeri reali

1.1 Ordine fra numeri reali

1. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{n} - 1; n \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

- (a) Dire se A ammette massimo e in caso affermativo determinarlo.
- (b) Dire se A ammette minimo e in caso affermativo determinarlo.
- (c) Dire se A ammette estremo superiore in $\mathbf{R}$ e in caso affermativo determinarlo.
- (d) Dire se A ammette estremo inferiore in $\mathbf{R}$ e in caso affermativo determinarlo.

Risoluzione.

- (a) A ammette massimo e $\max(A) = 0$.
- (b) A non ammette minimo.
- (c) A ammette estremo superiore e $\sup(A) = 0$.
- (d) A ammette estremo inferiore e $\inf(A) = -1$.

2. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

- (a) $A = \left\{ \frac{3n-1}{n}; n \in \mathbf{N}^* \right\},$
- (b) $A = \left\{ \frac{n+2}{n}; n \in \mathbf{N}^* \right\},$
- (c) $A = \left\{ \frac{3n^2+1}{n^2}; n \in \mathbf{N}^* \right\},$
- (d) $A = \left\{ \frac{1}{n^2+1}; n \in \mathbf{N} \right\},$

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; dire se A è limitato superiormente, se A è limitato inferiormente, se A è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $(\mathbf{R}, \leq)$.

Risoluzione.

- (a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$; l'insieme A è quindi formato da punti che al crescere di n si avvicinano crescendo a 3 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:
 A non ammette massimo;
 A ammette minimo e $\min(A) = 2$;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = 3$;
 si ha $\inf(A) = 2$.
- (b) Si ha $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$. L'insieme A è fatto di infiniti punti che al crescere di n si avvicinano decrescendo a 1 senza mai raggiungerlo; quindi si ha:
 A ammette massimo e si ha $\max(A) = 3$;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = 3$;
 si ha $\inf A = 1$.
- (c) L'insieme A è l'immagine della successione $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.
 Si ha $\frac{3n^2+1}{n^2} = 3 + \frac{1}{n^2}$; quindi la successione $\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ è decrescente; si ha poi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = 3$ e $3 \notin A$; si ha quindi:
 A ammette massimo e si ha $\max(A) = 4$;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = 4$;
 si ha $\inf A = 3$.
- (d) L'insieme A è l'immagine della successione $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$.
 La successione $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ è decrescente; al crescere di n i punti $\frac{1}{n^2+1}$ si avvicinano decrescendo a 0 senza mai raggiungerlo; si ha quindi:
 A ammette massimo e si ha $\max(A) = 1$;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;

si ha $\sup(A) = 1$;
 si ha $\inf A = 0$.

3. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{x}; x \in]-\infty, 0[\right\};$$

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$.

Risoluzione. Posto

$$f :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x},$$

si ha $A = f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$. Quindi A non ammette massimo, A non ammette minimo, $\sup(A) = 0$, $\inf(A) = -\infty$.

4. **Esercizio.** Per ciascuno dei seguenti insiemi

- (a) $A = [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbf{Q}$,
- (b) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$,
- (c) $A = [0, \sqrt{2}] \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$,
- (d) $A =]-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$,

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; dire se A è limitato superiormente, se A è limitato inferiormente, se A è limitato; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Risoluzione.

- (a) Per ogni $x \in A$ si ha $\sqrt{2} < x \leq 2$; inoltre $2 \in A$; inoltre vi sono punti di A vicini come si vuole a $\sqrt{2}$; quindi si ha:
 A ammette massimo e $\max(A) = 2$;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = 2$;
 si ha $\inf(A) = \sqrt{2}$.
- (b) Per ogni $x \in A$ si ha $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; inoltre vi sono punti di A vicini come si vuole a $-\sqrt{2}$ e a $\sqrt{2}$; quindi si ha:
 A non ammette massimo;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
 si ha $\inf(A) = -\sqrt{2}$.

- (c) Per ogni $x \in A$ si ha $0 < x \leq \sqrt{2}$; inoltre $\sqrt{2} \in A$ e vi sono punti di A vicini come si vuole a 0; quindi si ha:
 A ammette massimo e si ha $\max(f) = \sqrt{2}$;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A è limitato inferiormente;
 A è limitato;
 si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
 si ha $\inf(A) = 0$.
- (d) Per ogni $x \in A$ si ha $x < \sqrt{2}$; inoltre $\sqrt{2} \notin A$ e vi sono punti di A vicini come si vuole a $\sqrt{2}$ e inferiori di un arbitrario numero reale; quindi si ha:
 A non ammette massimo;
 A non ammette minimo;
 A è limitato superiormente;
 A non è limitato inferiormente;
 A non è limitato;
 si ha $\sup(A) = \sqrt{2}$;
 si ha $\inf(A) = -\infty$.
5. **Esercizio.** Dare un esempio di un sottoinsieme di $\{x \in \mathbf{R}; x < -1\}$ dotato di estremo superiore in $(\mathbf{R}, \leq)$, ma non di massimo.
Risoluzione. $] -\infty, -2[$.
6. **Esercizio.** Determinare l'insieme dei maggioranti di $\mathbf{R}$ rispetto all'insieme ordinato $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.
Risoluzione. L'insieme dei maggioranti di $\mathbf{R}$ rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ è $\{+\infty\}$.
7. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione definita su $\{x \in \mathbf{R}; x \geq 1\}$ limitata inferiormente, ma non dotata di minimo.
Risoluzione. $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x}$.

1.2 Funzioni reali

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}.$$

Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}^*) =]0, +\infty[$; quindi si ha $\sup(f) = +\infty$, $\inf(f) = 0$.

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente in uno stesso sistema di assi i grafici di

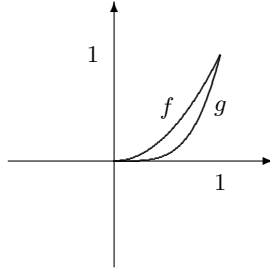
$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$$

e di

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^4$$

mettendo in evidenza il legame fra i grafici.

Risoluzione.



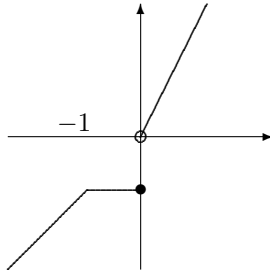
3. **Esercizio.** Sia

$$f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \leq -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) tracciare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'immagine di f ;
- (c) dire se f ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli;
- (d) dire se f è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata;
- (e) determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f rispetto a $(\overline{\mathbf{R}}, \leq)$.

Risoluzione.

- (a) Si ha



- (b) Si ha $f([-\infty, 1]) =]-\infty, -1] \cup]0, 2]$.
 - (c) f ammette massimo e $\max(f) = 2$; f non ammette minimo.
 - (d) f è limitata superiormente; f non è limitata inferiormente; f non è limitata.
 - (e) Si ha $\sup(f) = 2$, $\inf(f) = -\infty$.
4. **Esercizio.** Sia $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2$; determinare $f([-2, 0])$, provare che f è iniettiva e trovare la funzione inversa di f .

Risoluzione. Si ha $f([-2, 0]) = [0, 4]$.

Per $y \in [0, 4]$ e per ogni $x \in [-2, 0]$ si ha $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $f(x) = y$, cioè se e solo se $x^2 = y$; quindi si ha $x = \pm\sqrt{y}$; poichè $x \leq 0$, si ha $x = -\sqrt{y}$; ciò prova che f è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [0, 4] \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\sqrt{y}.$$

5. **Esercizio.** Sia $f : [-1, 0[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$; determinare $f([-1, 0[)$, provare che f è iniettiva e trovare la funzione inversa di f .

Risoluzione. Si ha $f([-1, 0[) = [1, +\infty[$.

Per $y \in [1, +\infty[$ e $x \in [-1, 0[$ si ha $f^{-1}(y) = x$ se e solo se $f(x) = y$, cioè se e solo se $\frac{1}{x^2} = y$; quindi si ha $x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$; poichè $x < 0$, si ha $x = -\frac{1}{\sqrt{y}}$; ciò prova che f è iniettiva e che si ha

$$f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

6. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$;

- (a) determinare l'immagine di f ;
- (b) dire se f è iniettiva.

Risoluzione.

- (a) L'immagine di f è l'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 = y$, ammette almeno una soluzione. L'equazione è equivalente a $x^2 - 3x + 2 - y = 0$; tale equazione ha soluzioni se e solo se $9 - 4(2 - y) \geq 0$, cioè se e solo se $y \geq -\frac{1}{4}$; l'immagine di f è quindi $[-\frac{1}{4}, +\infty[$.
- (b) La funzione f è iniettiva se e solo se per ogni y appartenente all'immagine di f l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 2 = y$ ammette una ed una sola soluzione. Sia $y \geq -\frac{1}{4}$; l'equazione sopra è equivalente a $x^2 - 3x + 2 - y = 0$; tale equazione per $y \neq -\frac{1}{4}$ ha due soluzioni; quindi f non è iniettiva.

7. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x}{2x+1}$;

- (a) determinare l'immagine di f ;
- (b) dire se f è iniettiva;
- (c) in caso affermativo, determinare f^{-1} .

Risoluzione.

- (a) L'immagine di f è l'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}, \frac{x}{2x+1} = y$, ammette almeno una soluzione.

È quindi anche uguale all'insieme delle $y \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2x+1} = y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array} \right.,$$

ammette almeno una soluzione.

L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

L'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x = (2x+1)y$, non ha la soluzione $x = -\frac{1}{2}$; quindi l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} x = (2x+1)y \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

è equivalente all'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$,

$$x = (2x+1)y,$$

quindi a $x = 2xy + y$; quindi a $(1-2x)y = y$.

Tale equazione ha soluzioni $x \in \mathbf{R}$ se e solo se $1-2y \neq 0$, cioè se e solo se $y \neq \frac{1}{2}$.

L'immagine di f è quindi $\mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

- (b) La funzione f è iniettiva se e solo se per ogni y appartenente all'immagine di f l'equazione di incognita $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, $\frac{x}{2x+1} = y$, ammette una ed una sola soluzione. Sia $y \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$; l'equazione sopra è equivalente all'equazione di incognita $x \in \mathbf{R}$, $x(1-2y) = y$; tale equazione ha una ed una sola soluzione $x = \frac{y}{1-2y}$. quindi f è iniettiva.

- (c) Si ha $f^{-1} : \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, $y \longrightarrow \frac{y}{1-2y}$.

1.3 Radici aritmetiche

1. **Esercizio.** Trovare un $m \in \mathbf{R}$ per cui

$$\frac{m+2}{\sqrt{m+3}}$$

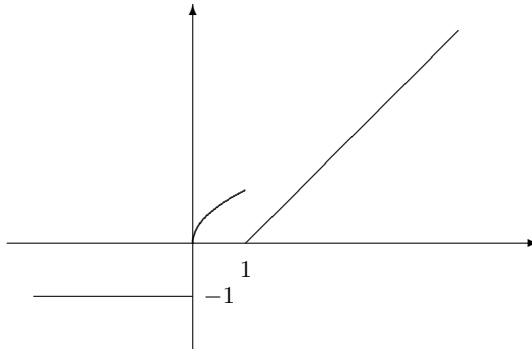
sia un numero razionale.

Risoluzione. Per $m = 1$ si ha $\frac{m+2}{\sqrt{m+3}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$; è quindi sufficiente scegliere $m = 1$.

2. **Esercizio.** Disegnare approssimativamente il grafico di

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{per } x > 1 \end{cases}.$$

Risoluzione.



1.4 Valore assoluto

1. **Esercizio.** Determinare i $t \in \mathbf{R}$ per i quali

$$(|t| - 1)^2$$

ammette reciproco.

Risoluzione. Il numero reale $(|t| - 1)^2$ ammette reciproco se e solo se $(|t| - 1)^2 \neq 0$, cioè se e solo se $|t| - 1 \neq 0$, cioè se e solo se $|t| \neq 1$, cioè se e solo se $t \neq 1$ e $t \neq -1$.

2. **Esercizio.** Trovare un $m \in \mathbf{N}$ in modo che

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto \frac{x^2 + x^{3m+1}}{|x|^m + 1}$$

sia una funzione pari.

Risoluzione. Affinchè f sia una funzione pari, è sufficiente che $3m + 1$ sia un numero pari; è allora sufficiente scegliere $m = 1$; dunque

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longmapsto \frac{x^2 + x^4}{|x| + 1}$$

è una funzione pari.

1.5 Polinomi

1. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi:

(a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 3) : (x^2 + x + 1);$

(b) $(x^4 - 5x^3 - 4x + 3) : (x^2 - 1);$

(c) $(x^3 + 7x^2 + 3x + 1) : (x + 2).$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 2x^4 & -3x^3 & +2x^2 & -x & +3 \\
 -2x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & \\
 \hline
 & -5x^3 & & -x & +3 \\
 & 5x^3 & 5x^2 & 5x & \\
 \hline
 & & 5x^2 & 4x & +3 \\
 & & -5x^2 & -5x & -5 \\
 \hline
 & & & -x & -2
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^2 + x + 1 \\
 \hline
 2x^2 - 5x + 5 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{array}
 .$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = 2x^2 - 5x + 5$ e $R(x) = -x - 2$.

(b) Si ha

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 x^4 & -5x^3 & & -4x & +3 \\
 -x^4 & & +x^2 & & \\
 \hline
 & -5x^3 & +x^2 & -4x & +3 \\
 & 5x^3 & & -5x & \\
 \hline
 & & x^2 & -9x & +3 \\
 & & -x^2 & & +1 \\
 \hline
 & & & -9x & +4
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^2 - 1 \\
 \hline
 x^2 - 5x + 1 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{array}
 .$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ e $R(x) = -9x + 4$.

(c) Si ha

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrr}
 1 & 7 & 3 & \\
 -2 & & -2 & -10 \\
 \hline
 & 1 & 5 & -7
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 -1 \\
 \hline
 14 \\
 \hline
 15
 \end{array}
 \end{array}
 .$$

Quindi, indicato con $Q(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto, si ha $Q(x) = x^2 + 5x - 7$ e $R(x) = 15$.

2. **Esercizio.** Determinare il quoziente ed il resto della divisione fra polinomi utilizzando la regola di Ruffini:

(a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$;(b) $(x^4 - x^2 + x) : (x + 2)$.**Risoluzione.**

(a) Si ha:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{rrrrr}
 2 & -3 & 2 & -5 & 3 \\
 1 & & 2 & -1 & 1 \\
 \hline
 & 2 & -1 & 1 & -4
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 3 \\
 \hline
 -4 \\
 \hline
 -1
 \end{array}
 \end{array}
 .$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$ e $R(x) = -1$.

(b) Si ha:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -5 & 10 \end{array}.$$

Quindi se $Q(x)$ è il quoziente e $R(x)$ è il resto, si ha $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ e $R(x) = 10$.

1.6 Equazioni

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni polinomiali e determinare la molteplicità delle radici del polinomio:

- (a) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$;
- (b) $30x^3 - 7x^2 - 7x + 2 = 0$;
- (c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Risoluzione.

(a) Si ha $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$. Quindi le radici sono $x = 1$ e $x = -2$; $x = 1$ è radice semplice, $x = -2$ è radice doppia.

(b) Sia $A(x) = 30x^3 - 7x^2 - 7x + 2$. Le radici razionali di $A(x)$ sono fra i numeri razionali $\frac{p}{q}$ con p divisore intero di 2 e q divisore intero di 30.

I divisori interi di 2 sono ± 1 e ± 2 ; i divisori interi di 30 sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$.

Si trova $A(-\frac{1}{2}) = 0$; quindi $-\frac{1}{2}$ è radice di $A(x)$.

Il quoziente della divisione $A(x) : (x + \frac{1}{2})$ è $30x^2 - 22x + 4$.

Si ha quindi

$$A(x) = (30x^2 - 22x + 4)(x + \frac{1}{2}) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1).$$

L'equazione $15x^2 - 11x + 2 = 0$ ha soluzioni $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{2}{5}$; si ha quindi $15x^2 - 11x + 2 = 15(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{5}) = (3x - 1)(5x - 2)$.

Si ha quindi $A(x) = (15x^2 - 11x + 2)(2x + 1) = (3x - 1)(5x - 2)(2x + 1)$.

Le radici dell'equazione sono quindi $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$. Le tre del polinomio sono tutte semplici.

(c) Si ha $x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$; quindi si ha $x^2 = 9$ o $x^2 = 4$; quindi si ha $x = \pm 3$ o $x = \pm 2$. Le radici del polinomio sono tutte semplici.

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

- (a) $\sqrt{x^2 + 1} = 3x - 1$;
- (b) $\sqrt{x} = x - 2$;
- (c) $\sqrt{x + 1} = x$.

Risoluzione.

- (a) Il dominio dell'equazione è $\mathbf{R}$. Si ha: $\sqrt{x^2+1} = 3x-1$ se e solo se
- $$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2+1 = (3x-1)^2 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x^2+1 = 9x^2-6x+1 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a}$$

$$\begin{cases} 8x^2-6x=0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x=0 \text{ o } x=\frac{3}{4} \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{cioè a } x=\frac{3}{4}.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 3x-1 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni.

Quindi per l'equazione assegnata si trova $x = \frac{3}{4}$.

- (b) L'equazione si scrive $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \end{cases}$; quindi equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni; quindi l'equazione equi-

vale a $\begin{cases} \sqrt{x} = x-2 \\ x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x = x^2-4x+4 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x \geq 2 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x=1 \text{ o } x=4 \\ x \geq 2 \end{cases},$$

cioè a $x=4$.

- (c) L'equazione si scrive $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ non ammette alcuna soluzione.

L'equazione assegnata è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x+1 = x^2 \\ x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{cioè a } \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{cioè a}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{cioè a } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Si trova quindi $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni:

- (a) $x^2 + 2|x + 1| - 1 = 0$;
- (b) $|x + 1| = 3$;
- (c) $|x^2 + x - 1| = 3$;
- (d) $\frac{|x^2 - 1|}{x} = x + 1$;
- (e) $|x + 1| = x$.

Risoluzione.

(a) L'equazione equivale a

$$\begin{cases} x^2 + 2|x + 1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 + 2|x + 1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Si ha $\begin{cases} x^2 + 2|x + 1| - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x^2 + 2(x + 1) - 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ cioè $x = -1$.

Si ha $\begin{cases} x^2 + 2|x + 1| - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x^2 - 2(x + 1) - 1 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x < -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2 \\ x < -1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 3 \text{ o } x = -1 \\ x < -1 \end{cases}$ e quindi mai.

Quindi l'equazione ha una sola soluzione data da $x = -1$.

(b) Si ha $|x + 1| = 3$ se e solo se $x + 1 = \pm 3$, cioè $x = -4$ o $x = 2$.

(c) L'equazione è equivalente a $x^2 + x - 1 = \pm 3$.

L'equazione $x^2 + x - 1 = 3$ è equivalente a $x^2 + x - 4 = 0$, cioè a $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

L'equazione $x^2 + x - 1 = -3$ è equivalente a $x^2 + x + 2 = 0$; il polinomio $x^2 + x + 2$ ha discriminante $\Delta = -7 < 0$; quindi l'equazione $x^2 + x + 2 = 0$ non ha soluzioni.

Quindi l'equazione assegnata ha soluzioni. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(d) L'equazione è assegnata per $x \neq 0$. L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x} = x + 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x} = x + 1 \\ x^2 - 1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x} = x + 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x^2 - 1 = x^2 + x \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x = -1 \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x = -1.$$

Il sistema $\begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = x+1 \\ x^2-1 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 1-x^2 = x^2+x \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2+x-1=0 \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

cioè a $\begin{cases} x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{2} \\ -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, cioè a $x = \frac{1}{2}$.

L'equazione assegnata è quindi equivalente a $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$.

(e) L'equazione è equivalente a

$$\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x+1 = x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}; \text{ poichè } 1 = 0 \text{ è falsa, tale sistema non ammette soluzioni.}$$

Il sistema $\begin{cases} |x+1| = x \\ x+1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} -x-1 = x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} 2x = -1 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x < -1 \end{cases}; \text{ poichè non è } -\frac{1}{2} < -1, \text{ tale sistema non ammette alcuna soluzione.}$$

Quindi l'equazione assegnata non ammette soluzioni.

1.7 Disequazioni

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni polinomiali:

(a) $x + 5 < 4x + 2$;

(b) $x^2 - x + 1 > 0$;

(c) $\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases};$

Risoluzione.

(a) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R}$. Si ha:

$$x + 5 < 4x + 2 \text{ se e solo se } -3x < -3, \text{ se e solo se } x > 1.$$

(b) Il polinomio $x^2 - x + 1$ ha discriminante $\Delta = -3 < 0$; quindi la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$.

(c) Il sistema di disequazioni equivale a $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 2 \text{ o } x > 3 \end{cases}$. Quindi si ha $1 < x < 2$.

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni fratte:

(a) $\frac{x+4}{x-3} < 2$;

(b) $\frac{2x+5}{3x-1} > 4$.

Risoluzione.

(a) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R} - \{3\}$. Sia $x \neq 3$. Si ha:

$$\frac{x+4}{x-3} < 2 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{x+4-2x+6}{x-3} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{-x+10}{x-3} < 0 \text{ se e solo se}$$

$$x < 3 \text{ o } x > 10.$$

(b) Il dominio della disequazione è $\mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$. Sia $x \neq \frac{1}{3}$. Si ha:

$$\frac{2x+5}{3x-1} > 4 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{2x+5}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{2x+5-12x+4}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{-10x+9}{3x-1} - 4 > 0 \text{ se e solo se}$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{9}{10}.$$

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

(a) $\sqrt{x+2} > x$.

(b) $\sqrt{x^2-3x+2} > x-1$;

(c) $\sqrt{x^2-3x+2} > x-3$;

(d) $\sqrt{x^2-9} > x$;

(e) $x < \sqrt{-x^2+1}$;

(f) $x+1 > \sqrt{-x^2-2x}$;

(g) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{x}$;

(h) $\frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$;

Risoluzione.

(a) Tenendo conto della condizione sul dominio della disequazione, la disequa-

zione è soddisfatta se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Si ha $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x+2 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Il polinomio $x^2 - x - 2$ ha discriminante $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$; il polinomio ammette quindi le radici $x = \frac{1 \pm 3}{2}$, cioè $x = -1$ o $x = 2$.

Si ha quindi $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} -1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $0 \leq x < 2$.

Si ha $\begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ se e solo se $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè se e solo se $-2 \leq x < 0$.

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-2 \leq x < 2.$$

(b) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 1)^2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -3x + 2 > -2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}; \text{ quindi non ammette alcuna soluzione.}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{equivale a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 1 \end{cases} \quad \text{cioè a } x < 1.$$

Quindi la disequazione data equivale a $x < 1$.

(c) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 3)^2 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > (x - 3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > x^2 - 6x + 9 \\ x \geq 3 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 3x > 7 \\ x \geq 3 \end{cases}, \begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \geq 3 \end{cases}, \text{ cioè a } x \geq 3.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 3 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases}, \text{ cioè a } x \leq 1 \text{ o } 2 \leq x < 3.$$

Quindi la disequazione data equivale a $x \leq 1$ o $x \geq 2$.

(d) La disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 9 > x^2 \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -9 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases};$$

quindi nessuna soluzione.

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} > x \\ x^2 - 9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } x \leq -3.$$

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $x \leq -3$.

- (e) La disequazione si scrive $\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a $\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$.

Il sistema

$$\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} x^2 < -x^2+1 \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{cases} x < \sqrt{-x^2+1} \\ -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} -x^2+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } -1 \leq x < 0.$$

La disequazione assegnata è quindi equivalente a $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- (f) La disequazione si scrive $\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \end{cases}$ ed è equivalente a $\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$.

Il sistema

$$\begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} (x+1)^2 > -x^2-2x \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2+2x+1 > -x^2-2x \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2+4x+1 > 0 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ o } x > \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0.$$

$$\text{Il sistema } \begin{cases} x+1 > \sqrt{-x^2-2x} \\ -x^2-2x \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \text{ non ammette soluzioni.}$$

La disequazione assegnata è quindi equivalente a $\frac{-2+\sqrt{2}}{2} < x \leq 0$.

- (g) La disequazione è assegnata per $x \in \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè tale che } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases};$$

quindi per $-1 < x < 0$ o $x > 0$.

Per $-1 < x < 0$ la disequazione è soddisfatta.

Supponiamo $x > 0$. La disequazione è equivalente a $\sqrt{x+1} < x$, quindi a $x+1 < x^2$; quindi a $x^2 - x - 1 > 0$.

Il polinomio $x^2 - x - 1$ ha discriminante $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$; il polinomio ammette quindi le radici $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

La disequazione $x^2 - x - 1 > 0$ è quindi soddisfatta per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; quindi, essendo $x > 0$, se e solo se $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La disequazione assegnata è quindi soddisfatta se e solo se

$$-1 < x < 0 \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(h) La disequazione è assegnata per

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè per } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{ cioè per } 0 < x < 1 \text{ o } x > 1.$$

Supponiamo $0 < x < 1$; si ha $1 - \sqrt{x} > 0$ e $1 - x > 0$; l'equazione è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\sqrt{x}} > \frac{1}{x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 1 - \sqrt{x} < x \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} \sqrt{x} > 1 - x \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > (1-x)^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 1 - 2x + x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$\text{cioè a } \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1.$$

Per $x > 1$ si ha $1 - \sqrt{x} < 0$; quindi la disequazione non è soddisfatta in quanto $\frac{1}{1-\sqrt{x}} < 0$ e $\frac{1}{x} > 0$.

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$.

4. **Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $|x+1| > 2x+3$;

(b) $\frac{|x|+1}{x-1} > x+1$;

(c) $|x-3| < 2$;

(d) $x|x+1| > x$;

(e) $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2}$;

(f) $\frac{x}{x-2} > |x-2|$.

Risoluzione.

(a) La disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 < 0 \end{cases}.$$

Risolviamo $\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x+1 > 2x+3 \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -1 \end{cases};$$

quindi il sistema non ammette alcuna soluzione.

Risolviamo $\begin{cases} |x+1| > 2x+3 \\ x+1 < 0 \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -(x+1) > 2x+3 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} -x-1 > 2x+3 \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 3x < -4 \\ x < -1 \end{cases},$$

$$\text{cioè a } \begin{cases} x < -\frac{4}{3} \\ x < -1 \end{cases}, \text{ cioè a } x < -\frac{4}{3}.$$

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a $x < -\frac{4}{3}$.

(b) Si ha $x \neq 1$.

La disequazione equivale a $\frac{|x|+1}{x-1} - (x+1) > 0$, cioè a $\frac{|x|+1-(x^2-1)}{x-1} > 0$,
cioè a $\frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0$, cioè a

$$\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} \frac{-x^2+x+2}{x-1} > 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x < -1 \text{ o } 1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } 1 < x < 2.$$

Il sistema $\begin{cases} \frac{-x^2+|x|+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} \frac{-x^2-x+2}{x-1} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } x < -2.$$

Quindi la disequazione assegnata è equivalente a

$$x < -2 \text{ o } 1 < x < 2.$$

(c) La disequazione equivale a $-2 < x-3 < 2$, cioè a $1 < x < 5$.

(d) La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} x(x+1) > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x^2+x > x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } -1 \leq x < 0$$

o $x > 0$.

Il sistema $\begin{cases} x|x+1| > x \\ x+1 < 0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} x(-x-1) > x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -x^2 - x > x \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ x < -1 \end{cases}$, cioè a $-2 < x < -1$.

Quindi la disequazione assegnata equivale a $-2 < x < 0$ o $x > 0$.

(e) La disequazione è assegnata per $x \neq 1$; si scrive dunque $\begin{cases} \frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$;

essa è equivalente a $\begin{cases} |x-1| < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$, cioè a $-1 < x < 1$ o $1 < x < 3$.

(f) La disequazione è assegnata per $x \neq 2$; supposto $x \in \mathbf{R}$ e $x \neq 2$ risolviamo la disequazione in due modi

i. *Modo 1* Si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2|$$

se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x > 2 \end{cases} & \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > x-2 \\ x > 2 \end{cases} & \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} \frac{x}{x-2} - x + 2 > 0 \\ x > 2 \end{cases} & \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x-x^2+4x-4}{x-2} > 0 \\ x > 2 \end{cases} & \text{ se e solo se} \\ & \begin{cases} \frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0 \\ x > 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Tenendo conto della condizione $x > 2$, se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} 1 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{se e solo se}.$$

$$2 < x < 4.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{x-2} > |x-2| \\ x < 2 \end{cases} & \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x}{x-2} > -x+2 \\ x < 2 \end{cases} & \text{ se e solo se} \\ \begin{cases} \frac{x}{x-2} + x - 2 > 0 \\ x < 2 \end{cases} & \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x+x^2-4x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases} & \text{ se e solo se} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Tenendo conto della condizione $x < 2$, se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; quindi la disequazione $x^2 - 3x + 4 < 0$ non è mai soddisfatta. Quindi il sistema 8

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

La disequazione assegnata è quindi equivalente a

$$2 < x < 4.$$

ii. *Modo 2* Si ha

$$\frac{x}{x-2} > |x-2| \text{ se e solo se } |x-2| < \frac{x}{x-2} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} x-2 < \frac{x}{x-2} \\ x-2 > -\frac{x}{x-2} \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x-2 - \frac{x}{x-2} > 0 \\ x-2 + \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2-x}{x-2} < 0 \\ \frac{(x-2)^2+x}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases}.$$

Il polinomio $x^2 - 5x + 4$ ha radici 1 e 4; quindi $x^2 - 5x + 4 > 0$ se e solo se $x < 1$ o $x > 4$; si ha quindi $\frac{x^2-5x+4}{x-2} < 0$ se e solo se $x < 1$ o $2 < x < 4$.

Il polinomio $x^2 - 3x + 4$ ha discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$; quindi $x^2 - 3x + 4 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; si ha quindi $\frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0$ se e solo se $x > 2$.

Quindi si ha

$$\begin{cases} \frac{x^3-5x+4}{x-2} < 0 \\ \frac{x^2-3x+4}{x-2} > 0 \end{cases} \text{ se e solo se } \begin{cases} x < 1 \text{ o } 2 < x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \text{ se e solo se}$$

$$2 < x < 4.$$

1.8 Dominio naturale di funzioni

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

- (a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}$;
 (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x}}$;
 (c) $f(x) = \sqrt{|x|-1}$;
 (d) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$.

Risoluzione.

- (a) Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale a $\begin{cases} x \geq 1 \text{ o } x \leq -1 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} \neq \sqrt{x} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 \neq x \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$1 \leq x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ o } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = [1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[\cup] \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty[.$$

- (b) Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Il sistema equivale a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \text{ o } x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2} \neq \sqrt{x} \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - 2 \neq x \end{cases}$, cioè a

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \neq 2 \text{ e } x \neq -1 \end{cases}, \text{ cioè a } \sqrt{2} \leq x < 2 \text{ o } x > 2.$$

Quindi si ha

$$\text{dom}(f) = [\sqrt{2}, 2[\cup]2, +\infty[.$$

- (c) Il dominio naturale di f è dato dalle $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x| - 1 \geq 0$, cioè tali che $|x| \geq 1$, cioè tali che $x \leq -1$ o $x \geq 1$. Quindi si ha

$$\text{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

- (d) Il dominio naturale di f è dato dalle $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x| - 1 \neq 0$, cioè tali che $|x| \neq 1$, cioè tali che $x \neq -1$ e $x \neq 1$. Quindi si ha

$$\text{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Capitolo 2

Numeri complessi

2.1 Parte reale, parte immaginaria, modulo

1. **Esercizio.** Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

- (a) $\frac{1}{i}$;
- (b) $-\frac{1}{i}$;
- (c) $\frac{1-i}{1+7i} - 5i$;
- (d) $1 - \frac{1}{i}$;
- (e) $i - \frac{1}{i}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{1}{i} = -i$; quindi si ha $\Re(\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(\frac{1}{i}) = -1$.
- (b) Si ha $-\frac{1}{i} = i$; quindi si ha $\Re(-\frac{1}{i}) = 0$, $\Im(-\frac{1}{i}) = 1$.
- (c) Si ha
$$\frac{1-i}{1+7i} - 5i = \frac{(1-i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} - 5i = \frac{1-7i-i-7}{1+49} - 5i = \frac{-6-8i}{50} - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i - 5i = -\frac{3}{25} - \frac{129}{25}i.$$
Si ha quindi $\Re(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{3}{25}$ e $\Im(\frac{1-i}{1+7i} - 5i) = -\frac{129}{25}$.
- (d) Si ha $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$. Si ha quindi $\Re(1 - \frac{1}{i}) = 1$ e $\Im(1 - \frac{1}{i}) = 1$.
- (e) Si ha $i - \frac{1}{i} = i + i = 2i$. Si ha quindi $\Re(i - \frac{1}{i}) = 0$ e $\Im(i - \frac{1}{i}) = 2$.

2. **Esercizio.** Determinare la parte reale, la parte immaginaria e il modulo dei seguenti numeri complessi:

- (a) $\frac{1}{1-i}$;

(b) $\frac{2+i}{3+i}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Quindi si ha $\Re z = \frac{1}{2}$, $\Im z = \frac{1}{2}$, $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Si ha $\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i+3i+1}{9+1} = \frac{7+i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$.

Si ha quindi

$$\Re\left(\frac{2+i}{3+i}\right) = \frac{7}{10}, \quad \Im\left(\frac{2+i}{3+i}\right) = \frac{1}{10} \text{ e}$$

$$\left|\frac{2+i}{3+i}\right| = \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

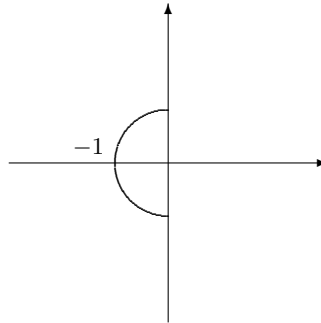
2.2 Rappresentazione di sottoinsiemi di $\mathbf{C}$

1. Esercizio.

Disegnare

$$A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1, \Re z < 0\}.$$

Risoluzione.



Capitolo 3

Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$

3.1 Componenti di una funzione vettoriale

1. **Esercizio.** Determinare le componenti della funzione $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ che a $t \in \mathbf{R}$ fa corrispondere il punto intersezione della retta di equazione

$$5x + 7y - 2 = 0$$

con la retta di equazione

$$y = t .$$

Risoluzione. Il valore $f(t)$ è la soluzione del sistema $\begin{cases} 5x + 7y - 2 = 0 \\ y = t \end{cases}$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = t \\ 5x = 2 - 7t \end{cases} , \text{ cioè a } \begin{cases} y = t \\ x = \frac{2-7t}{5} \end{cases} .$$

Quindi si ha $f(t) = (\frac{2-7t}{5}, t)$; quindi

$$f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow \frac{2-7t}{5} ,$$

$$f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, t \longrightarrow t .$$

3.2 Prodotto scalare e norma

1. **Esercizio.** Calcolare:

- (a) $((1, 4, 3, 2)|(-1, 2, -3, 1))$;
- (b) $((1, 2, -1, 4)|(5, 3, 1, -2))$;
- (c) $(3(5, 2, 1, 4) | -(3, 1, -2, 4))$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $((1, 4, 3, 2) | (-1, 2, -3, 1)) = -1 + 8 - 9 + 2 = 0$.
 (b) Si ha $((1, 2, -1, 3) | (4, 1, 5, 6)) = 4 + 2 - 5 + 18 = 19$.
 (c) Si ha $((3(5, 2, 1, 4) | -(3, 1, -2, 4)) = ((15, 6, 3, 12) | (-3, -1, 2, -4)) = -45 - 6 + 6 - 48 = -93$.

2. **Esercizio.** Determinare il valore della seguente espressione:

$$\|2(4, 1, -2, -3) + (5, 7, -1, 2)\|.$$

Risoluzione. Si ha

$$\|2(4, 1, -2, -3) + (5, 7, -1, 2)\| = \|(8, 2, -4, -6) + (5, 7, -1, 2)\| = \|(13, 9, -5, 4)\| = \sqrt{169 + 81 + 25 + 16} = \sqrt{291}.$$

3. **Esercizio.** Dire quali delle seguenti espressioni hanno significato; di queste calcolarne il valore:

- (a) $\|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\|$;
 (b) $7 - (1, 2, 3)$;
 (c) $\frac{(3, 1, 4)}{(4, 5, 3)}$.

Risoluzione.

- (a) L'espressione $\|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\|$ ha significato e si ha $\|2(3, 1, 2)\| + \|(1, 2, 3)\| = 2\sqrt{9 + 1 + 4} + \sqrt{1 + 4 + 9} = 2\sqrt{14} + \sqrt{14} = 3\sqrt{14}$.
 (b) L'espressione $7 - (1, 2, 3)$ non ha significato.
 (c) L'espressione $\frac{(3, 1, 4)}{(4, 5, 3)}$ non ha significato.

3.3 Distanza

1. **Esercizio.** Calcolare la distanza

- (a) $d((1, 5, 3, 4), (0, 2, 1, 6))$;
 (b) $d((3, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 2))$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $d((1, 5, 3, 4), (0, 2, 1, 6)) = \|(1, 5, 3, 4) - (0, 2, 1, 6)\| = \|(1, 3, 2, -2)\| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
 (b) Si ha $d((3, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 2)) = \|(3, 1, 4, 5) - (2, 1, 4, 2)\| = \|(1, 0, 0, 3)\| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Capitolo 4

Topologia di $\mathbf{R}^N$

4.1 Intorni in $\mathbf{R}^N$

1. **Esercizio.** Dare un esempio di un intorno U in $\mathbf{R}$ di 1 tale che $1 + \frac{1}{2} \notin U$.

Risoluzione. $U =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

2. **Esercizio.** Sia

$$A = \left\{ -\frac{1}{n} + 1; n \in \mathbf{N}^* \right\};$$

- (a) determinare $\overset{\circ}{A}$ e dire se A è aperto;
- (b) determinare $\overline{A}$ e dire se A è chiuso;
- (c) determinare $\text{Fr}(A)$;
- (d) determinare l'insieme dei punti isolati di A .

Risoluzione.

- (a) Si ha $\overset{\circ}{A} = \emptyset$; quindi A non è aperto.
- (b) Si ha $\overline{A} = A \cup \{1\}$; poichè $1 \notin A$, A non è chiuso.
- (c) Si ha $\text{Fr}(A) = A \cup \{1\}$.
- (d) Ogni punto di A è punto isolato.

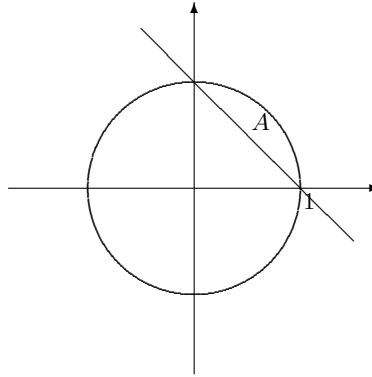
4.2 Insiemi aperti ed insiemi chiusi

1. **Esercizio.** Disegnare nel piano l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y > 1\};$$

dire se A è aperto; dire se A è chiuso; determinare $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\text{Fr}(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A .

Risoluzione. Si ha:



L'insieme A non è aperto; l'insieme A non è chiuso; si ha:

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\},$$

$$\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\},$$

$$\text{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 1\} \cup$$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y = 1\};$$

l'insieme dei punti isolati di A è l'insieme vuoto.

4.3 Gli spazi topologici $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}_{(+)}$ e $\mathbf{R}_{(-)}$

1. **Esercizio.** Trovare, per lo spazio topologico $\overline{\mathbf{R}}$, un intorno di $+\infty$ diverso da $\overline{\mathbf{R}}$ e contenente $\mathbf{N}$.

Risoluzione. Un intorno di $+\infty$, diverso da $\overline{\mathbf{R}}$ e contenente $\mathbf{N}$ è $[0, +\infty[$.

4.4 Funzioni continue

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow (\text{sgn } x)x ;$$

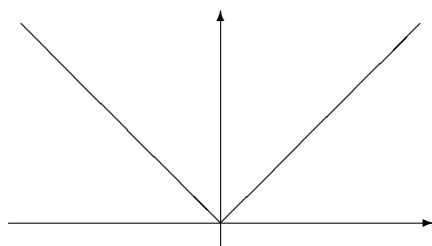
- (a) disegnare il grafico di f ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

Risoluzione.

- (a) Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

quindi f è la funzione valore assoluto; il grafico di f è quindi



(b) La funzione è continua in ogni $x \in \mathbf{R}$.

2. **Esercizio.** Dire se

$$f : [0, 27] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^4 + 1}$$

ammette massimo e se ammette minimo, spiegandone il motivo.

Risoluzione. Poichè f è continua e poichè $\text{dom}(f)$ è compatto, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.

3. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

(a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1,$

(b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + 1},$

dire se l'equazione di incognita x

$$f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$ tali che nell'intervallo $]a, b[$ vi sia almeno una soluzione dell'equazione.

Risoluzione.

(a) Si ha $f(0) = 1 > 0$, $f(-3) = -54 + 27 + 15 + 1 = -11 < 0$; quindi per il teorema del valor intermedio esiste $x \in]-3, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

(b) Si ha $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$ e $f(-2) = -\frac{1}{17} < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-2, -1[$ tale che $f(x) = 0$.

4.5 Limiti

(a) **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x - 5};$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x);$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 1});$

- v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x);$
vi. $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{5x+3}{x^2-1};$
vii. $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{5x+3}{x^2-1}.$

Risoluzione.

i. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x^2+2x-1}{2x^3+3x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty.$$

ii. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} &= \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

iii. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

iv. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-1}) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

v. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} &= 0. \end{aligned}$$

- vi. Si ha
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{5x+3}{x^2-1} \right| = +\infty$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow 1^-} (5x+3) = 8$; per il teorema della permanenza del segno la funzione $5x+3$ è positiva in un intorno sinistro di 1.
 Si ha $x^2-1 > 0$ se e solo $x < -1$ o $x > 1$ e $x^2-1 < 0$ se e solo se $-1 < x < 1$; quindi la funzione x^2-1 è negativa in un intorno sinistro di 1.
 Quindi la funzione $\frac{5x+3}{x^2-1}$ è negativa in un intorno sinistro di 1.
 Si ha quindi $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x+3}{x^2-1} = -\infty$.
- vii. Si ha
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left| \frac{5x+3}{x^2-1} \right| = +\infty$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow 1^+} (5x+3) = 8$; per il teorema della permanenza del segno la funzione $5x+3$ è positiva in un intorno destro di 1.
 Si ha $x^2-1 > 0$ se e solo $x < -1$ o $x > 1$ e $x^2-1 < 0$ se e solo se $-1 < x < 1$; quindi la funzione x^2-1 è positiva in un intorno destro di 1.
 Quindi la funzione $\frac{5x+3}{x^2-1}$ è positiva in un intorno destro di 1.
 Si ha quindi $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x+3}{x^2-1} = +\infty$.

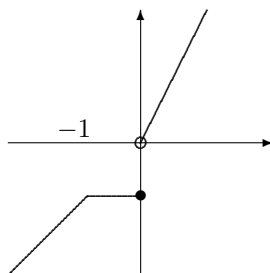
4. **Esercizio.** Sia

$$f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x & \text{per } x \leq -1 \\ -1 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases} ;$$

- (a) tracciare approssimativamente il grafico di f ;
 (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

Risoluzione.

- (a) Si ha



- (b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup] 0, 1]$.

Consideriamo il punto -1 .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1^-, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-, x \in]-\infty, -1[} x = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+, x \in]-1, 0]} -1 = -1.$$

Si ha quindi $\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} f(x) = -1$.

Si ha $f(-1) = -1$.

Quindi f è continua in -1 .

Consideriamo il punto 0 .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \in]-1, 0[} -1 = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \in]0, 1]} 2x = 0.$$

Quindi f non è convergente; Quindi f non è continua in 0 .

L'insieme dei punti ove f è continua è quindi $] -\infty, 0[\cup]0, 1]$.

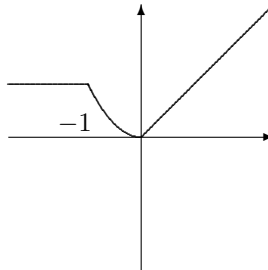
5. **Esercizio.** Assegnata la funzione

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq -1 \\ x^2 & \text{per } -1 < x < 0 \\ x & \text{per } x > 0 \end{cases},$$

- (a) tracciare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua.

Risoluzione.

- (a) Si ha



- (b) Per il carattere locale della continuità f è continua su $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup]0, 1]$.

Consideriamo il punto -1 .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1-, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-, x \in]-\infty, -1[} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1+, x \neq -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+, x \in]-1, 0]} x^2 = 1.$$

Si ha quindi $\lim_{x \rightarrow -1, x \neq -1} f(x) = 1$.

Si ha $f(-1) = 1$.

Quindi f è continua in -1 .

Consideriamo il punto 0 .

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \in]-1, 0[} x^2 = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \in]0, +\infty[} x = 0.$$

Si ha quindi $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 0$.

Si ha $f(0) = 0$.

Quindi f è continua in 0.

L'insieme dei punti ove f è continua è quindi $\mathbf{R}$.

Capitolo 5

Confronto asintotico

5.1 Confronto asintotico

1. **Esercizio.** Trovare un $p \in \mathbf{Z}$ tale che:

- (a) $x^3 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{p-4}$;
- (b) $\frac{1}{x^{4p+1}} \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$;

giustificare il risultato.

Risoluzione.

- (a) Si ha $x^3 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{p-4}$ se e solo se $3 < p - 4$, cioè se e solo se $p > 7$. Si può quindi scegliere $p = 8$.
- (b) Si ha $\frac{1}{x^{4p+1}} \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$ se e solo se $x^{-(4p+1)} \ll_{x \rightarrow 0} x^{-3}$, cioè se e solo se $-4p - 1 > -3$, cioè se e solo se $-4p > -2$, cioè se e solo se $p < \frac{1}{2}$. Si può quindi scegliere $p = 0$.

2. **Esercizio.** Determinare i $p \in \mathbf{Z}$ tale che:

- (a) $x^5 + 3x^2 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$;
- (b) $x^5 + 2x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$;
- (c) $x^4 - 3x \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$;

giustificare il risultato.

Risoluzione.

- (a) Si ha $x^5 + 3x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^5$; quindi si ha $x^5 + 3x^2 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$ se e solo se $x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^{3p-1}$, cioè se e solo se $5 < 3p - 1$, cioè se e solo se $6 < 3p$, cioè se e solo se $p > 2$.
- (b) Si ha $x^5 + 2x^2 \sim_{x \rightarrow 0} 2x^2$; quindi si ha $x^5 + 2x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$ se e solo se $x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x^{3p-2}$, cioè se e solo se $2 > 3p - 2$, cioè se e solo se $4 > 3p$, cioè se e solo se $p < \frac{4}{3}$.

- (c) Si ha $x^4 - 3x \sim_{x \rightarrow -\infty} x^4$; quindi si ha $x^4 - 3x \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$ se e solo se $x^4 \ll_{x \rightarrow -\infty} x^{2p-4}$, cioè se e solo se $4 < 2p-4$, cioè se e solo se $2p > 8$, cioè se e solo se $p > 4$.

3. **Esercizio.** Determinare gli $a \in \mathbf{R}$ e i $p \in \mathbf{Z}$ tali che

- (a) $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} (a-2)x^{p+3}$,
 (b) $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a+1)x^{p-1} + 3ax + 2$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} 1$; quindi si ha $x^3 + x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} (a-2)x^{p+3}$ se e solo se $1 \sim_{x \rightarrow 0} (a-2)x^{p+3}$, cioè se e solo se $p+3 = 0$ e $a-2 = 1$, cioè se e solo se $p = -3$ e $a = 3$.
 (b) Si ha $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2$; quindi si ha $x^2 + 3x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a+1)x^{p-1} + 3ax + 2$ se e solo se $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a+1)x^{p-1} + 3ax + 2$. Perchè ciò accada deve essere $p-1 = 2$, cioè $p = 3$; deve inoltre essere $a+1 \neq 0$, cioè $a \neq -1$. Supponiamo $p = 3$ e $a \neq -1$; si ha allora $(a+1)x^{p-1} + 3ax + 2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a+1)x^2$; si ha quindi $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} (a+1)x^2$, cioè se e solo se $a+1 = 1$, cioè se e solo se $a = 0$. Si trova dunque $p = 3$ e $a = 0$.

5.2 Principio di sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}}$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$.
 (b) Si ha $\frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{-3\sqrt{x}} = -\frac{1}{3}$. Quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}+2x}{2x^2-3\sqrt{x}} = -\frac{1}{3}$.

5.3 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow +\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

- (a) $f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x-3}$;
 (b) $f(x) = \sqrt{x^2-x+2}$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x^2-3x} = 2.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+x+3}{x-3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+3}{x-3} = 7.$$

Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow +\infty$ e l'asintoto a f per $x \rightarrow \infty$ è la retta $y = 2x + 7$.

(b) Si ha

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 1; \text{ quindi si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} = 1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x+2} - x &= \frac{(\sqrt{x^2-x+2}-x)(\sqrt{x^2-x+2}+x)}{\sqrt{x^2-x+2}+x} = \frac{x^2-x+2-x^2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} = \\ &= \frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2}+x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow +\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$ è la retta

$$y = x - \frac{1}{2}.$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow -\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$;

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2}$;

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}+x)(\sqrt{x^2-x}-x)}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-2x} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = -x + \frac{1}{2}$.

(b) Nell'equivalenza che segue possiamo supporre $x < 0$; si ha

$$\frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6}}{x^2} = \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{x^2} = \frac{|x^3|}{x^2} = \frac{-x^3}{x^2} = -x$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^6+x^5+1}}{x^2} + x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}+x^3}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}+x^3}{x^2} \frac{\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2}{\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6+x^5+1-x^6}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1}-x^2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{x^2(\sqrt{x^6+x^5+1}-x^3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{-2x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$.

(c) Si ha

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \sim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3} = x$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1+x^2})}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^2+x+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+x+1)^2+x} \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = x + \frac{1}{3}$.

Capitolo 6

Serie

6.1 Serie convergenti

1. **Esercizio.** Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+4},$$

e indicata con s la successione delle somme parziali, calcolare s_2 , esprimendo tale numero razionale nella forma $\frac{p}{q}$.

Risoluzione. Indicata con a la successione dei termini della serie, si ha $a_0 = \frac{3}{4}$, $a_1 = \frac{4}{5}$, $a_2 = \frac{5}{6}$; quindi si ha

$$s_2 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{143}{60}.$$

6.2 Serie geometrica

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti serie sono convergenti e in caso affermativo, determinare la loro somma.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1} 3^{n+1}}{3^{2n}};$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2} 3^{n+2}}{3^{2n}};$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-3} 3^{n+3}}{3^{2n}};$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-4} 3^{n+4}}{3^{2n}};$

giustificare la risposta.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-1} 3^{n+1}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{3}{2} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{3}{2} = (-\frac{2}{3})^n \frac{3}{2}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{3}{2} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$.

(b) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-2} 3^{n+2}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{9}{4} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{9}{4} = (-\frac{2}{3})^n \frac{9}{4}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{9}{4} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}$.

(c) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-3} 3^{n+3}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{27}{8} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{27}{8} = (-\frac{2}{3})^n \frac{27}{8}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{27}{8} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{81}{40}$.

(d) Si ha

$$(-1)^n \frac{2^{n-4} 3^{n+4}}{3^{2n}} = (-1)^n \frac{2^n 3^n}{9^n} \frac{81}{16} = (-1 \cdot \frac{6}{9})^n \frac{81}{16} = (-\frac{2}{3})^n \frac{81}{16}.$$

Quindi la serie data è una serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$; quindi la serie è convergente e ha per somma $\frac{81}{16} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{243}{80}$.

2. **Esercizio.** Determinare, attraverso le serie, la frazione generatrice del seguente numero periodico

$$.5\overline{31}.$$

Risoluzione. Si ha

$$.5\overline{31} = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} + \frac{31}{100000} + \frac{31}{10000000} + \dots = \frac{5}{10} + \frac{31}{1000} \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{526}{990}.$$

3. **Esercizio.** Determinare (se esiste) la serie geometrica di primo termine 1 e avente per somma 3.

Risoluzione. Se q è la ragione della serie geometrica, deve essere $\frac{1}{1-q} = 3$, cioè $1 - q = \frac{1}{3}$, cioè $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; la serie geometrica è quindi $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$.

4. **Esercizio.** Determinare gli $x \in \mathbf{R}^*$ per i quali le seguenti serie sono convergenti:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{x})^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

- (a) Si tratta di una serie geometrica di ragione $1 - \frac{1}{x}$. La serie è convergente se e solo se $-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$, cioè se e solo se $-2 < -\frac{1}{x} < 0$, cioè se e solo

se $\begin{cases} -\frac{1}{x} < 0 \\ \frac{1}{x} - 2 < 0 \end{cases}$; il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{1-2x}{x} < 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \text{ o } x > \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ cioè a } x > \frac{1}{2};$$

quindi la serie è convergente per $x > \frac{1}{2}$.

Per $x > \frac{1}{2}$, la somma della serie è

$$\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

- (b) La serie è convergente se e solo se $\left| \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right| < 1$, cioè se e solo se $\sqrt{x^2+1} < |x|$, cioè se e solo se $x^2+1 < x^2$, cioè se e solo se $1 < 0$. Quindi la serie non è convergente per alcun x .

5. **Esercizio.** Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ le seguenti serie sono convergenti:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2+|x|})^n$;
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (2+|x|)^n$;
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|x|}{1+|x|})^n$;
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+|x|})^n$;
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1|-x^2)^n$;
- (f) $\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1|-x)^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

- (a) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2+|x|}$. La serie è convergente se e solo se $|\frac{1}{2+|x|}| < 1$, cioè se e solo se $\frac{1}{2+|x|} < 1$, cioè se e solo se $2+|x| > 1$, cioè se e solo se $|x| > -1$; quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Per $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2+|x|})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2+|x|}} = \frac{2+|x|}{1+|x|}.$$

- (b) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (2+|x|)^n$ è una serie geometrica di ragione $2+|x|$. Si ha $2+|x| \geq 1$; quindi la serie è divergente positivamente. Quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$ la serie assegnata non è convergente.

- (c) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|x|}{1+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{|x|}{1+|x|}$. La serie è convergente se e solo se $|\frac{|x|}{1+|x|}| < 1$, cioè se e solo se $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$, cioè se e solo se $|x| < 1+|x|$, cioè se e solo se $0 < 1$; quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Per $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|x|}{1+|x|})^n = \frac{1}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = \frac{1+|x|}{1-|x|+|x|} = 1+|x|.$$

- (d) Sia $x \in \mathbf{R}$; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+|x|})^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1-x}{1+|x|}$.
 Supponiamo $x > 0$; si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+x})^n$; tale serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1 < \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{1-x}{1+x} < 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1-x < 1-x \\ 1-x < 1+x \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} -1 < 1 \\ -x < x \end{cases}$, cioè se e solo se $-1 < 1$; poichè $-1 < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-x}{1+x})^n$ è convergente.
 Supponiamo $x \leq 0$; si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che è divergente positivamente.
 Quindi la serie assegnata è convergente se e solo se $x > 0$.
 Sia $x > 0$; si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+|x|} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1-x}{1+|x|}} = \frac{1+|x|}{x+|x|} = \frac{1+x}{2x}.$$

- (e) Si tratta di un serie geometrica di ragione $|x-1|-x^2$; la serie è convergente se e solo se $-1 < |x-1|-x^2 < 1$, cioè $\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \end{cases}$; tale sistema

è equivalente a

$$\begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Il sistema } \begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} x-1-x^2 < 1 \\ x-1-x^2 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\text{a } \begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Il polinomio x^2-x+2 ha discriminante $\Delta = 1-8 = -7 < 0$; per ogni $x \in \mathbf{R}$

si ha quindi $x^2-x+2 > 0$; quindi il sistema $\begin{cases} x^2-x+2 > 0 \\ x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ è equi-

valente a $\begin{cases} x^2-x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$; tale sistema non ammette alcuna soluzione.

$$\text{Il sistema } \begin{cases} |x-1|-x^2 < 1 \\ |x-1|-x^2 > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} 1-x-x^2 < 1 \\ 1-x-x^2 > -1 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\text{a } \begin{cases} x^2+x > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ -2 < x < 1 \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } -2 < x < -1 \text{ o } 0 < x < 1.$$

La serie è quindi convergente se e solo se $-2 < x < -1$ o $0 < x < 1$; per tali x si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x-1|-x^2)^n = \frac{1}{1-|x-1|+x^2} = \frac{1}{1+x-1+x^2} = \frac{1}{x^2+x}.$$

- (f) Si tratta di una serie geometrica di ragione $|x-1|-x$. La serie è convergente se e solo se $-1 < |x-1|-x < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x-1-x < 1 \\ x-1-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè

a $\begin{cases} -1 < 1 \\ -1 > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$;

poichè $-1 > -1$ è falsa il sistema non è mai verificato.

Il sistema $\begin{cases} |x-1|-x < 1 \\ |x-1|-x > -1 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} -x+1-x < 1 \\ -x+1-x > -1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè

a $\begin{cases} -2x < 0 \\ -2x > -2 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x < 1 \end{cases}$, cioè a $0 < x < 1$.

Quindi la serie è convergente se e solo se $0 < x < 1$; per tali x la somma della serie è

$$\frac{1}{1-|x-1|+x} = \frac{1}{1+x-1+x} = \frac{1}{2x}.$$

6. **Esercizio.** Determinare gli x del dominio naturale per i quali le seguenti serie sono convergenti:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{x-1}-x)^n$,
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2-1}-x)^n$,
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{|x-1|}-1)^n$;

per tali x determinare la somma della serie.

Risoluzione.

- (a) La serie è assegnata per $x-1 \geq 0$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\sqrt{x-1}-x$. La serie è convergente se e solo se $-1 < \sqrt{x-1}-x < 1$, cioè se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x-1}-x < 1 \\ \sqrt{x-1}-x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè, se e solo se $\begin{cases} \sqrt{x-1} < x+1 \\ \sqrt{x-1} > x-1 \\ x \geq 1 \end{cases}$,
 cioè, essendo anche $x+1 \geq 0$, se e solo se $\begin{cases} x-1 < (x+1)^2 \\ x-1 > (x-1)^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e

solo se $\begin{cases} x-1 < x^2+2x+1 \\ x-1 > x^2-2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} x^2+x+2 > 0 \\ x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè
 se e solo se $\begin{cases} x^2-3x+1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e solo se $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$, cioè se e
 solo se $1 < x < 2$.

Quindi la serie è convergente se e solo se $1 < x < 2$; per tali x la somma della serie è

$$\frac{1}{1-\sqrt{x-1}+x}.$$

(b) 1° modo Il dominio naturale della funzione definita da $\sqrt{2x^2-1}-x$ è dato dalle x soddisfacenti $2x^2-1 \geq 0$.

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sqrt{2x^2-1}-x$; la serie è quindi convergente se e solo se $-1 < \sqrt{2x^2-1}-x < 1$.

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x < 1 \end{cases}.$$

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2-1 > (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} 2x^2-1 > x^2+2x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x^2+2x-2 > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1-\sqrt{3} \text{ o } x > -1+\sqrt{3} \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x \geq 1.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ cioè a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x < 1 \end{cases}, \text{ cioè a } x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1.$$

La disequazione $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} > x-1 \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ è quindi equivalente a
 $x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Risolviamo $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}.$$

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases}$ è equivalente a
 $\begin{cases} 2x^2-1 < 1+2x+x^2 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $\begin{cases} x^2-2x-2 < 0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a
 $\begin{cases} 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$, cioè a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Il sistema $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$ non ammette soluzioni.

La disequazione $\begin{cases} \sqrt{2x^2-1} < 1+x \\ 2x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ è quindi equivalente a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Il sistema $\begin{cases} 2x^2-1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2-1}-x \\ \sqrt{2x^2-1}-x < 1 \end{cases}$ è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a $1-\sqrt{3} < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{0} \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1+\sqrt{3}$.

Quindi la serie è convergente per

$$x \in]1-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{3}[;$$

per tali x si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2-1}-x)^n = \frac{1}{1-\sqrt{2x^2-1}+x}.$$

2° modo Il dominio naturale della funzione definita da $\sqrt{2x^2 - 1} - x$ è dato dalle x soddisfacenti $2x^2 - 1 \geq 0$.

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\sqrt{2x^2 - 1} - x$; la serie è quindi convergente se e solo se $-1 < \sqrt{2x^2 - 1} - x < 1$.

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ -1 < \sqrt{2x^2 - 1} - x \\ \sqrt{2x^2 - 1} - x < 1 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x < -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x > 1 \end{cases}.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x < -1 \end{cases};$$

si ha $1 + x < 0$; quindi l'equazione $\sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x$ non è mai soddisfatta; quindi il sistema non ha soluzioni.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} - x > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases};$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 1 < (1 + x)^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 2 < 0 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 - 1} > x - 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} < 1 + x \\ x > 1 \end{cases};$$

il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > (x - 1)^2 \\ 2x^2 - 1 < (1 + x)^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 > x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 - 1 < 1 + 2x + x^2 \end{cases},$$

cioè a

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ o } x > -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \end{cases},$$

cioè a

$$1 < x < 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi il sistema da cui siamo partiti è equivalente a

$$1 - \sqrt{3} < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi la serie è convergente per

$$x \in]1 - \sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{3}[;$$

per tali x si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2x^2 - 1} - x)^n = \frac{1}{1 - \sqrt{2x^2 - 1} + x}.$$

- (c) La serie è assegnata per $x - 1 \neq 0$, cioè per $x \neq 1$. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{|x-1|} - 1$. La serie è convergente se e solo se $-1 < \frac{1}{|x-1|} - 1 < 1$, cioè se e solo se $0 < \frac{1}{|x-1|} < 2$, cioè se e solo se $\frac{1}{|x-1|} < 2$, cioè se e solo se $|x - 1| > \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x - 1 < -\frac{1}{2}$ o $x - 1 > \frac{1}{2}$, cioè se e solo se $x < \frac{1}{2}$ o $x > \frac{3}{2}$.

Per tali x la somma della serie è

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{|x-1|} + 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{|x-1|}} = \frac{|x-1|}{2|x-1| - 1}.$$

6.3 Serie a termini positivi

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2 + n + 1}{n^3 + 1}$;
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 7n + 3}{n^5 + n + 2}$;
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 2}{n^3 + 3n + 1}$;
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{2n^2 + 1}$;
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3 - 2n}}{n^5 + 1}$;
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n + 3}}$;
- (g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$;
- (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n} - n^3}{\sqrt{n^5 + 1}}$;

giustificare la risposta.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{5n^2 + n + 1}{n^3 + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n}$; quindi la serie data è divergente positivamente.

- (b) Si ha

$$\frac{n^2 + 7n + 3}{n^5 + n + 2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3};$$

quindi la serie è convergente.

- (c) Si ha

$$\frac{n^2 + 5n + 2}{n^3 + 3n + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n};$$

quindi la serie è divergente positivamente.

- (d) Si ha $\frac{n^2+3}{2n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$; quindi la serie è divergente positivamente.
- (e) Si ha $\frac{\sqrt{n^4+n^3-2n}}{n^5+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}$; quindi la serie è convergente.
- (f) Si ha $\sqrt{\frac{n^2+1}{n^3+2n+3}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \not\sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$.
Quindi la serie assegnata è divergente positivamente.
- (g) Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$; quindi la serie è divergente positivamente.
- (h) Si ha $\frac{n+\sqrt{n}-n^3}{\sqrt{n^5+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{\sqrt{n^5}} = -\frac{n^3}{n^2\sqrt{n}} = -\frac{n}{\sqrt{n}}$; si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\infty$;
quindi la serie è divergente negativamente.

2. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$;
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5^n}{4n+4^n}$;
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n + n^3}{3^n + n^4}$;
 (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7n + 1}{n! + 3^n + 1}$;
 (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n! + n}$;
 (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n!}{n^3 + 2n!}$;
 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n + 2}{n! - n + 3}$;

giustificare la risposta.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{n^2+2^n}{n^3+3^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Quindi la serie assegnata è convergente.
- (b) Si ha $\frac{4n+5^n}{4n+4^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n$; quindi la serie è divergente positivamente.
- (c) Si ha $\frac{n^2 2^n + n^3}{3^n + n^4} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$; quindi la serie è convergente.
- (d) Si ha $\frac{2^n + 7n + 1}{n! + 3^n + 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$; quindi la serie data è convergente.
- (e) Si ha $\frac{2^n + 3^n}{n! + n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$;
quindi la serie è convergente.
- (f) Si ha $\frac{n^2 - n!}{n^3 + 2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$.
Quindi la serie è divergente negativamente.
- (g) Si ha $\frac{n^5 + n + 2}{n! - n + 3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n!}$;
quindi la serie è convergente.

3. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3n^2}$;
 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n}{2n^3+n^2}$;
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2}{(2n)!+3}$;
 (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$;
 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

giustificare la risposta.

Risoluzione.

- (a) Si ha:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{3(n+1)^2}}{\frac{n!}{3n^2}} = \frac{n!(n+1)}{3n^2+2n+1} \frac{3n^2}{n!} = \frac{n+1}{3^{2n+1}} = \frac{n+1}{3 \cdot 9^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n}{9^n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$
 Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.
- (b) Si ha $\frac{2n^2+n}{2n^3+n^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^3}$. Si ha:

$$\frac{\frac{2(n+1)^2}{3(n+1)^3}}{\frac{2n^2}{2n^3}} = \frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^3+3n^2+3n+1}} \frac{2^{n^3}}{2^{n^2}} = 2^{-3n^2-n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$
 Quindi la serie data è convergente per il criterio del rapporto.
- (c) Si ha $\frac{n!+2}{(2n)!+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(2n)!}$; Si ha:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$
 Quindi, per il criterio del rapporto, serie data è convergente.
- (d) Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = 0.$
 Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.
- (e) Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$
 Quindi, per il criterio della radice, la serie è convergente.

6.4 Limiti di successioni

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti di successioni

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n}$;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!}$;
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!}$;
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n}$;
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!}.$

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n} = 1$. Quindi si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{n+3^n} = 1$.
- (b) Si ha $\frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n!}{2n!} = -\frac{1}{2}$. Quindi si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5^n - n!}{n^5 7^n + 2n!} = -\frac{1}{2}$.
- (c) Si ha $\frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n - n}{7^n - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0 .$$

- (d) Si ha $\frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{9^n}$; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n!}{n^2 + 9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{9^n} = +\infty .$$

- (e) Si ha $\frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2n!} = \frac{1}{2}$; quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2^n+n!}{n^2+3^n+2n!} = \frac{1}{2} .$$

Capitolo 7

Serie di potenze

7.1 Serie di potenze

1. **Esercizio.** Studiare le seguenti serie di potenze:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{2^n} z^n;$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n;$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n;$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n;$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n;$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{2^n+n} z^n;$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n;$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n.$

Risoluzione.

(a) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$\left| \frac{1+2n}{2^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2^n} |z|^n = 2n \left(\frac{|z|}{2} \right)^n.$$

Quindi la serie di potenze è assolutamente convergente in z se e solo se $\frac{|z|}{2} < 1$, cioè se e solo se $|z| < 2$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.

Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 2$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+2n}{2^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{|z|}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty.$$

Quindi la serie non è convergente in z .

(b) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$\left| \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} |z| \right)^n;$$

quindi la serie è assolutamente convergente se e solo se $\frac{3}{5}|z| < 1$, cioè se e solo se $|z| < \frac{5}{3}$. Quindi il raggio di convergenza è $\frac{5}{3}$.

Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = \frac{5}{3}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2+3^n}{n^4+5^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} |z| \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Quindi la serie non è convergente in z .

(c) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$\left| \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} |z|^n = \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se $\frac{2}{3}|z| < 1$, cioè se e solo se $|z| < \frac{3}{2}$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{3}{2}$.

Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = \frac{3}{2}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} |z| \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Quindi la serie non è convergente in z .

(d) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$\left| \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} |z|^n = \frac{(2|z|)^n}{n!}$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2^n}{n!+3^n} z^n$ è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbf{C}$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = +\infty.$$

(e) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$\left| \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{3^n} |z|^n = n! \left(\frac{|z|}{3} \right)^n$$

Per $z \neq 0$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} n! \left(\frac{|z|}{3} \right)^n = +\infty$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^2+3^n} z^n$ è assolutamente convergente se e solo se $z = 0$. Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = 0.$$

(f) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left| \frac{n+5}{2^n+n} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} |z|^n = n \left(\frac{|z|}{2} \right)^n$;

la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $\frac{|z|}{2} < 1$, cioè se e solo se $|z| < 2$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2.

Per $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 2$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+5}{2^n+n} z^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|z|}{2} \right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Quindi la serie non è convergente in z .

(g) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left| \frac{3^n+n^2+1}{n^2+n+1} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^2} |z|^n = \frac{1}{n^2} (3|z|)^n$;

la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $3|z| \leq 1$, cioè se e solo se $|z| \leq \frac{1}{3}$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{1}{3}$.

Supponiamo $z \in \mathbf{C}$ e $|z| = \frac{1}{3}$; abbiamo visto che per $|z| = \frac{1}{3}$ la serie è assolutamente convergente; quindi la serie è convergente in z .

- (h) Per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha $\left| \frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n}{n^2} |z|^n = \frac{1}{n} |3z|^n$; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in z se e solo se $|3z| < 1$, cioè se e solo se $|z| < \frac{1}{3}$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\frac{1}{3}$. Supponiamo $z \in \mathbf{C}$ e $|z| = \frac{1}{3}$.

Si ha

$$\frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n = \left(\frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n - \frac{3^n}{n} z^n \right) + \frac{3^n}{n} z^n = \frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)} z^n + \frac{1}{n} (3z)^n.$$

Si ha $\left| \frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)} z^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (3|z|)^n = \frac{1}{n^3}$; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4-3^n}{n(n^2+1)} z^n$ è assolutamente convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (3z)^n$ è convergente per $3z \neq 1$, non convergente per $3z = 1$, cioè è convergente per $z \neq \frac{1}{3}$, non convergente per $z = \frac{1}{3}$.

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n+n^3}{n^2+1} z^n$ è convergente per $z \neq \frac{1}{3}$, non convergente per $z = \frac{1}{3}$.

2. **Esercizio.** Determinare l'insieme degli x reali per i quali la seguente serie è definita ed è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} \left(\frac{x+2}{x} \right)^n.$$

Risoluzione. La serie è definita per $x \neq 0$.

Supponiamo $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Poniamo $t = \frac{x+2}{x}$.

Consideriamo la serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} t^n$.

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$\left| \frac{n^2+3}{n^3+1} t^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |t|^n$; la serie di potenze è quindi assolutamente convergente in t se e solo se $|t| < 1$; quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 1.

Supponiamo $t \in \mathbf{R}$ e $|t| = 1$, cioè $t = 1$ o $t = -1$.

Per $t = 1$ si ha la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1}$; si ha $\frac{n^2+3}{n^3+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$; quindi la serie di potenze non è convergente in 1.

Per $t = -1$ si ha

Si ha

$$\frac{n^2+3}{n^3+1} (-1)^n = \left(\frac{n^2+3}{n^3+1} (-1)^n - \frac{1}{n} (-1)^n \right) + \frac{1}{n} (-1)^n = \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n + \frac{1}{n} (-1)^n.$$

Si ha $\left| \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n \right| \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}$; quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^3+1)} (-1)^n$ è assolutamente convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ è convergente per il criterio di Leibniz.

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} (-1)^n$ è convergente.

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+1} t^n$ è quindi convergente se e solo se $-1 \leq t < 1$.

La serie assegnata è quindi convergente se $x \in \mathbf{R}^*$ è tale che $-1 \leq \frac{x+2}{x} < 1$.

Ciò equivale a dire

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \geq -1 \\ \frac{x+2}{x} < 1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} \frac{x+2}{x} + 1 \geq 0 \\ \frac{x+2}{x} - 1 < 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} \frac{x+1}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{x} < 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x > 0 \\ x < 0 \end{cases}, \text{ cioè } x \leq -1.$$

La serie assegnata è quindi assegnata e convergente se e solo se $x \leq -1$.

3. **Esercizio.** Dimostrare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

(la somma della quale è $\sin z$) ha raggio di convergenza $+\infty$.

Risoluzione. Sia $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$; studiamo l'assoluta convergenza della serie di potenze in z , cioè la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Applichiamo il criterio del rapporto; si ha

$$\frac{\frac{|z|^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{|z|^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{|z|^{2n+1}} = |z|^2 \frac{1}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} (2n+1)! = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{|z|^2}{4n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi la serie è assolutamente convergente in z . Per l'arbitrarietà di z la serie di potenze ha raggio di convergenza $+\infty$.

7.2 Esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico

1. **Esercizio.** Dire se la relazione:

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

è vera e, in caso affermativo, giustificare la risposta.

Risoluzione. La relazione è vera in quanto

$$\cos 2 = \cos(1+1) = \cos 1 \cos 1 - \sin 1 \sin 1 = \cos^2 1 - \sin^2 1.$$

2. **Esercizio.** Calcolare:

$$|i \exp i|.$$

Risoluzione. Si ha $|i \exp i| = |i| \cdot |\exp i| = 1 \cdot |\cos 1 + i \sin 1| = 1 \cdot 1 = 1$.

7.3 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2};$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(5x))^2}{\sin(2x) \operatorname{sh}(7x)};$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)};$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^2 \sin^2 x}{1 - \cos x^2}.$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)}.$

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando unicamente le equivalenze asintotiche, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha $\frac{(1 - \cos x)^3}{(x - \sin x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{x^2}{2})^3}{(\frac{x^3}{6})^2} = \frac{6^2}{2^3} = \frac{9}{2}.$ Quindi il limite è $\frac{9}{2}.$
- (b) Si ha $\frac{(1 - \exp(5x))^2}{\sin(2x) \operatorname{sh}(7x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x)^2}{2x7x} = \frac{25}{14}.$ Quindi il limite è $\frac{25}{14}.$
- (c) Si ha

$$\frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x(-\frac{x^2}{2})} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(\cos x - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

- (d) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^2 \sin^2 x}{1 - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{\frac{x^4}{2}} = 2.$
- (e) Si ha $x^2 - \sin x^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^6$ e $\operatorname{sh} x (1 - \cos x) \sim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3;$
quindi $\frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{1}{3}x^3.$
Quindi si ha
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{\operatorname{sh} x (1 - \cos x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3 = 0.$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x};$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x + \sin x}{1 - \cos x + \sin x};$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)};$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x};$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)}.$

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando le equivalenze asintotiche e la trascurabilità, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha $\frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \sim_{x \rightarrow 0} 1$;
quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + \sin x}{\operatorname{sh} x} = 1$.
- (b) Poichè $x \sim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sh} x \ll_{x \rightarrow 0} \sin x$ e poichè $1 - \cos x \ll_{x \rightarrow 0} \operatorname{sh} x$, si ha $\frac{x - \operatorname{sh} x + \sin x}{1 - \cos x + \operatorname{sh} x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \frac{x}{x} = 1$. Quindi il limite è 1.
- (c) Si ha $\frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sh}(2x)}{\sin(5x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{5x} = -\frac{2}{5}$; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x - \operatorname{sh}(2x)}{1 - \cos x + \sin(5x)} = -\frac{2}{5}.$$

- (d) Si ha $\frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(4x)}{x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x} = -4$; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \sin(4x)}{\operatorname{ch} x - 1 + x} = -4.$$

- (e) Si ha $\frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \operatorname{sh} x + 3x}{1 - \cos x + \sin(2x)} = \frac{3}{2}.$$

3. Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)}$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema $f \sim c_1 h$, $g \sim c_2 h$, $c_1 + c_2 \neq 0 \Rightarrow f + g \sim (c_1 + c_2)h$, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha $\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$, $\operatorname{sh} x \sim_{x \rightarrow 0} x$; $\exp(3x) - 1 \sim_{x \rightarrow 0} 3x$; quindi si ha $\frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$;
quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \operatorname{sh} x}{\exp(3x) - 1} = \frac{2}{3}$.
- (b) Si ha $\sin x^2 \sim_{x \rightarrow 0} x^2$, $1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$; quindi si ha $\frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$;
quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x(\exp x - 1)} = \frac{3}{2}$.

4. Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(\operatorname{sh} x - x) - x^3}{\operatorname{ch} x - 1}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x}$;

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{2(1 - \cos x) - \sin^2 x} \right|$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando il teorema $f \sim c_1 h$, $g \sim c_2 h$, $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow f - g \ll h$, senza usare dunque gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha $6(\operatorname{sh} x - x) \sim_{x \rightarrow 0} x^3$; quindi si ha $6(\operatorname{sh} x - x) - x^3 \ll_{x \rightarrow 0} x^3$; si ha $\operatorname{ch} x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$; quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(\operatorname{sh} x - x) - x^3}{\operatorname{ch} x - 1} = 0$.
 (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - \operatorname{sh} x^3}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^3)}{\frac{x^2}{2}} = 0$.
 (c) Si ha $\sin x^3 - \operatorname{sh}^3 x \ll_{x \rightarrow 0} x^3 \ll_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x$. Quindi il limite è 0.
 (d) Si ha $2(1 - \cos x) - \sin^2 x \ll_{x \rightarrow 0} x^2 \ll x \rightarrow 0 \sin x$. Quindi il limite è $+\infty$.

5. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\operatorname{sh} x^4 \sin^2 x}$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x}$;
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x (1 - \cos x) - x^3}{\sin x (\operatorname{ch} x - 1)^2}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2}$;
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2}$;
 (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}$;
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x (x - \sin x)}$;
 (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x}$;
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2}$;
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2}$.

Risoluzione. Gli esercizi sono risolti utilizzando gli sviluppi asintotici.

- (a) Si ha:
 $\operatorname{sh} x^4 \sin^2 x \sim_{x \rightarrow 0} x^6$,
 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$,
 $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$,
 $(1 - \cos x)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)$,
 $4(1 - \cos x)^2 = x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$,
 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,
 $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$,
 $x^2 \sin^2 x = x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$,

$$4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^6,$$

$$\frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\log(1 + x^4) \sin^2 x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^6}{x^6} = \frac{1}{6}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)^2 - x^2 \sin^2 x}{\log(1 + x^4) \sin^2 x} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si ha:

$$\begin{aligned} x - \sin x &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^3, \\ \sin x &= x + o(x^2), \\ \exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \\ \exp x - 1 &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \\ \sin x(\exp x - 1) &= (x + o(x^2))(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3), \\ \sin x(\exp x - 1) - x^2 &= \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^3, \\ \frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 3. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\exp x - 1) - x^2}{x - \sin x} = 3.$$

(c) Si ha:

$$\begin{aligned} \sin x(\operatorname{ch} x - 1) &\sim_{x \rightarrow 0} x(\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^5, \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ \operatorname{sh} x(1 - \cos x) &= (x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{12}x^5 + \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5), \\ 2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) &= x^3 + \frac{1}{12}x^5 + o(x^5), \\ 2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3 &= \frac{1}{12}x^5 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}x^5, \\ \frac{2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^5}{\frac{1}{4}x^5} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} x(1 - \cos x) - x^3}{\sin x(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{1}{3}.$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\ 2(1 - \cos x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4); \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \\ \sin^2 x &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4); \\ 2(1 - \cos x) - \sin^2 x &= x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \sim \frac{1}{4}x^4; \\ (\operatorname{ch} x - 1)^2 &\sim (\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{4}x^4 \\ \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} &\sim \frac{\frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 1. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = 1.$$

(e) Si ha

$$\begin{aligned}
(1 - \cos x)^2 &\sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\
1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\
2(1 - \cos x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4); \\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \\
\operatorname{sh}^2 x &= x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4); \\
2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x &= x^2 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{5}{12}x^4; \\
\frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2} &\sim \frac{-\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{5}{3}.$$

(f) Si ha

$$\begin{aligned}
(1 - \cos x)^2 &\sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\
\operatorname{ch} x - 1 &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \\
2(\operatorname{ch} x - 1) &= x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4); \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \\
\sin^2 x &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4); \\
2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x &= x^2 + \frac{1}{12}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim \frac{5}{12}x^4; \\
\frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} &\sim \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{5}{3}.$$

(g) Si ha

$$\begin{aligned}
\sin x(x - \sin x) &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{6}. \\
\text{Si ha} \\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\
\operatorname{sh}^2 x &= x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4), \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\
x \sin x &= x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4), \\
\operatorname{sh}^2 x - x \sin x &= \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^4.
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x(x - \sin x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{\frac{1}{6}x^4} = 3.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - x \sin x}{\sin x(x - \sin x)} = 3.$$

(h) Si ha

$$\begin{aligned}
x - \sin x &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6}; \\
\exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2); \text{ quindi} \\
\exp x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x^2); \text{ quindi} \\
(\exp x - 1) \sin x &= (x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x + o(x^2)) = x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3); \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3); \text{ quindi} \\
\operatorname{ch} x - 1 &= \frac{x^2}{2} + o(x^3); \text{ quindi} \\
2(\operatorname{ch} x - 1) &= x^2 + o(x^3); \text{ quindi} \\
(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1) &= \frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2}; \text{ quindi} \\
\frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{6}} = 3.
\end{aligned}$$

$$\text{Si ha quindi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1) \sin x - 2(\operatorname{ch} x - 1)}{x - \sin x} = 3.$$

(i) Si ha

$$\begin{aligned}
(1 - \cos x)^2 &\sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}; \\
\exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2); \text{ quindi} \\
\exp x - 1 &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2); \text{ quindi} \\
(\exp x - 1)^3 &= x^3 + 3x^2 \frac{1}{2}x^2 + o(x^4); \\
\exp x &= 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) = 1 + x^3 + o(x^4); \text{ quindi} \\
(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1 &= x^3 + \frac{3}{2}x^4 - 1 - x^3 + 1 + o(x^4) = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}x^4; \text{ quindi} \\
\frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = 6.
\end{aligned}$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\exp x - 1)^3 - \exp x^3 + 1}{(1 - \cos x)^2} = 6.$$

(j) Si ha

$$\begin{aligned}
(1 - \cos x)^2 &\sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}; \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \text{ quindi} \\
1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4); \text{ quindi} \\
4(1 - \cos x) &= 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4); \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \\
\operatorname{sh}(2x) &= 2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3); \\
\sin x \operatorname{sh}(2x) &= (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))(2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) = \\
&= 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = 2x^2 + x^4 + o(x^4); \\
4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x) &= 2x^2 - \frac{1}{6}x^4 - 2x^2 - x^4 + o(x^4) = -\frac{7}{6}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{7}{6}x^4; \text{ quindi} \\
\frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = -\frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x) - \sin x \operatorname{sh}(2x)}{(1 - \cos x)^2} = -\frac{14}{3}.$$

7.4 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza delle seguenti serie:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3};$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}};$

- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+3} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$;
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{\frac{1}{n}}$;
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$;
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\exp \frac{1}{n^2} - 1}$;

Risoluzione.

- (a) Si ha $\sin \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n+1}{n^5+n+3} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$.
Quindi la serie è convergente.
- (b) Si ha $\sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.
- (c) Si ha $\frac{n^3+1}{n^2+3} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \sim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{6} \frac{1}{n^2}$.
Quindi la serie è convergente.
- (d) Si ha $\sin \sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$; quindi la serie è divergente positivamente.
- (e) Si ha $\operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$.
Quindi la serie è divergente positivamente.
- (f) Si ha $1 - \cos \frac{1}{n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$; quindi la serie è convergente.
- (g) Si ha
 $\sqrt{\exp \frac{1}{n^4} - 1} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$;
quindi la serie è convergente.

Capitolo 8

Derivate

8.1 Derivate

1. **Esercizio.** Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^3 ;$$

- (a) scrivere il rapporto incrementale $r(h)$ di f in 1 applicato ad h , (semplificando l'espressione).
- (b) calcolare $f'(1)$ come limite del rapporto incrementale.

Risoluzione.

- (a) Si ha $r(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3-1}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = h^2 + 3h + 3$.
- (b) Si ha $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 3) = 3$.

2. **Esercizio.** Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva

$$y = x^3$$

nel punto $(1, 1)$.

Risoluzione. Posto $f(x) = x^3$, si ha $f(1) = 1$ e $f'(1) = 3$; quindi l'equazione della retta è $y - 1 = 3(x - 1)$, cioè $y = 3x - 2$.

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x) = x^2 \sin x^3$;
- (b) $f(x) = x^3 \sin x^2$;
- (c) $f(x) = x^2 \sin \exp(5x^2)$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin x^3 + x^2(\cos x^3)3x^2 = 2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3 .$$

(b) Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \sin x^2 + x^3(\cos x^2)2x = 3x^2 \sin x^2 + 2x^4 \cos x^2 .$$

(c) Si ha

$$f'(x) = 2x \sin \exp(5x^2) + x^2(\cos \exp(5x^2)) \exp(5x^2)10x .$$

4. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni in un punto x del dominio ove le funzioni sono derivabili

(a) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 \sin x^3}$

(b) $f(x) = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$;

Risoluzione.

(a) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}}(2x \sin x^3 + x^2(\cos x^3)3x^2) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2 \sin x^3)^3}}(2x \sin x^3 + 3x^4 \cos x^3).$$

(b) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{1}{x}}} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) .$$

5. **Esercizio.** Determinarne il dominio naturale e calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \exp \frac{1}{x} .$$

Risoluzione.Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$ e per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ si ha

$$f'(x) = \left(\exp \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) .$$

6. **Esercizio.** Sia

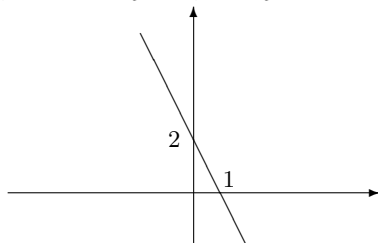
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x+1} ;$$

trovare in funzione di h l'espressione che, attraverso la derivata, approssima l'incremento $(\Delta f(1))(h)$ della funzione f in 1, per h "piccolo".

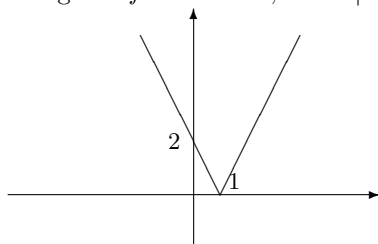
Risoluzione. Si ha $f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$; quindi si ha $f'(1) = -\frac{1}{4}$; quindi si ha $(\Delta f(1))(h) = f(1+h) - f(1) = f'(1)h + o(h) = -\frac{1}{4}h + o(h)$.

7. **Esercizio.** Fare un esempio di una funzione reale di variabile reale, continua in 1, non derivabile in 1 e tale che $f(0) = 2$. Si richiede l'espressione esplicita della funzione.

Risoluzione. Consideriamo la retta passante per i punti $(1, 0)$ e $(0, 2)$; essa ha equazione $x + \frac{y}{2} = 1$, cioè $2x + y = 2$, cioè $y = 2 - 2x$.



Come funzione si può scegliere $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow |2 - 2x|$.



8.2 Massimo, minimo

1. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$,
- (b) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2 + x + 1$,
- (c) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2+1}{x+1}$

ammettono massimo e minimo; in caso affermativo determinarli.

Risoluzione.

- (a) Essendo f continua ed essendo $\text{dom}(f)$ compatto, f ammette massimo e minimo.

Sia $x \in]0, 1[$; si ha $f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$; quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti in $\{0, 1\}$; si ha $f(0) = -1$, $f(1) = 0$; quindi si ha $\max(f) = 0$, $\min(f) = -1$.

- (b) Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.

Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti nei punti di $] -1, 1[$ ove si annulla f' o su $\{-1, 1\}$.

Sia $x \in]-1, 1[$; si ha $f'(x) = 2x + 1$; quindi si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{1}{2}$.

Si ha

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}, \quad f(1) = 3, \quad f(-1) = 1.$$

Quindi si ha $\max(f) = 3$, $\min(f) = \frac{3}{4}$.

- (c) i. Essendo f continua ed essendo $\text{dom} f$ compatto, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo.
 ii. Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti negli estremi di $[0, 1]$ o nei punti interni di $[0, 1]$ nei quali $f'(x) = 0$.

Sia $x \in]0, 1[$; si ha

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2};$$

si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = -1 \pm \sqrt{2}$, cioè, essendo $0 < x < 1$, se e solo se $x = \sqrt{2} - 1$.

Quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti su $\{0, 1, \sqrt{2} - 1\}$.

$$\text{Si ha } f(0) = 1, \quad f(1) = 1, \quad f(\sqrt{2} - 1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2+1-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{2} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Si ha $2\sqrt{2} < 1$: infatti ciò equivale a $2\sqrt{2} < 0$, cioè a $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, cioè a $2 < \frac{9}{4}$, cioè a $8 < 9$.

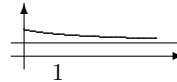
Si ha quindi $\max(f) = 1$ e $\min(f) = 2\sqrt{2} - 2$.

2. **Esercizio.** Sia $A = \{\frac{x+5}{2x+5}; x \in \mathbf{R}_+\}$;

- (a) dire se A ammette massimo e se A ammette minimo
 (b) determinare $\sup(A)$ e $\inf(A)$ rispetto allo spazio ordinato $(\mathbf{R}, \leq)$

Risoluzione. Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{x+5}{2x+5}$, di modo che $A = f([0, +\infty[)$.

Si ha $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Per $x \in]0, +\infty[$ si ha $f'(x) = \frac{2x+5-2(x+5)}{(2x+5)^2} = -\frac{5}{(2x+5)^2} < 0$; quindi f è strettamente decrescente.



Si ha quindi $A =]\frac{1}{2}, 1]$. Quindi A ammette massimo e $\max(A) = 1$; A non ammette minimo; si ha $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = \frac{1}{2}$.

8.3 Teorema del valor medio

1. **Esercizio.** Dire quale delle seguenti funzioni $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ con

- (a) $f(x) = x^2 + x + 1$,
 (b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$,
 (c) $f(x) = |x|$,

soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle; motivare per ciascuna funzione la risposta; per le funzioni che soddisfano tali ipotesi, determinare i punti ξ l'esistenza dei quali è assicurata dal teorema di Rolle.

Risoluzione.

- (a) Si ha $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$, $f(1) = 3$; quindi f non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.
 - (b) La funzione f è derivabile e si ha $f(-1) = 2$ e $f(1) = 2$; quindi f soddisfa le condizioni del teorema di Rolle; quindi esiste $\xi \in]-1, 1[$ tale che $f'(\xi) = 0$; per ogni $x \in]-1, 1[$ si ha $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3x^2 + 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}$, cioè se e solo se $x = -1$ o $x = \frac{1}{3}$, cioè, essendo $x \in]-1, 1[$ se e solo se $x = \frac{1}{3}$; si ha quindi $\xi = \frac{1}{3}$.
 - (c) La funzione f non è derivabile in 0; quindi non soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.
2. **Esercizio.** Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2$; determinare il punto ξ di cui viene affermata l'esistenza nel teorema di Lagrange.

Risoluzione. Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $f'(x) = 2x$; il punto ξ soddisfa $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi)$; si ha quindi $1 = 2\xi$; quindi $\xi = \frac{1}{2}$.

8.4 Derivabilità e derivata

1. **Esercizio.** Sia

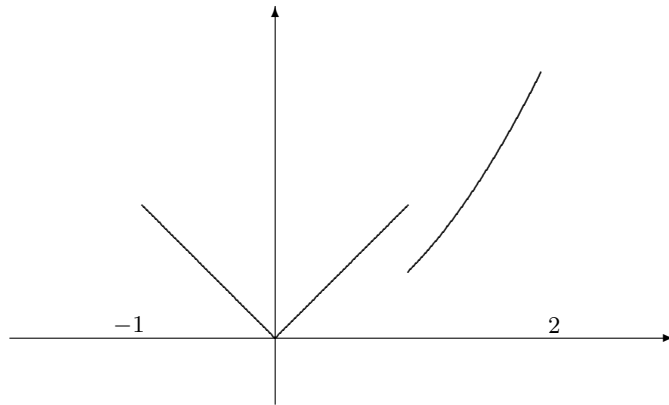
$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} |x| & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases} ;$$

- (a) disegnare approssimativamente il grafico di f ;
- (b) determinare l'insieme dei punti ove f è continua;
- (c) determinare l'insieme dei punti ove f è derivabile;

motivare adeguatamente la risposta.

Risoluzione.

- (a)



- (b) Per il carattere locale della continuità, f è continua su $[-1, 1[$ e su $]1, 2]$.

Studiamo la continuità di f in 1. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1-, x \neq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-, x \neq 1} |x| = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1+, x \neq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+, x \neq 1} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi f non è continua in 1.

L'insieme dei punti di continuità di f è quindi

$$[-1, 1[\cup]1, 2].$$

- (c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Per il carattere locale della derivabilità, f è derivabile su $[-1, 0[$, su $]0, 1[$ e su $]1, 2]$.

In 1 f non è derivabile in quanto non è continua.

Studiamo la continuità di f in 0. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-, x \neq 0} -1 = -1$$

quindi f è derivabile da sinistra in 0 e si ha $f'_-(0) = -1$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+, x \neq 0} 1 = 1$$

quindi f è derivabile da destra in 0 e si ha $f'_+(0) = 1$.

Essendo $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, f non è derivabile in 0.

L'insieme dei punti di continuità di f è quindi

$$[-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2].$$

8.5 Studio funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) Determinare il dominio di f ;
- (b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (c) Sia $x \in \mathbf{R}$. Si ha

$$f'(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) .$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -1$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -1$; si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < -1$. Quindi f è strettamente crescente su $[-1 + \infty[$, strettamente decrescente su $] - \infty, -1]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[-1, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset ,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{] - \infty, -1] \} .$$

- (d) Sia $x \in \mathbf{R}$. Si ha

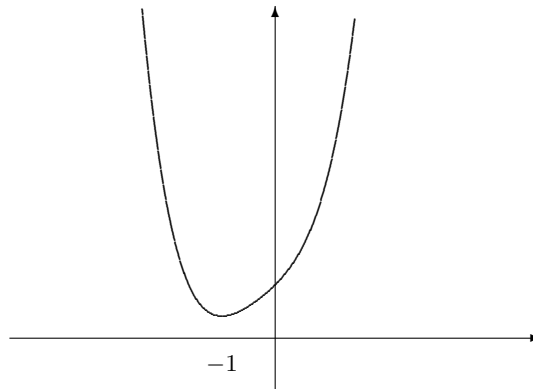
$$f''(x) = 3x^2 + x + 1 > 0 .$$

Quindi f è strettamente convessa su tutto $\mathbf{R}$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] - \infty, +\infty[\} , \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset \} .$$

Per tracciare il grafico di f teniamo conto che $f(-1) = \frac{5}{12} \approx .42$ e $f(0) = 1$. Si ha



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (c) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$ o $x > \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$, $f'(x) < 0$ se e solo se $\frac{-2 - \sqrt{19}}{3} < x < \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$; quindi f è strettamente crescente su $] -\infty, \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}]$ e su $[\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $[\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}]$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{] -\infty, \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}], [\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}, +\infty[\},$$

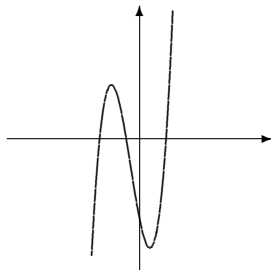
$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}] \}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f''(x) = 6x + 4$.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{2}{3}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -\frac{2}{3}$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -\frac{2}{3}$; quindi f è strettamente convessa su $[-\frac{2}{3}, +\infty[$, strettamente concava su $] -\infty, -\frac{2}{3}]$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[-\frac{2}{3}, +\infty[), \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, -\frac{2}{3}]\} \quad \mathcal{C}(\nabla) = \emptyset.$$

Si ha $\frac{-2-\sqrt{19}}{3} \approx -2.12$, $f(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}) \approx 4.06$, $\frac{-2+\sqrt{19}}{3} \approx .79$, $f(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}) \approx -8.21$.
Si ottiene il seguente grafico.



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Si chiede:

- Determinare il dominio di f ;
- Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- Determinare l'insieme degli intervalli (non vuoti e non ridotti ad un punto) massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

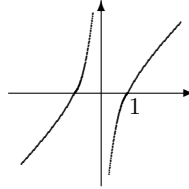
Risoluzione.

- Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.
- Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$; quindi f è strettamente crescente su $] -\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[), \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f''(x) = -2x^{-3}$; si ha quindi $f''(x) > 0$ per $x < 0$, $f''(x) < 0$ per $x > 0$; quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, 0[$, strettamente concava su $]0, +\infty[$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] -\infty, 0[,]0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]0, +\infty[\} \quad \mathcal{C}(\nabla) = \emptyset.$$



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- Determinare il dominio di f ;
- determinare gli zeri di f ;
- studiare il segno di f ;
- calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$.
- Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, cioè se e solo se $x^2 = 2$ o $x^2 = 3$, cioè se e solo se $x = \pm\sqrt{2}$ o $x = \pm\sqrt{3}$. Quindi gli zeri di f sono $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
- Si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 < 2$ o $x^2 > 3$, cioè se e solo se $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ o $x < -\sqrt{3}$ o $x > \sqrt{3}$. Si ha quindi $f(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$ o $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.
- Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f'(x) = 4x^3 - 10x$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $4x^3 - 10x = 0$, cioè se e solo se $x(4x^2 - 10) = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0$ o $x > \sqrt{\frac{5}{2}}$. Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\frac{5}{2}}$ o $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0]$ e su $[\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$ e su $[0, \sqrt{\frac{5}{2}}]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0], [\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty[\right\}, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}], [0, \sqrt{\frac{5}{2}}] \right\}.$$

(f) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 12x^2 - 10$.

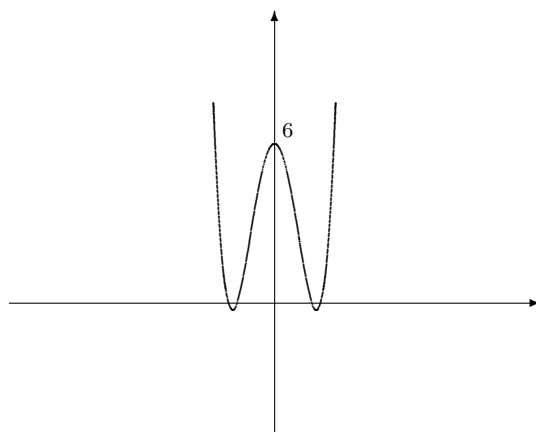
Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\frac{5}{6}}$ o $x > \sqrt{\frac{5}{6}}$ e $f''(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt{\frac{5}{6}} < x < \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}]$ e su $[\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[$ strettamente concava su $[-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}]$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}}], [\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty[\right\}, \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}] \right\}.$$

Si ha: $f(0) = 6$, $\sqrt{\frac{5}{6}} \approx .91$, $f(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) = \frac{91}{36} \approx 2.53$, $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.58$, $f(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}) = -\frac{1}{4} = -.25$.



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \frac{2+x^2}{1-x^2}.$$

Si chiede:

- (a) Determinare il dominio di f ;
- (b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

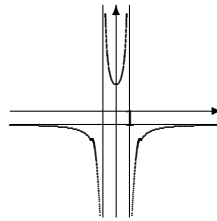
- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R} - \{1, -1\}$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.
- (c) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (-2x)(2+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+4x+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{6x}{(1-x^2)^2}$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$; quindi f è strettamente crescente su $[0, 1[$ e su $]1, +\infty[$ e strettamente decrescente su $] - \infty, -1[$ e su $] - 1, 0]$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[0, 1[,]1, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \{] - \infty, -1[,] - 1, 0] \},$$

$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 6 \frac{(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)x}{(1-x^2)^4} = 6 \frac{(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = 6 \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$. si ha quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 1$, $f''(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ o $x > 1$; quindi f è strettamente convessa su $] - 1, 1[$, strettamente concava su $] - \infty, -1]$ e su $]1, +\infty[$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] - 1, 1[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{] - \infty, -1[,]1, +\infty[\} \quad \mathcal{C}(\dagger) = \emptyset.$$



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 5}{x}$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente)
- (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (c) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f'(x) = 2x - 5x^{-2} = \frac{2x^3 - 5}{x^2}$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $f'(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; quindi f è strettamente crescente su $[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $] -\infty, 0[$ e su $]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[\sqrt[3]{\frac{5}{2}}, +\infty[), \quad \mathcal{M}(\searrow) = \{]-\infty, -0[,]0, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}]\},$$

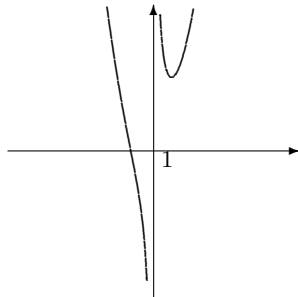
$$\mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha $f''(x) = 2 + 10x^{-3} = \frac{2x^3 + 10}{x^3}$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt[3]{5}$, $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt[3]{5}$ o $x > 0$, $f''(x) < 0$ se e solo se $-\sqrt[3]{5} < x < 0$; quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, -\sqrt[3]{5}]$ e su $]0, +\infty[$, strettamente concava su $[-\sqrt[3]{5}, 0[$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -\sqrt[3]{5}],]0, +\infty[), \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{[-\sqrt[3]{5}, 0[),$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset.$$

Si ha $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \approx 1.36$, $f(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}) \approx 5.53$, $-\sqrt[3]{5} \approx -1.71$, $f(-\sqrt[3]{5}) = 0$. Si ottiene il seguente grafico.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti o i valori di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) studiare la derivabilità di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;
- (e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Il dominio di f è dato dalle x tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases}$ cioè tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$; si ha quindi $\text{dom}(f) = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- (b) Si ha $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$.

- (c) Sia $x \in \text{dom}(f)$, $x \neq 0$; si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} < 0.$$

Quindi f è strettamente crescente su $[0, 1[$ e su $]1, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\searrow) = \{[0, 1[,]1, +\infty[\}.$$

- (d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = -\infty.$$

Quindi f è derivabile rispetto ad $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e si ha $f'(0) = -\infty$.

- (e) Sia $x \in \text{dom}(f)$, $x \neq 0$; si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + \sqrt{x}2(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x(\sqrt{x}-1)^4}}{x(\sqrt{x}-1)^4} = \\ &= \frac{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}-1}{2x(\sqrt{x}-1)^4} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} + 1}{2x(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}. \end{aligned}$$

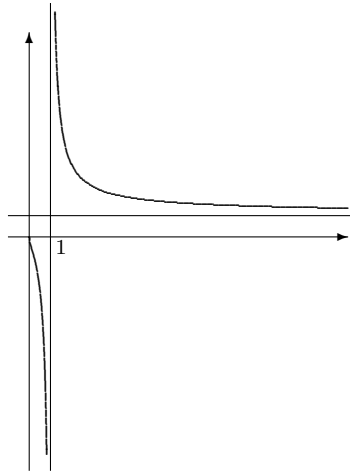
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $3\sqrt{x}-1 = 0$, cioè se e solo se $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, cioè se e solo se $x = \frac{1}{9}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{1}{9}$ o $x > 1$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $\frac{1}{9} < x < 1$.

Quindi f è strettamente convessa su $[0, \frac{1}{9}]$ e su $]1, +\infty[$, f è strettamente concava su $[\frac{1}{9}, 1[$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ [0, \frac{1}{9}],]1, +\infty[\right\}, \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [\frac{1}{9}, 1[\right\}.$$

Si ha: $\frac{1}{9} \approx .11$, $f(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{2} = -.5$.



8.6 Polinomio di Taylor

1. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 di punto iniziale 0 della seguente funzione

$$f(x) = e^x \sin x.$$

Risoluzione. Si ha

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x,$$

$$f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x;$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x;$$

quindi si ha $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$; si ha quindi

$$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0)}{6}h^3 = h + h^2 + \frac{1}{3}h^3.$$

2. **Esercizio.** Determinare il polinomio di Taylor di $f(x) = \sin x$ di ordine 4 e di punto iniziale $\frac{\pi}{2}$.

Risoluzione. Si ha $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$; quindi si ha $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f''(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f'''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = 1$; quindi, indicando con $T(h)$ il polinomio di Taylor cercato, si ha

$$T(h) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})h + \frac{1}{2}f''(\frac{\pi}{2})h^2 + \frac{1}{6}f'''(\frac{\pi}{2})h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\frac{\pi}{2})h^4 = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4.$$

3. **Esercizio.** A partire dalla definizione, determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 di punto iniziale 0 della funzione

$$f(x) = e^x + \sin x ;$$

verificare che tale polinomio soddisfa la proprietà di approssimabilità espressa dal teorema sulle proprietà del polinomio di Taylor.

Risoluzione. Si ha

$$f'(x) = e^x + \cos x, \quad f''(x) = e^x - \sin x;$$

quindi si ha $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 1$; quindi, indicando con $T(h)$ il polinomio di Taylor, si ha

$$T(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 = 1 + 2h + \frac{1}{2}h^2.$$

Il teorema sul polinomio di Taylor, applicato a questo caso, afferma che $f(h) - T(h) \ll_{h \rightarrow 0} h^2$. Applicando il teorema di de Hospital, si ha infatti

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - T(h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \sin h - 1 - 2h - \frac{1}{2}h^2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \cos h - 2 - h}{2h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sin h - 1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Capitolo 9

Funzioni elementari reali

9.1 Funzione esponenziale reale

1. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; dire quanto vale $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = e^x$; quindi si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. **Esercizio.** Determinare gli $a \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp((2a+1)x) = +\infty .$$

Risoluzione. Il limite è uguale a $+\infty$ se e solo se $2a+1 > 0$, cioè se e solo se $a > -\frac{1}{2}$.

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \log(1 - \frac{1}{x})$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{2-x}{3-x}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1-\cos x) - 6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{x^3}{x^2+1} \log(1 - \frac{1}{x}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x(-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.
Quindi il limite è 0.

- (b) Si ha
 $x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2} = x^2 \log(1 + \frac{1+x^2}{3+x^2} - 1) = x^2 \log(1 + \frac{1+x^2-3-x^2}{3+x^2}) =$
 $x^2 \log(1 + \frac{-2}{3+x^2}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\frac{-2}{3+x^2}) = x^2 \frac{-2}{x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} -2$.
Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \frac{1+x^2}{3+x^2} = -2 .$$

(c) Si ha

$$x \log \frac{2-x}{3-x} = x \log(1 + \frac{2-x}{3-x} - 1) = x \log(1 + \frac{2-x-3+x}{3-x}) =$$

$$x \log(1 + \frac{-1}{2-x}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{-1}{2-x}) = x \frac{-1}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} -1.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{2-x}{3-x} = -1.$$

(d) Si ha

$$\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4) \sim_{x \rightarrow 0} x^6.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 2x^2(1 - \cos x) &= x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \\ x - \sin x &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \\ 6x(x - \sin x) &= x^4 - \frac{1}{20}x^6 + o(x^6), \\ 2x^2(1 - \cos x) - 6x(x - \sin x) &= -\frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{20}x^6 + o(x^6) = \frac{-5+3}{60}x^6 + o(x^6) = \\ &= -\frac{1}{30}x^6 + o(x^6) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{30}x^6. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{2x^2(1-\cos x)-6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{30}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1-\cos x)-6x(x-\sin x)}{\sin x \operatorname{sh} x \log(1+x^4)} = -\frac{1}{30}.$$

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{n^2+3}{n^2+1}.$$

Risoluzione. Si ha

$$\log \frac{n^2+3}{n^2+1} = \log(1 + \frac{n^2+3}{n^2+1} - 1) = \log(1 + \frac{2}{n^2+1}) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}.$$

Quindi la serie è convergente.

9.2 Potenze di esponente reale

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}};$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x;$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^x.$

Risoluzione.

- (a) Si ha $(\frac{x}{x^2+1})^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x}{x^2+1}}$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x}{x^2+1}) = -\infty$.
 Quindi il limite è 0.
- (b) Si ha $(\frac{x^2+1}{x})^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x}}$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow 0+} (\frac{x+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x}) = +\infty$.
 Quindi il limite è $+\infty$.
- (c) Si ha $(\frac{1}{x})^x = e^{x \log \frac{1}{x}}$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1}{x} = -\infty$.
 Quindi si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x})^x = 0$.
- (d) Si ha $(\frac{3x+2}{2x+3})^x = e^{\log \frac{3x+2}{2x+3} x}$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \frac{3x+2}{2x+3} = -\infty$.
 Quindi si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{3x+2}{2x+3})^x = 0$.

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{x^2+1}{x}}$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x+1}{x-1})^x$;
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+3}{x^2-2})^{x^2+x+1}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{x^2+1}{x} \log \frac{x^2+1}{x^2-1}}$.
 Si ha $(\frac{x^2+1}{x^2-1} \log \frac{x^2+1}{x^2-1}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \log(1 + \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1) =$
 $x \log(1 + \frac{2}{x^2-1}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{2}{x^2-1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.
 Quindi il limite è 1.
- (b) Per x appartenente al dominio della funzione, si ha $(\frac{x+1}{x-1})^x = e^{x \log \frac{x+1}{x-1}}$.
 Si ha $x \log \frac{x+1}{x-1} = x \log(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1) =$
 $x \log(1 + \frac{2}{x-1}) \sim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{2}{x-1} \sim_{x \rightarrow +\infty} 2$.
 Quindi si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+1}{x-1} = 2$.
 Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{x+1}{x-1}} = e^2.$$

(c) Si ha

$$\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^{(x^2+x+1) \log \frac{x^2+3}{x^2-2}}.$$

Si ha

$$(x^2+x+1) \log \frac{x^2+3}{x^2-2} = (x^2+x+1) \log\left(1 + \frac{x^2+3}{x^2-2} - 1\right) = \\ (x^2+x+1) \log\left(1 + \frac{5}{x^2-2} - 1\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{5}{x^2-2} \sim_{x \rightarrow +\infty} 5.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2+x+1} = e^5.$$

3. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x;$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\log(1+x)};$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^x.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3) - \sin x^3}{\operatorname{ch} x - 1}.$

Risoluzione.

(a) Si ha $(\sin x)^x = e^{x \log \sin x}$; si ha $\lim_{x \rightarrow 0} x \log \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$; quindi si ha $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.

(b) Per x appartenente al dominio della funzione, si ha $x^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x) \log x}$.

Si ha

$$\log(1+x) \log x \sim_{x \rightarrow 0} x \log x \longrightarrow_{x \rightarrow 0} 0.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\log(1+x)} = e^0 = 1.$$

(c) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1\right) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} = +\infty.$$

- (d) Si ha $\log(1+x^3) \sim_{x \rightarrow 0} x^3$, $\sin x^3 \sim_{x \rightarrow 0} x^3$; quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3) - \sin x^3}{\operatorname{ch} x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^3)}{\frac{x^2}{2}} = 0.$$

4. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

Risoluzione. Si ha $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

9.3 Funzioni esponenziali di base a

1. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}) =]0, +\infty[$; quindi si ha $\sup(f) = +\infty$, $\inf f = 0$.

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1000000} - 2^x}{x^{1000000} + 2^x}$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5^x}{x^3 + 2^x}$;
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3^x}{\log x - 3^x}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^2)2^x$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\frac{x^{1000000} - 2^x}{x^{1000000} + 2^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^x}{2^x} = -1$.
 Quindi il limite è -1 .
 (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5^x}{x^3 + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5^x}{2^x} = -\infty$.
 (c) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3^x}{\log x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{-3^x} = -1$.
 (d) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^2)2^x \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 2^x = 0$.

3. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione f (non dipendente da n) tale che

$$(\forall n \in \mathbf{N}^*) x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} 2^x;$$

motivare la risposta.

Risoluzione. Basta prendere $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Per ogni $n \in \mathbf{N}^*$ si ha infatti $x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$ in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per $x \rightarrow +\infty$ rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1 e si ha $\left(\frac{3}{2}\right)^x \ll_{x \rightarrow +\infty} 2^x$ in quanto $\frac{3}{2} < 1$.

4. **Esercizio.** Dare un esempio di una funzione f (non dipendente da a) tale che

$$(\forall a \in]1, +\infty[) x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} a^x ;$$

motivare la risposta.

Risoluzione. Basta prendere $f(x) = x^6$. Si ha infatti $x^5 \ll_{x \rightarrow +\infty} x^6$ in quanto $5 < 6$; per ogni $a > 1$ si ha poi $x^6 \ll_{x \rightarrow +\infty} a^x$ in quanto ogni potenza di esponente strettamente positivo è trascurabile per $x \rightarrow +\infty$ rispetto ad un esponenziale di base strettamente maggiore di 1.

9.4 Funzioni circolari

1. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; dire quanto vale $f(\frac{\pi}{2})$.

Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = \sin x$; quindi si ha $f(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

2. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; che cosa si può dire sulla convergenza di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$?

Risoluzione. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x) = \cos x$; quindi non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. **Esercizio.** Determinare $\cos^2 \alpha$ sapendo che $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Risoluzione. Si ha
 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$.

4. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x}$;
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x} - \sin x}$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} 6 \frac{1}{x} = +\infty$.

(b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x + x}{\sqrt{x} - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$.

5. **Esercizio.** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\overline{\mathbf{R}}$ della seguente funzione:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \operatorname{Arctg} x .$$

Risoluzione. Si ha $f(\mathbf{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; quindi si ha $\sup(f) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f = -\frac{\pi}{2}$.

9.5 Funzioni elementari reali

1. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale della seguente funzione

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Risoluzione. Il dominio naturale di f è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{x-1}{x+1} - 1 \leq 0 \end{cases}, \text{ cioè} \\ \text{a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{-2}{x+1} \leq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{1}{x+1} \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x < -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases}, \\ \text{cioè a } x \geq 1.$$

Quindi si ha $\operatorname{dom}(f) = [1, +\infty[$.

9.6 Massimi e minimi di funzioni

1. **Esercizio.** Dire se la seguente funzione ammette massimo e minimo e in caso affermativo determinarli:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \operatorname{Arcsin} x - x.$$

Risoluzione. Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.

Il massimo ed il minimo di f sono raggiunti nei punti di $]0, 1[$ ove si annulla f' o su $\{0, 1\}$.

Sia $x \in]0, 1[$; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1;$$

la relazione $f'(x) = 0$ è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = 0, \text{ cioè a } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \text{ cioè a } 1 = \sqrt{1-x^2}, \text{ cioè a } 1 = 1 - x^2, \text{ cioè a } x = 0;$$

essendo $x \in]0, 1[$ si ha $f'(x) \neq 0$.

Quindi il massimo ed il minimo di f sono raggiunti su $\{0, 1\}$.

Si ha

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Quindi si ha $\max(f) = \frac{\pi}{2} - 1$, $\min(f) = 0$.

2. **Esercizio.** Sia

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sin x + 2 \cos x ;$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
 (b) in caso affermativo, determinarli (risultato semplificato).

Risoluzione.

- (a) Poichè f è continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.
 (b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f .

Sia $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; si ha

$$f'(x) = \cos x - 2 \sin x ;$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x - 2 \sin x = 0$, cioè se e solo se $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$,
 cioè, essendo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se e solo se $x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$.

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Si ha $f(0) = 2$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Si ha $f(\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) = \sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} + 2 \cos \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}$.

Essendo $0 < \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\sin \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{e } \cos \operatorname{Arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Si ha quindi $f(\operatorname{Arctg} \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\sqrt{5} = \sqrt{5}$.

Quindi si ha $\max(f) = \sqrt{5}$, $\min(f) = 1$.

3. **Esercizio.** Sia $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sin \frac{1}{x^2}$;

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
 (b) in caso affermativo determinarli.

Risoluzione. Posto $g : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ e $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, y \longrightarrow \sin y$, si ha $f = h \circ g$. Quindi si ha $f(\mathbf{R}^*) = h(g(\mathbf{R}^*)) = h(]0, +\infty[) = [-1, 1]$. Quindi f ammette massimo e minimo e si ha $\max(f) = 1$ e $\min(f) = -1$.

4. **Esercizio.** Sia

$$A = \{2^x; x \in]-\infty, 0]\} ;$$

dire se A ammette massimo e se A ammette minimo; determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di A rispetto a $\mathbf{R}$.

Risoluzione. Posto

$$f :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow 2^x ,$$

si ha $A = f(]-\infty, 0])$. Quindi si ha $A =]0, 1]$. Quindi A ammette massimo e si ha $\max(A) = 1$; A non ammette minimo; si ha $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

9.7 Equazioni reali

1. **Esercizio.** Assegnate le funzioni

(a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x + e^x,$

(b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow e^x + \sin x,$

dire se l'equazione di incognita x

$$f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione; in tal caso determinare $a, b \in \mathbf{R}$, con $a < b$ tali che nell'intervallo $]a, b[$ vi sia almeno una soluzione dell'equazione.

Risoluzione.

(a) Si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-1, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

(b) Si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f(-\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$; per il teorema degli zeri di una funzione continua, esiste $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tale che $f(x) = 0$.

9.8 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{x};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \operatorname{tg} x};$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \cos x};$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{\sin x + 2x};$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x};$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)};$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x + \operatorname{Arctg} x};$

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[1000]{x - \log x}}{\sqrt[1000]{x + \log x}};$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)};$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)};$

Risoluzione.

(a) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$ in quanto la funzione $\sin^2 x$ è limitata e la funzione x tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

(b) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$

(c) Si ha

$$\frac{x+\sin x}{2x-\cos x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x - \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(d) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$

(e) Si ha

$$\frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{-x} = -\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

(f) Si ha

$$\frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x(\frac{x^2}{2})} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{\log(1+x)(\operatorname{ch} x - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

(g) Si ha

$$\frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x + \operatorname{Arctg} x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{e^x} = \frac{\frac{1}{2}e^x}{e^x} = \frac{1}{2}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x + \operatorname{ch} x}{e^x - \operatorname{Arctg} x} = \frac{1}{2}.$$

(h) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[1000]{x} - \log x}{\sqrt[1000]{x} + \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}} - \log x}{x^{\frac{1}{1000}} + \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{1000}}}{x^{\frac{1}{1000}}} = 1.$$

(i) Si ha

$$\operatorname{Arctg} x(x - \sin x) \sim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{6} x^4,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3),$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4),$$

$$2 \cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^4),$$

$$\sin^2 x - 2 - 2 \cos x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{4} x^4 +$$

$$o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4} x^4,$$

$$\frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{6} x^4} = -\frac{3}{2}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2 \cos x}{\operatorname{Arctg} x(x - \sin x)} = -\frac{5}{2}.$$

(j) Si ha

$$\log^2(1 + \sin^2 x) \sim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} x^4.$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$2 \cos x = 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$x \sin x + 2 \cos x - 2 = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - 2 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}x^4.$$

Quindi si ha

$$\frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\log^2(1 + \sin^2 x)} = -\frac{1}{12}.$$

9.9 Serie

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - n}{n^2};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n + \operatorname{Arctg} n}.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} - \sin \sqrt{\frac{1}{n}} \right).$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}};$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}};$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}.$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\frac{\sin n - n}{n^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2} = -\frac{1}{n}.$$

Quindi la serie assegnata è divergente negativamente.

(b) Si ha $\frac{n - \sqrt{n}}{n + \operatorname{Arctg} n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$; quindi la serie è divergente positivamente.

(c) Si ha $\sqrt{\frac{1}{n}} - \sin \sqrt{\frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \right)^3 = \frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}}$; quindi la serie è convergente.

(d) Si ha $\frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; quindi la serie è convergente.

(e) Si ha $\sqrt{\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{6n^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}n^{\frac{3}{2}}}.$

Quindi la serie è convergente.

(f) Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{e^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\log n}{e^n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{e^n} = 0.$$

Quindi per il criterio della radice, la serie è convergente.

9.10 Derivabilità e derivate

1. **Esercizio.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

- (a) $f(x) = x^3 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$;
- (b) $f(x) = x^{\cos x}$;
- (c) $f(x) = \frac{\log \operatorname{Arctg}(5x)}{\sin \sqrt{\log x}}$,
- (d) $f(x) = \log \cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}$;
- (e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;
- (f) $f(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{\operatorname{sh} x}$;
- (g) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{Arctg} \log^2(2^x + \operatorname{sh} x)}$;
- (h) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{Arctg} x}$;
- (i) $f(x) = 2^x \log x \operatorname{ch} x$;
- (j) $f(x) = \sin \log(x^3 + 1)$;
- (k) $f(x) = \log_5(x^2 \operatorname{tg}^3 x)$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} + x^3 \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

(b) Si ha $f(x) = e^{\cos x \log x}$; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\cos x \log x} \left(-\sin x \log x + \cos x \frac{1}{x}\right).$$

(c) Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{Arctg}(5x)} \frac{1}{1+(5x)^2} 5 \sin \sqrt{\log x} - \log \operatorname{Arctg}(5x) \cos \sqrt{\log x} \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \frac{1}{x}}{\sin^2 \sqrt{\log x}}.$$

(d) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\cos \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}} \left(-\sin \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

(e) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x} \log x}$; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \log x} \frac{\frac{1}{x} x - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

(f) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{sh} x} \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sh} x}} \operatorname{ch} x .$$

(g) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\operatorname{Arctg} \log^2(2^x + \operatorname{sh} x))^2}} \frac{1}{1 + \log^4(2^x + \operatorname{sh} x)} 2 \log(2^x + \operatorname{sh} x) \frac{1}{2^x + \operatorname{sh} x} (2^x \log 2 + \operatorname{ch} x) .$$

(h) Si ha $f(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x}$; quindi si ha

$$f'(x) = e^{\operatorname{Arctg} x \log \sin x} \left(\frac{1}{1+x^2} \log \sin x + \operatorname{Arctg} x \frac{1}{\sin x} \cos x \right) =$$

$$(\sin x)^{\operatorname{Arctg} x} \left(\frac{\log \sin x}{1+x^2} + \operatorname{Arctg} x \frac{\cos x}{\sin x} \right) .$$

(i) Si ha

$$f'(x) = 2^x \log 2 \log x \operatorname{ch} x + 2^x \frac{1}{x} \operatorname{ch} x + 2^x \log x \operatorname{sh} x .$$

(j) Si ha $f'(x) = \cos \log(x^3 + 1) \frac{1}{x^3 + 1} 3x^2$.

(k) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{tg}^3 x \log 5} (2x \operatorname{tg}^3 x + x^2 3 \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}) .$$

2. **Esercizio.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni f reali di variabile reale definite naturalmente; determinare l'insieme degli $x \in \operatorname{dom}(f)$ nei quali f è derivabile rispetto a $\mathbf{R}$ e in tali x calcolare la derivata rispetto a $\mathbf{R}$.

(a) $f(x) = 2^x \operatorname{Arctg} \sqrt{x}$;(b) $f(x) = 3^x \operatorname{Arcsin}(\log x + 1)$;(c) $f(x) = \sqrt[6]{\operatorname{Arctg} x^2}$.**Risoluzione.**(a) Si ha $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty[$.Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = 2^x \log 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{x} + 2^x \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\mathbf{R}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$

- (b) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \log x + 1 \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log x \leq 0 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x > 0 \\ e^{-2} \leq x \leq 1 \end{cases}$, cioè tali che $e^{-2} \leq x \leq 1$; si ha quindi

$$\operatorname{dom}(f) = [e^{-2}, 1] .$$

Per $x \in]e^{-2}, 1[$ si ha

$$f'(x) = 3^x \log 3 \operatorname{Arcsin}(\log x + 1) + 3^x \frac{1}{\sqrt{1 - (\log x + 1)^2}} \frac{1}{x}.$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow e^{-2}} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in e^{-2} e $f'(e^{-2}) = +\infty$.

Si ha $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$; quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 e $f'(1) = +\infty$.

(c) Si ha $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R}$.

Per $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; f è derivabile in x e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} \frac{1}{1+x^4} 2x = \frac{x}{3(1+x^4)\sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}}.$$

Consideriamo la derivabilità di f in 0; si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x}{3(1+x^4)\sqrt[6]{\operatorname{Arctg}^5 x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x}{3x^{\frac{5}{3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e $f'(0) = +\infty$.

3. **Esercizio.** Calcolare la derivata della seguente funzione

$$f(x) = (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) \operatorname{tg}^2 x$$

in un punto $x \in \operatorname{dom}(f)$, $x \neq 0$.

Risoluzione. Per $x \in \operatorname{dom}(f)$, $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt[3]{x})^2} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{tg}^2 x + (\operatorname{Arctg} \sqrt[3]{x}) 2(\operatorname{tg} x) \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9.11 Studio di funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \operatorname{Arctg} x.$$

Si chiede:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) dire se f ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, determinarli;

- (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

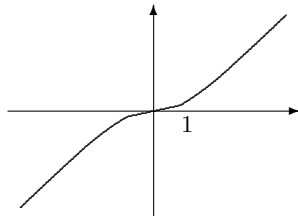
Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (c) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{Arctg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\text{Arctg } x = -\frac{\pi}{2}$; quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e la retta di equazione $y = x - \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto. Analogamente si vede che f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e che la retta di equazione $y = x + \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto.
- (d) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x \neq 0$ e quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty[$; quindi f è strettamente crescente su tutto $\mathbf{R}$; quindi si ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{\mathbf{R}\}, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset.$$

- (e) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$; si ha quindi $f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) < 0$ per $x < 0$; quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$, strettamente concava su $]-\infty, 0]$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0] \} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset.$$



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}.$$

Si chiede:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

- (d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$, cioè tali che $x < -1$ o $x > 1$. Si ha quindi

$$\text{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.
 (c) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1} > 0.$$

Quindi f è strettamente crescente su $] -\infty, -1[$ e su $]1, +\infty[$. Si ha quindi

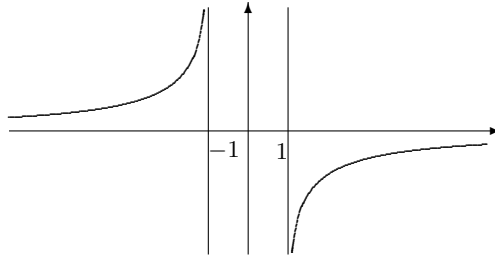
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, -1[,]1, +\infty[\}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \quad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset.$$

- (d) Sia $x \in \text{dom}(f)$; si ha

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi mai; si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, quindi se e solo se $x < -1$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > 0$, quindi se e solo se $x > 1$. Quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, -1[$, strettamente concava su $]1, +\infty[$. Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -1[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]1, +\infty[\}.$$



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{|x-1|-1}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) Determinare il dominio di f ;
- (b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) Studiare la derivabilità di f in 1;
- (e) Determinato il prolungamento continuo di $f|]0, 2[$ a $[0, 2]$, se ne studi la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e 2;
- (f) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x - 1| - 1 \neq 0$, cioè tali che $|x - 1| \neq 1$, cioè tali che $x - 1 \neq 1$ e $x - 1 \neq -1$, cioè tali che $x \neq 2$ e $x \neq 0$. Si ha quindi

$$\text{dom}(f) =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[.$$

- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = +\infty$.
- (c) Sia $x \in \text{dom}(f)$.

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x < 1 \end{cases}.$$

Per $x > 1$ si ha

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) < 0.$$

Quindi f è strettamente decrescente su $[1, 2[$ e su $]2, +\infty[$.

Per $x < 1$ si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) > 0.$$

Quindi f è strettamente crescente su $] -\infty, 0[$ e su $]0, 1[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, 0[,]0, 1] \}, \quad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [1, 2[,]2, +\infty[\}.$$

- (d) Si ha $\lim_{x \rightarrow 1+, x > 1} f'(x) = -e^{-1}$; quindi f è derivabile da destra in 1 e si ha $f'_+(1) = -e^{-1}$.
 Si ha $\lim_{x \rightarrow 1-, x < 1} f'(x) = e^{-1}$; quindi f è derivabile da sinistra in 1 e si ha $f'_-(1) = e^{-1}$.
 Poichè $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, f non è derivabile in 1.

(e) Il prolungamento continuo di $f|]0, 2[$ a $[0, 2]$ è la funzione

$$g : [0, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]0, 2[\\ 0 & \text{per } x \in \{0, 2\} \end{cases} .$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in]0, 2[} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y y^2 = 0.$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2, x \in]0, 2[} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2, x < 2} f'(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2, x < 2} e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y y^2) = 0.$$

Quindi g è derivabile in 2 e si ha $g'(2) = 0$.

(f) Sia $x \in \text{dom}(f)$.

Per $x > 1$ si ha

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)^2 + e^{\frac{1}{x-2}} \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$e^{\frac{1}{x-2}} \frac{1+2x-4}{(x-2)^4} = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{2x-3}{(x-2)^4} .$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{3}{2}$; si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{3}{2}$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{3}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3}{2}, 2[$ e su $]2, +\infty[$, strettamente concava su $[1, \frac{3}{2}]$.

Per $x < 1$ si ha

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} + e^{-\frac{1}{x}} \frac{2x}{x^4} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1-2x}{x^4} .$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$; si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{1}{2}$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, 0[$ e su $]0, \frac{1}{2}]$, strettamente concava su $[\frac{1}{2}, 1]$.

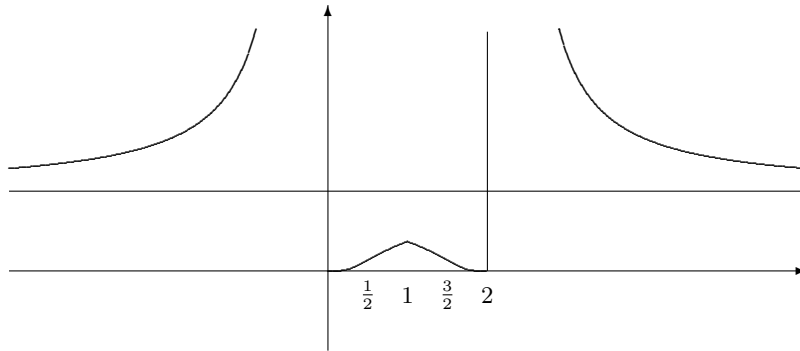
Poichè f è strettamente concava su $[\frac{1}{2}, 1]$ e su $[1, \frac{3}{2}]$ e poichè $f'_-(1) \leq f'_+(1)$, f è strettamente concava su $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{] -\infty, 0[,]0, \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, 2[,]2, +\infty[\} ,$$

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \emptyset \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{ [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \} .$$

Per tracciare il grafico di f teniamo conto che $f(1) = e^{-1} \approx .37$, $\frac{1}{2} = .5$, $\frac{3}{2} = 1.5$, $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = e^{-2} \approx .14$. Si ha



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x-1}e^{-x},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti o i valori di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) studiare la derivabilità di f rispetto a $\mathbf{R}$ in 1;
- (e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = [1, +\infty[$.

- (b) Si ha $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1}e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$.

- (c) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{-x} + \sqrt{x-1}e^{-x}(-1) = e^{-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} \right) = e^{-x} \frac{1-2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x} \frac{1-2x+2}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x} \frac{3-2x}{2\sqrt{x-1}}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3-2x = 0$, cioè se e solo se $2x = 3$, cioè se e solo se $x = \frac{3}{2}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $3-2x > 0$, cioè se e solo se $2x < 3$, cioè se e solo se $x < \frac{3}{2}$. Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x > \frac{3}{2}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[1, \frac{3}{2}]$, strettamente decrescente su $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[1, \frac{3}{2}\right] \right\}, \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset, \mathcal{M}(\searrow) = \left\{ \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\right\}.$$

(d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}e^{-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Quindi f è derivabile rispetto ad $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 e si ha $f'(1) = +\infty$.

(e) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{e^{-x}}{2} \frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{-\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)}{x-1} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \left(-\frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4(x-1)-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4x+4-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{2(x-1)(2x-3)-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2-6x-4x+6-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2-12x+7}{2(x-1)\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 = 0$, cioè se e solo se

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2},$$

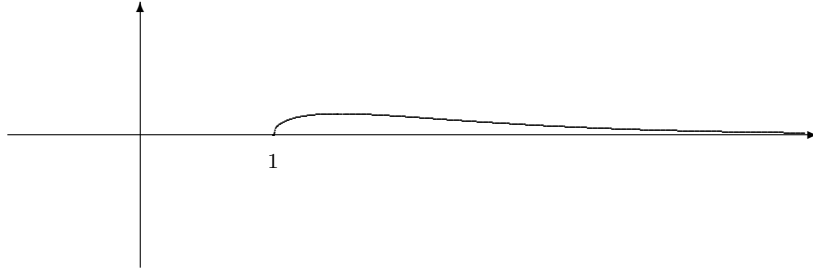
cioè, essendo $x > 1$, se e solo se $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 > 0$, cioè se e solo se $x < \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ o $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$, cioè se e solo se $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $1 < x < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, strettamente concava su $[1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}]$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\right\}, \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left[1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right] \right\}.$$

Per disegnare il grafico osserviamo che $\frac{3}{2} = 1.5$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \approx .15$, $\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx 2.21$, $f(\frac{3+\sqrt{2}}{2}) \approx .12$.



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log |x| - x^2 + 1,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) determinare il dominio di f ;
- (b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);
- (d) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo; in caso affermativo determinarli;
- (e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- (c) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{x} - 2x = 0$, cioè se e solo se $\frac{1-2x^2}{x} = 0$, cioè se e solo se $1 - 2x^2 = 0$, cioè se e solo se $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ha $1 - 2x^2 > 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ o $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e su $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$; f è strettamente decrescente su $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$ e su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}],]0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \}, \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{ [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[, [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[\}.$$

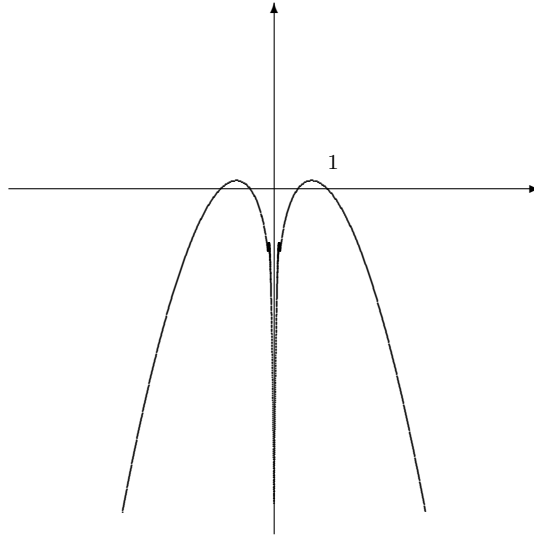
(d) Si ha $f(\mathbf{R}^*) =]-\infty, \frac{1}{2}(1 - \log 2)]$. Quindi f ammette massimo e si ha $\max(f) = \frac{1}{2}(1 - \log 2)$; f non ammette minimo.

(e) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$.

Quindi f è strettamente concava su $] -\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}.$$

Si ha $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx .71$, $f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} * 1 - \log 2 \approx .15$.



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 \log^3 x,$$

rispondendo alle seguenti domande:

- determinare il dominio di f ;
- calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (resp. strettamente decrescente);
- determinato il prolungamento continuo di f a $[0, +\infty[$, studiarne la derivabilità rispetto a $\mathbf{R}$ in 0;
- determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (resp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

- Si ha $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$.

(b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(c) Sia $x \in]0, +\infty[$; si ha
 $f'(x) = 4x^3 \log^3 x + 3x^4 \log^2 x \frac{1}{x} = 4x^3 \log^3 x + 3x^3 \log^2 x =$
 $x^3 \log^2 x (4 \log x + 3)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4 \log x + 3 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = -\frac{3}{4}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{-\frac{3}{4}}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $e^{-\frac{3}{4}} < x < 1$ o $x > 1$. Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{-\frac{3}{4}}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[e^{-\frac{3}{4}}, 1]$ e su $[1, +\infty[$ e quindi su $[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $]0, e^{-\frac{3}{4}}]$. Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[, \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \{]0, e^{-\frac{3}{4}}]\}.$$

(d) Il prolungamento continuo di f a $[0, +\infty[$ è la funzione

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} x^4 \log^3 x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 \log^3 x + 3x^3 \log^2 x) = 0.$$

Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$.

(e) Sia $x \in]0, +\infty[$; si ha
 $f''(x) = 12x^2 \log^3 x + 12x^3 \log^2 x \frac{1}{x} + 9x^2 \log^2 x + 6x^3 \log x \frac{1}{x} =$
 $12x^2 \log^3 x + 12x^2 \log^2 x + 9x^2 \log^2 x + 6x^2 \log x =$
 $3x^2 \log x (4 \log^2 x + 7 \log x + 2)$.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4 \log^2 x + 7 \log x + 2 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}$ o $x = e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} < x < e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}$ o $x > 1$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}$ o $e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} < x < 1$.

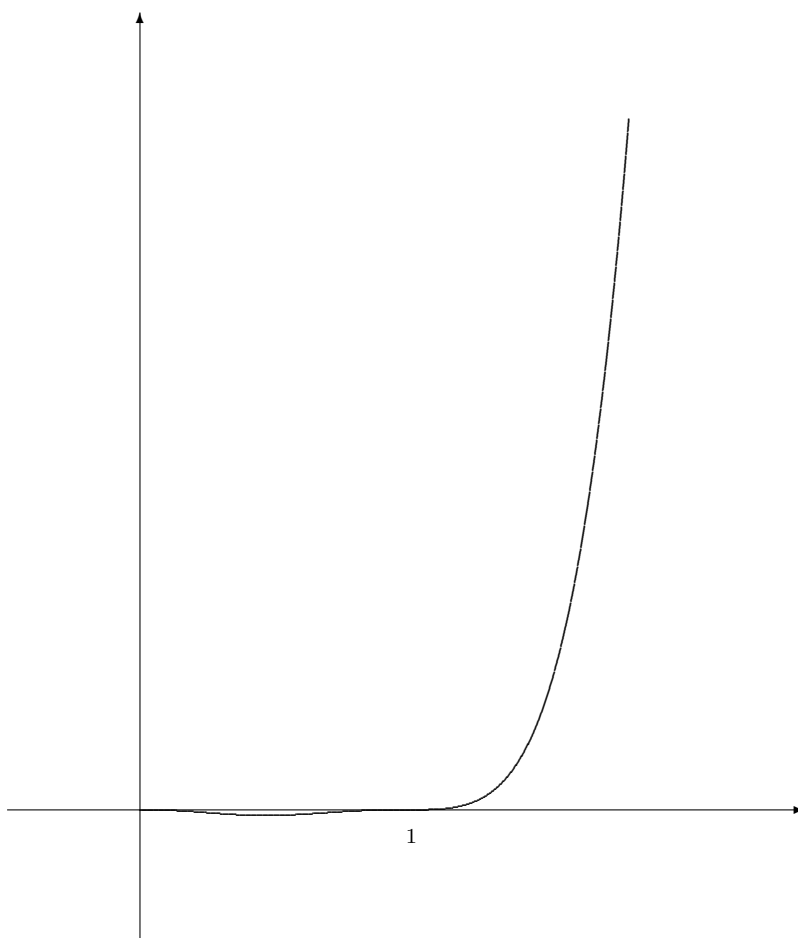
Quindi f è strettamente convessa su $[e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}]$ e su $[1, +\infty[$; f è strettamente concava su $]0, e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}]$ e su $[e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}, 1]$. Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ \left[e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} \right], [1, +\infty[\right\},$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ \left] 0, e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} \right], \left[e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}, 1 \right] \right\}.$$

Si ha $f(0) = 1$, $e^{-\frac{3}{4}} \approx .47$, $f\left(e^{-\frac{3}{4}}\right) = e^{-3} \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64} e^{-3} \approx -.02$, $e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}} \approx .25$, $f\left(e^{\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$, $e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}} \approx .70$, $f\left(e^{\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;
- (b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in $-\frac{1}{2}$;
- (e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f .

Risoluzione.

(a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2 - 1)e^{2x+1} & \text{per } x \geq -\frac{1}{2} \\ (2x^2 - 1)e^{-2x-1} & \text{per } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f'(x) = 4xe^{2x+1} + (2x^2 - 1)e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}(2x^2 + 2x - 1).$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2 + 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$,
cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2 + 2x - 1 > 0$, cioè se e solo se $x < \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$
o $x > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Si ha quindi f strettamente crescente su $[\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty[$ e f strettamente
decrescente su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$.

Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f'(x) = 4xe^{-2x-1} + (2x^2 - 1)e^{-2x-1} \cdot (-2) = -2e^{-2x-1}(2x^2 - 2x - 1).$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2 - 2x - 1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$,
cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2 + 2x - 1 < 0$, cioè se e solo se $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$,
cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.

Si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x < -\frac{1}{2}$.

Quindi f è strettamente decrescente su $] -\infty, -\frac{1}{2}]$.

Essendo f strettamente decrescente su $] -\infty, -\frac{1}{2}]$ e su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$, f è
strettamente decrescente su $] -\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}]$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[\right\}, \quad \mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{M}(\searrow) = \left\{] -\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right] \right\}.$$

(d) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+, x > -\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+, x > -\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}(x^2 + 2x - 1) = -3.$$

Quindi f è derivabile da destra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_+(\frac{-1}{2}) = -3$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-, x < -\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-, x < -\frac{1}{2}} -2e^{-2x-1}(x^2 - 2x - 1) = -1.$$

Quindi f è derivabile da sinistra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_-(\frac{-1}{2}) = -1$.

Essendo $f'_+(\frac{-1}{2}) \neq f'_-(\frac{-1}{2})$, f non è derivabile in $-\frac{1}{2}$.

- (e) Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha

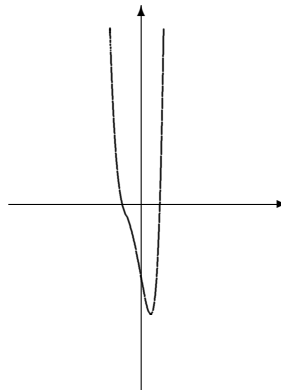
$$f''(x) = 2((4x+2)e^{2x+1} + (2x^2+2x-1)e^{2x+1} \cdot 2) =$$

$$4e^{2x+1}(2x+1+2x^2+2x-1) = 4e^{2x+1}(2x^2+4x) = 8e^{2x+1}(x^2+2x).$$
 Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2+2x=0$, cioè se e solo se $x=0$ o $x=-2$,
 cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x=0$.
 Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2+2x > 0$, cioè se e solo se $x < -2$ o $x > 0$,
 cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > 0$.
 Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$.
 Si ha quindi f strettamente convessa su $[0, +\infty[$ e F strettamente concava
 su $[-\frac{1}{2}, 0]$.
 Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha

$$f''(x) = -2((4x-2)e^{-2x-1} + (2x^2-2x-1)e^{-2x-1} \cdot (-2)) =$$

$$4e^{-2x-1}(-2x+1+2x^2-2x-1) = 4e^{-2x-1}(2x^2-4x) = 8e^{-2x-1}(x^2-2x).$$
 Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2-2x=0$, cioè se e solo se $x=0$ o $x=2$,
 cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.
 Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2-2x > 0$, cioè se e solo se $x < 0$ o $x > 2$,
 cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$, sempre.
 Si ha $f''(x) < 0$ mai.
 Quindi f è strettamente convessa su $] -\infty, -\frac{1}{2}]$
 Si ha quindi
 $\mathcal{C}(\uparrow) = \{] -\infty, -\frac{1}{2}[, [0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{[-\frac{1}{2}, 0]\}.$

Si ha $e \approx 2.72$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$, $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$.



8. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}},$$

rispondendo alle seguenti domande:

- (a) (p. .1*) determinare il dominio di f ;

- (b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;
- (c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;
- (d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;
- (e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di f in $]-2, +\infty[$ e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -2 ;
- (f) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f . Per disegnare il grafico di f si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(0) \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$, $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$, $-\frac{11}{7} \approx -1.57$, $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $\text{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$.
- (b) Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = +\infty$,
- (c) Si ha $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} -x$; si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x)$.
Per $y \rightarrow 0$ si ha $e^y = 1 + y + o(y)$.
Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha $e^{-\frac{1}{2+x}} = 1 - \frac{1}{2+x} + o(\frac{1}{x})$.
Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((-x+1) \left(1 - \frac{1}{2+x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + x \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{x}{2+x} + o(1) + 1 + x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2+x} + o(1) + 1 \right) = 2. \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow +\infty$ e l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2.$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e che l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2.$$

(d) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2+x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2 + 1} = e^{-\frac{1}{2+x}} \left(\frac{1-x}{(2+x)^2} - 1 \right) = -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 5x + 3}{(2+x)^2}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2 + 5x + 3 < 0$, cioè se e solo se $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ o $x > \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Si ha quindi f è strettamente crescente su $[\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[$ e su $] -2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}]$; f è strettamente decrescente su $] -\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}]$ e su $[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ \left[\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[\right], \left[-2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \right] \right\},$$

$$\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset.$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{ \left] -\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \right], \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty \right[\right\}.$$

(e) Il prolungamento continuo di f in -2 è la funzione

$$g : [-2, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in] -2, +\infty \\ 0 & \text{per } x = -2 \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2 + 5x + 3}{(2+x)^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left(\left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) (x^2 + 5x + 3) \right). \end{aligned}$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} \left(-e^{-\frac{1}{2+x}} \left(-\frac{1}{2-x} \right)^2 \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y y^2) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} (x^2 + 5x + 3) = -3.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow -2, x \neq -2} g'(x) = 0(-3) = 0.$$

Quindi g è derivabile in -2 e $g'(-2) = 0$.

(f) Per ogni $x \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= - \left(e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} + \right. \\
 &\quad \left. e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{(2x+5)(2+x)^2 - 2(2+x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^2} \right) = \\
 &= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3 + (2x+5)(4+4x+x^2) - (4+2x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} = \\
 &= -e^{-\frac{1}{2+x}} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{x^2+5x+3+8x+8x^2+2x^3+20+20x+5x^2-4x^2-20x-12-2x^3-10x^2-6x}{(2+x)^4} \\
 &= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{7x+11}{(2+x)^4} .
 \end{aligned}$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $7x+11=0$, cioè se e solo se $x = -\frac{11}{6}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $7x+11 < 0$, cioè se e solo se $x < -\frac{11}{7}$.

Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > -\frac{11}{7}$.

Quindi f strettamente convessa su $] -\infty, -2[$ e su $] -2, -\frac{11}{7}[$, f è strettamente concava su $[-\frac{11}{7}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{] -\infty, -2[,] -1, -\frac{11}{7}[\right\},$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset,$$

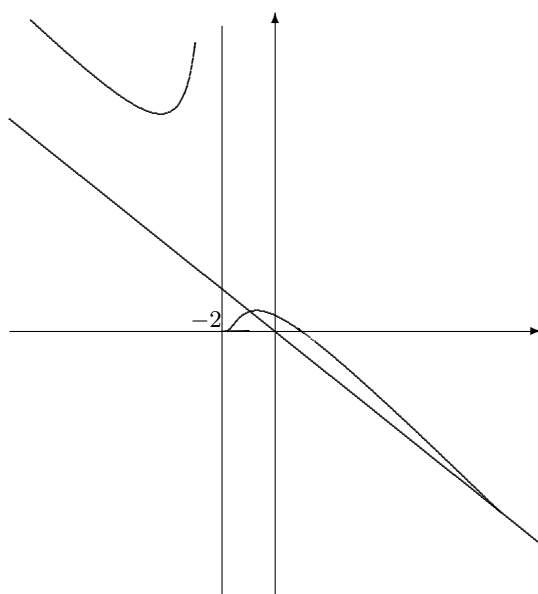
$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{11}{7}, +\infty[\right\}.$$

Si ha $f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx 0.70$,

$f(\frac{-5-\sqrt{3}}{2}) = \frac{7+\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1+\sqrt{13}}} \approx 8.19$,

$f(\frac{-5+\sqrt{3}}{2}) = \frac{7-\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1-\sqrt{13}}} \approx 0.79$,

$\frac{-11}{7} \approx -1.57$, $f(\frac{-11}{7}) = \frac{18}{7} e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.25$



Capitolo 10

Argomento di un numero complesso

10.1 Argomento di un numero complesso

1. **Esercizio.** Trovare un argomento di ciascuno dei seguenti numeri complessi

(a) $-1 - \sqrt{3}i$,

(b) $-\sqrt{3} - i$,

esprimendolo senza l'uso di funzioni trascendenti.

Risoluzione.

(a) Si ha $|-1 - \sqrt{3}i| = 2$.

Si ha $-1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; il numero reale θ è un argomento di $-1 - \sqrt{3}i$ se e solo se $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ e $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; quindi se e solo se $\theta = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

Si può quindi scegliere $\theta = -\frac{2}{3}\pi$.

(b) Si ha $|\sqrt{3} - i| = 2$.

Si ha $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right)$.

Quindi si ha $-\frac{5}{6}\pi \in \arg(\sqrt{3} - i)$.

2. **Esercizio.** Trovare un numero complesso z tale che 2 sia un argomento di z .

Risoluzione. Si può prendere $z = e^{2i}$.

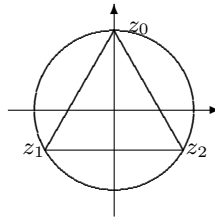
10.2 Radici complesse

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse, esprimendo le soluzioni senza l'uso di funzioni trascendenti:

- (a) $z^3 = -27i$;
 (b) $z^3 = -27$;
 (c) $z^6 = -64i$;
 (d) $z^2 = \sqrt{3} + i$;
 (e) $z^4 = 20i$;
 (f) $z^2 = -\sqrt{3} + i$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $|-27i| = 27$, $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-27i)$. Si ha $\sqrt[3]{27} = 3$ e $\frac{1}{3}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$.



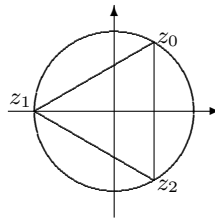
Si ha quindi

$$z_0 = 3i,$$

$$z_1 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i,$$

$$z_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i.$$

- (b) Si ha $|-27| = 27$, $\pi \in \arg(-27)$. Si ha $\sqrt[3]{27} = 3$.



Si ha quindi

$$z_0 = 3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i,$$

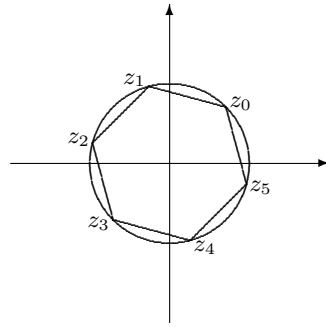
$$z_1 = -3,$$

$$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i.$$

- (c) Si ha $|-64i| = 64$, $\frac{3}{2}\pi \in \arg(-64i)$. Si ha $\sqrt[6]{64} = 2$ e $\frac{1}{6}\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$.

Si ha quindi

$$z = 2e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6})i} = 2e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$



Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\
 z_1 &= 2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})) = \\
 &= 2(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}). \\
 z_2 &= 2(\cos(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3})) = \\
 &= 2(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2})) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + i(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4})) = \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}). \\
 z_3 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \\
 z_4 &= \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}). \\
 z_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}).
 \end{aligned}$$

(d) Si ha $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Si ha $\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Se $t \in \mathbf{R}$, si ha $t \in \arg(\sqrt{3}i)$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si può scegliere $t = \frac{\pi}{6}$.

Si ha quindi

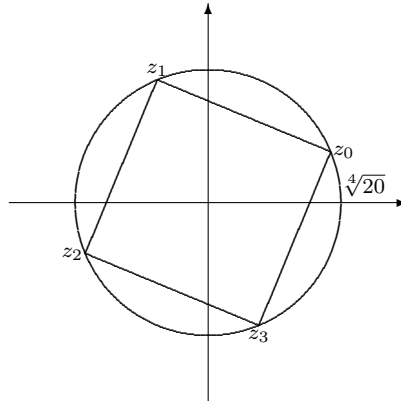
$$\begin{aligned}
 z &= \pm \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \right) \right) = \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}} \right) = \\
 &= \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \right) \pm \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \right) = \\
 &= \pm \left(\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})2}{4}} + i \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})2}{4}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\left\{ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right\}.$$

(e) Si ha $|20i| = 20$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg(20i)$.

Si ha $z_k = \sqrt[4]{20}e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})} = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}))$, per un $k = 0, 1, 2, 3$.



Si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{20}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) = \sqrt[4]{20}(\cos(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})) = \\ &= \sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{2}}{2}}) = \sqrt[4]{20}(\sqrt{\frac{1+\sqrt{22}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}) = \\ &= \sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}). \end{aligned}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2});$$

$$z_2 = \sqrt[4]{20}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2});$$

$$z_3 = \sqrt[4]{20}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2});$$

(f) Si ha $|\sqrt{3} + i| = 2$.

$$\text{Si ha } -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Se $t \in \mathbf{R}$ si ha $t \in \arg(-\sqrt{3} + i)$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \text{ si ha quindi } \frac{5}{6}\pi \in \arg(-\sqrt{3} + i).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \\ &= \pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right) = \\ &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right) = \\ &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right) = \end{aligned}$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right).$$

2. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

- (a) $z^3 = -1 - \sqrt{3}i$;
- (b) $z^5 = -\sqrt{3} - i$;
- (c) $z^3 = 7 - 3i$;
- (d) $z^3 = 5 - 4i$;
- (e) $z^4 = -5 + 3i$;
- (f) $z^2 = -5 + 7i$;
- (g) $z^2 = e^i$;
- (h) $z^3 + iz = 0$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $|-1 - \sqrt{3}i| = 2$ e $-\frac{2}{3}\pi \in \arg(-1 - \sqrt{3}i)$; quindi si ha
 $z = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3}}$ per un $k = 0, 1, 2$.

- (b) Si ha $|\sqrt{3} - i| = 2$; si ha
 $-\sqrt{3} - i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$;
 il numero reale t è un argomento di $-\sqrt{3} - i$ se e solo se

$$\begin{cases} \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin t = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

 si può scegliere $t = \frac{7}{6}\pi$; quindi si ha
 $z = \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{5}}$, per un $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

- (c) Si ha $|7 - 3i| = \sqrt{58}$ e $-\text{Arctg} \frac{3}{7} \in \arg(7 - 3i)$; quindi si ha

$$z = \sqrt[6]{58}e^{\frac{-i \text{Arctg} \frac{3}{7} + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- (d) Si ha $|5 - 4i| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$ e $-\text{Arctg} \frac{4}{5} \in \arg(5 - 4i)$; quindi si ha
 $z = \sqrt[3]{\sqrt{41}}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{4}{5} + 2k\pi}{3}}i = \sqrt[6]{41}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{4}{5} + 2k\pi}{3}}i$, per un $k = 0, 1, 2$.

- (e) Si ha $|-5 + 3i| = \sqrt{34}$ e $-\text{Arctg} \frac{3}{5} + \pi \in \arg(5 + 3i)$; quindi si ha

$$z = \sqrt[8]{34}e^{i\frac{-\text{Arctg} \frac{3}{5} + \pi + 2k\pi}{4}}, \text{ per un } k = 0, 1, 2, 3.$$

- (f) Si ha $|-5 + 7i| = \sqrt{74}$, $-\text{Arctg} \frac{7}{5} + \pi \in \arg(-5 + 7i)$; quindi si ha

$$z = \pm \sqrt[4]{74}e^{\frac{-\text{Arctg} \frac{7}{5} + \pi}{2}}i.$$

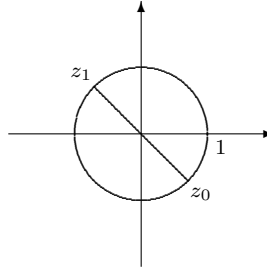
(g) Si ha $|e^i| = 1$ e $1 \in \arg(1)$; quindi si ha

$$z = \pm e^{\frac{1}{2}i} = \pm \left(\cos \frac{1}{2} + i \sin \frac{1}{2} \right).$$

(h) Si ha $z^3 + iz = 0$ se e solo se $z(z^2 + i) = 0$, cioè se e solo se $z = 0$ o $z^2 + i = 0$, cioè se e solo se $z = 0$ o $z^2 = -i$.

Una soluzione è $z = 0$; le altre sono le soluzioni di $z^2 = -i$.

Si ha $|-i| = 1$ e $-\frac{1}{2}\pi \in \arg(-i)$.



Quindi le soluzioni di $z^2 = -i$ sono

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

Le soluzioni dell'equazione data sono quindi $0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

3. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse esprimendo le soluzioni per radicali, cioè senza l'uso di funzioni trascendenti:

(a) $z^2 - 3z - 4i = 0$;

(b) $z^2 - 5z - 1 = 0$;

(c) $z^2 - 2iz + 4 = 0$.

Risoluzione.

(a) Il polinomio $p(z) = z^2 - 3z - 4i$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = 1 + 4i$.

Troviamo le radici quadrate di $1 + 4i$.

Si ha $|1 + 4i| = \sqrt{17}$ e $\operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \in \arg(1 + 4i)$.

Le radici di $1 + 4i$ sono quindi

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt[4]{17} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}} \right) \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{17} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{Arccos} \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{17} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{17} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2\sqrt{17}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2\sqrt{17}}} \right) = \\ & \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi $z = 1 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right)$.

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$$

e

$$z = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}.$$

- (b) Il polinomio $p(z) = z^2 - 5z - i$ ha discriminante $\Delta = 25 + 4i$.

Troviamo le radici quadrate di $25 + 4i$.

Si ha $|1 - 4i| = \sqrt{641}$ e $\operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \in \arg(25 + 4i)$.

Le radici di $25 + 4i$ sono quindi

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt[4]{641} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}} \right) \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{641} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{Arccos} \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) = \\ & \pm \sqrt[4]{641} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{25}{\sqrt{641}}}{2}} \right) = \pm \sqrt[4]{17} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2\sqrt{641}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2\sqrt{641}}} \right) = \\ & \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi $z = \frac{1}{2} \left(5 \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}} \right) \right)$.

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}}$$

e

$$z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641}+25}{2}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{641}-25}{2}}$$

- (c) Il polinomio $p(z) = z^2 - 2iz + 4$ ha discriminante Δ tale che $\frac{\Delta}{4} = -1 - 4 = -5$.

Le radici quadrate di -5 sono $\pm\sqrt{5}i$.

Si ha quindi $z = i \pm \sqrt{5}i$.

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$z = (1 + \sqrt{5}i) \text{ e } z = (1 - \sqrt{5}i).$$

10.3 Logaritmi complessi

1. **Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni complesse:

(a) $e^z = 2 - 7i$;

(b) $e^z = -3$;

(c) $e^z = 5e^{-3i}$.

Risoluzione.

- (a) Si ha $|2 - 7i| = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$ e $-\operatorname{Arctg} \frac{7}{2} \in \arg(2 - 7i)$; quindi si ha $z = \log \sqrt{53} + i(-\operatorname{Arctg} \frac{7}{2} + 2k\pi)$ per un $k \in \mathbf{Z}$.
- (b) Si ha $|-3| = 3$ e $\pi \in \arg(-3)$; quindi si ha $z = \log 3 + i(\pi + 2k\pi) = \log 3 + (1 + 2k)\pi i$ per un $k \in \mathbf{Z}$.
- (c) Si ha $|5e^{-3i}| = 5$ e $3 \in \arg(5e^{-3i})$; quindi si ha $z = \log 5 + i(-3 + 2k\pi)$ per un $k \in \mathbf{Z}$.

2. **Esercizio.** Risolvere la seguente equazione complessa:

$$\sin z = 2.$$

Risoluzione. L'equazione è equivalente a

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2, \text{ cioè a}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i, \text{ cioè a}$$

$$e^{iz} - 4i - e^{-iz} = 0, \text{ cioè a}$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

Poniamo $w = e^{iz}$; l'equazione diventa

$$w^2 - 4iw - 1 = 0.$$

Il discriminante Δ del polinomio $w^2 - 4iw - 1$ è tale che $\frac{\Delta}{4} = -5$.

Le radici quadrate di -5 sono $\pm\sqrt{5}i$. Le soluzioni dell'equazione $w^2 - 4iw - 1 = 0$ sono quindi $w = 2i \pm \sqrt{5}i = (2 \pm \sqrt{5})i$.

Supponiamo $w = (2 + \sqrt{5})i$; si ha

$$e^{iz} = (2 + \sqrt{5})i.$$

Si ha $|(2 + \sqrt{5})i| = 2 + \sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{2} \in \arg((2 + \sqrt{5})i)$; si ha quindi

$$iz = \log(2 + \sqrt{5}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ per un } k \in \mathbf{Z};$$

quindi

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2 + \sqrt{5})i, \text{ per un } k \in \mathbf{Z}.$$

Supponiamo $w = (2 - \sqrt{5})i$; si ha

$$e^{iz} = (2 - \sqrt{5})i.$$

Si ha $|(2 - \sqrt{5})i| = \sqrt{5} - 2$ e $-\frac{\pi}{2} \in \arg((2 - \sqrt{5})i)$; si ha quindi

$$iz = \log(\sqrt{5} - 2) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ per un } k \in \mathbf{Z};$$

quindi

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5} - 2)i, \text{ per un } k \in \mathbf{Z}.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è quindi

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(2 + \sqrt{5})i; k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \log(\sqrt{5} - 2)i; k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Capitolo 11

Primitive ed integrali

11.1 Integrali di base

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \operatorname{sh} x + 4 \cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$(b) \int_2^3 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \operatorname{ch} x + 4 \cdot 5^x - \frac{3}{1+x} \right) dx.$$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \operatorname{sh} x + 4 \cdot 3^x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx &= \\ \left[3 \operatorname{Argsh} x + 2 \operatorname{ch} x + 4 \frac{3^x}{\log 3} - 3 \operatorname{tg} x \right]_0^1 &= \\ 3 \operatorname{Argsh} 1 + 2 \operatorname{ch} 1 + \frac{12}{\log 3} - 3 \operatorname{th} 1 - 2 - \frac{4}{\log 3} &= \\ 3 \operatorname{Argsh} 1 + 2 \operatorname{ch} 1 + \frac{8}{\log 3} - 3 \operatorname{th} 1 - 2. \end{aligned}$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_2^3 \left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 2 \operatorname{ch} x + 4 \cdot 5^x - \frac{3}{1+x} \right) dx &= \\ \left[3 \operatorname{Argch} x + 2 \operatorname{sh} x + 4 \frac{5^x}{\log 5} - 3 \log |x+1| \right]_2^3 &= \\ 3 \operatorname{Argch} 3 + 2 \operatorname{sh} 3 + \frac{500}{\log 5} - 3 \log 4 - 3 \operatorname{Argch} 2 - 2 \operatorname{sh} 2 - \frac{100}{\log 5} + 3 \log 3 &= \\ 3 \operatorname{Argch} 3 - 3 \operatorname{Argch} 2 + 2 \operatorname{sh} 3 - 2 \operatorname{sh} 2 + 3 \log \frac{3}{4} + \frac{400}{\log 5}. \end{aligned}$$

11.2 Integrali immediati

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx;$$

- (b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{3x^3 + 2} dx;$
- (c) $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx;$
- (d) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx;$
- (e) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$
- (f) $\int_0^1 x \sin x^2 dx;$
- (g) $\int_0^1 x^2 \sin x^3 dx;$
- (h) $\int_0^1 x e^{-x^2} dx;$
- (i) $\int_0^1 \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx;$
- (j) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dx;$
- (k) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (2x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{3x^3 + 2} dx &= \frac{1}{9} \int_0^1 (3x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} (9x^2) dx = \frac{1}{9} \left[\frac{(3x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (5^{\frac{3}{2}} - \\ &2^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{27} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx &= \int_0^1 (x^2 + x + 3)^{-\frac{1}{2}} (2x + 1) dx = \left[\frac{(x^2+x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \\ &2 [\sqrt{x^2 + x + 3}]_0^1 = 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

(d) Si ha

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} (2x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = \sqrt{11} - \sqrt{2}.$$

(e) Si ha

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = - \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = -(e^{\frac{1}{2}} - e) = e - \sqrt{e}.$$

(f) Si ha

$$\int_0^1 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin x^2) (2x) dx = \frac{1}{2} [-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 1) = \frac{1}{2} (1 - \cos 1).$$

(g) Si ha

$$\int_0^1 x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\sin x^3) (3x^2) dx = \frac{1}{3} [-\cos x^3]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 1.$$

(h) Si ha

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}).$$

- (i) Si ha

$$\int_0^1 \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 x} (2 \sin x \cos x) dx = \frac{1}{2} [\log(1 + \sin^2 x)]_0^1 = \frac{1}{2} \log(1 + \sin^2 1).$$
- (j) Si ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x} (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = [\log \operatorname{tg} x]_{\frac{1}{2}}^1 = \log \operatorname{tg} 1 - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \log \frac{\operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}}.$$
- (k) Si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2.$$

11.3 Integrazione per sostituzione

1. **Esercizio.** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x + 2)} dx.$$

Risoluzione. Si ha

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{x(\log x + 2)} dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \frac{1}{x} dx.$$

Integriamo

per sostituzione calcolando $\int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$ attraverso $\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(y) dy$; come funzione $\varphi(x)$ consideriamo la funzione $\log x$; poniamo dunque $y = \log x$; per $x = \frac{1}{e}$ si ha $y = -1$; per $x = e$, si ha $y = 1$; si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{|\log x|}{\log x + 2} \frac{1}{x} dx &= \int_{-1}^1 \frac{|y|}{y + 2} dy = \\ &= \int_{-1}^0 \frac{|y|}{y + 2} dy + \int_0^1 \frac{|y|}{y + 2} dy = \\ &= \int_{-1}^0 -\frac{y}{y + 2} dy + \int_0^1 \frac{y}{y + 2} dy = \\ &= -\int_{-1}^0 \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy + \int_0^1 \frac{y + 2 - 2}{y + 2} dy = \\ &= -\int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{y + 2}\right) dy + \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{y + 2}\right) dy = \\ &= -[y - 2 \log(y + 2)]_{-1}^0 + [y - 2 \log(y + 2)]_0^1 = \\ &= -(-2 \log 2 + 1) + 2 - 2 \log 4 + 2 \log 2 = 2 \log 2 - 1 + 2 - 4 \log 2 + 2 \log 2 = 1. \end{aligned}$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx;$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx;$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx.$

Risoluzione.

(a) Poniamo $\sqrt{x+1} = t$; si ha $x+1 = t$, $x = t^2 - 1$, $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = \sqrt{2}$; si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2-1+2} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$2 \int_1^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{t^2+1}) dt = 2[t - \operatorname{Arctg} t]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - \operatorname{Arctg} \sqrt{2} - 1 + \frac{\pi}{4}).$$

(b) Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 2$ si ha $t = \sqrt{2}$.

Si ha quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{1+t}) dt = 2[t - \log(1+t)]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$2(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) - 1 + \log 2).$$

(c) Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$ e $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = 2$ si ha $t = \sqrt{2}$; quindi si ha

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t+1} 2t dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Attraverso la divisione $t^3 : (t+1)$ si trova $t^3 = (t+1)(t^2 - t + 1) - 1$; quindi si ha

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{t+1} dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$2 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \log(1+t) \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2})^3 - 2 + 2\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2}) =$$

$$\frac{4}{3} \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 - \log(1+\sqrt{2}) = \frac{10}{3} \sqrt{2} - 2 - \log(1+\sqrt{2}).$$

(d) Poniamo $e^x = t$; si ha $x = \log t$; si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$ si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Siano $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

per ogni $t \in \mathbf{R} - \{0, -1\}$. Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt,$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$. Dando a t il valore 0 si trova $A = 1$; dando a t il valore -1 si trova $-1 = B$, cioè $B = -1$. Quindi si ha

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Quindi si ha

$$\int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = [\log t - \log(t+1)]_1^e = 1 - \log(e+1) + \log 2.$$

3. **Esercizio.** Sia $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, t \rightarrow t^2$; sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua; calcolare

$$\int_0^4 f(x) dx, \text{ sapendo che } f(\varphi(t)) = t, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

Risoluzione. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha $\varphi'(t) = 2t$; quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} f(x) dx = \int_0^2 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_0^2 t 2t dt = 2 \int_0^2 t^2 dt = \\ &= 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

11.4 Integrazione per parti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_0^1 x e^{-x} dx$;
- (b) $\int_0^1 x \sin(2x) dx$;
- (c) $\int_1^2 x \log x dx$;
- (d) $\int_0^1 x \operatorname{Arctg} x dx$;
- (e) $\int_0^1 \operatorname{Arctg}(2x) dx$;
- (f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(2x) dx$;
- (g) $\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) dx$;
- (h) $\int_1^2 \log\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx$;
- (i) $\int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx$.

Risoluzione.

- (a) Si ha

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$
- (b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(2x) dx &= \left[x \left(-\cos(2x) \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 -\cos(2x) \frac{1}{2} dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2} x \cos(2x) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^1 = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{1}{4} \sin 2. \end{aligned}$$
- (c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \log x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \log 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \operatorname{Arctg} x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(e) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{Arctg}(2x) \, dx &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2} \, dx = \\ &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{8x}{1+4x^2} \, dx = \\ &= [x \operatorname{Arctg}(2x)]_0^1 - \frac{1}{4} [\log(1+4x^2)]_0^1 = \\ &= \operatorname{Arctg} 2 - \frac{1}{4} \log 5.\end{aligned}$$

(f) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(2x) \, dx &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx = \\ &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x)^{-\frac{1}{2}} (-8x) \, dx = \\ &= [x \operatorname{Arcsin}(2x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \left[\frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = [x \operatorname{Arcsin}(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(g) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+2)^3 \cos(2x+1) \, dx &= \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2)^3 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) 3(x+2)^2 \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) \right]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+2)^2 \sin(2x+1) \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) \right]_0^1 - \\ &= \frac{3}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} \cos(2x+1)(x+2)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2} \cos(2x+1) 2(x+2) \, dx \right) = \\ &= \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \right]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 (x+2) \cos(2x+1) \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 \right]_0^1 - \\ &= \frac{3}{2} \left(\left[\frac{1}{2} \sin(2x+1)(x+2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(2x+1) \, dx \right) = \\ &= \left[\frac{1}{2} (x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4} (x+2)^2 - \frac{3}{4} (x+2) \sin(2x+1) \right]_0^1 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4} \int_0^1 \sin(2x+1) dx = \\
& \left[\frac{1}{2}(x+2)^3 \sin(2x+1) + \frac{3}{4}(x+2)^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{4}(x+2) \sin(2x+1) - \frac{3}{8} \cos(2x+1) \right]_0^1 = \\
& \frac{27}{2} \sin 3 + \frac{27}{4} \cos 3 - \frac{9}{4} \sin 3 - \frac{3}{8} \cos 3 - 4 \sin 1 - 3 \cos 1 + \frac{3}{2} \sin 1 + \frac{3}{8} \cos 1 = \\
& \frac{45}{4} \sin 3 + \frac{51}{8} \cos 3 - \frac{5}{2} \sin 1 - \frac{21}{8} \cos 1 .
\end{aligned}$$

(h) Si ha

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx = \int_1^2 \log \frac{1+x^2}{x^2} dx = \\
& \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 x \frac{x^2}{1+x^2} \frac{2xx^2 - 2x(1+x^2)}{x^4} dx = \\
& \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{x(1+x^2)} dx = \\
& \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[x \log \frac{1+x^2}{x^2} + 2 \operatorname{Arctg} x \right]_1^2 = \\
& 2 \log \frac{5}{4} + 2 \operatorname{Arctg} 2 - \log 2 - 2 \operatorname{Arctg} 1 = 2 \operatorname{Arctg} 2 + \log \frac{25}{32} - \frac{\pi}{2} .
\end{aligned}$$

(i) Tendendo conto dei calcoli che seguiranno, integriamo per parti scegliendo come primitiva di 1 la funzione $x+1$; si ha

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \log \frac{1+x}{3+x} dx = \\
& \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \frac{3+x}{1+x} \frac{3+x-(1+x)}{(3+x)^2} dx = \\
& \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{3+x} dx = \\
& \left[(x+1) \log \frac{1+x}{3+x} - 2 \log(3+x) \right]_0^1 = \\
& 2 \log \frac{1}{2} - 2 \log 4 - \log \frac{1}{3} + 2 \log 3 = -6 \log 2 + 3 \log 3 = 3 \log \frac{3}{4} .
\end{aligned}$$

11.5 Integrazione delle funzioni razionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx;$
- (b) $\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1} dx;$
- (c) $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx;$
- (d) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx;$
- (e) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx;$
- (f) $\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2} dx;$
- (g) $\int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3} dx;$
- (h) $\int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2} dx.$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1} \sqrt{3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctg}(\sqrt{3}x) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}.$$

(c) Eseguendo la divisione $x^2 : (x+1)$ si trova $x^2 = (x+1)(x-1) + 1$. Quindi si ha $\frac{x^2}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$. Quindi si ha

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1| \right]_0^2 = 2 - 2 + \log 3 = \log 3.$$

(d) Si ha

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

$$\text{Quindi si ha } \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = [x - 2 \log(x+1)]_0^1 = 1 - 2 \log 2.$$

(e) Si ha $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

Quindi esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1};$$

quindi si ha $1 = A(x-1) + B(x-2)$.

Per $x = 1$ si trova $1 = -B$; quindi $B = -1$. Per $x = 2$ si trova $1 = A$.

Quindi si ha

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = [\log|x-2| - \log|x-1|]_{-1}^0 = \log 2 - \log 3 + \log 2 = 2 \log 2 - \log 3.$$

(f) Si ha $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$.

Quindi esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si ha $x + 4 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2$.

Per $x = 0$ si trova $4 = B$; quindi $B = 4$.

Quindi

$x + 4 = Ax(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2$, quindi

$-4x^2 + x = Ax(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2$, quindi

$(-4x + 1)x = Ax(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2$, quindi

$-4x + 1 = A(x^2 + 1) + (Cx + D)x$.

Per $x = 0$ si trova $1 = A$; quindi $A = 1$.

Quindi

$-4x + 1 = x^2 + 1 + (Cx + D)x$, quindi

$-x^2 - 4x = (Cx + D)x$, quindi

$(-x - 4)x = (Cx + D)x$, quindi

$-x - 4 = Cx + D$, quindi

$C = -1, D = -4$.

Quindi si ha

$$\frac{x+4}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{x+4}{x^2+1}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^2 \frac{x+4}{x^4+x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{x+4}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - 4 \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\left[\log x - \frac{4}{x} - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - 4 \operatorname{Arctg} x \right]_1^2 =$$

$$\log 2 - 2 - \frac{1}{2} \log 5 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + 4 + \frac{1}{2} \log 2 + 4 \operatorname{Arctg} 1 =$$

$$\frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi = \frac{1}{2} \log \frac{8}{5} + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi.$$

(g) Si ha $x^4 + x^3 = x^3(x + 1)$.

Quindi esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Si ha $x + 3 = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + C(x + 1) + Dx^3$.

Per $x = 0$ si trova $3 = C$; quindi $C = 3$.

Quindi

$x + 3 = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + 3(x + 1) + Dx^3$, quindi

$-2x = Ax^2(x + 1) + Bx(x + 1) + Dx^3$, quindi

$-2 = Ax(x + 1) + B(x + 1) + Dx^2$.

Per $x = 0$ si trova $-2 = B$; quindi $B = -2$.

Quindi

$-2 = Ax(x + 1) - 2(x + 1) + Dx^2$, quindi

$2x = Ax(x + 1) + Dx^2$, quindi

$2 = A(x + 1) + Dx$.

Per $x = 0$ si trova $2 = A$; quindi $A = 2$.

Per $x = 1$ si trova $2 = -D$; quindi $D = -2$.

Quindi si ha

$$\frac{x+3}{x^4+x^3} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x+1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x+3}{x^4+x^3} dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \\ &= \left[2 \log x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + 2 \log(x+1) \right]_1^2 = \\ &= 2 \log 2 + 1 - \frac{3}{8} - 2 \log 3 - 2 + \frac{3}{2} + 2 \log 2 = \\ &= \frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 + 2 - 4 \operatorname{Arctg} 2 + \pi = 4 \log 2 - 2 \log 3 + \frac{1}{8} = 2 \log \frac{4}{3} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(h) Si ha $x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$.

Quindi esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Si ha $1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Per $x = 0$ si trova $1 = 2B$; quindi $B = \frac{1}{2}$.

Per $x = -2$ si trova $1 = 4B$; quindi $C = \frac{1}{4}$.

Quindi

$$1 = Ax(x+2) + \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{4}x^2, \text{ quindi}$$

$$4 = 4Ax^2(x+1) + 2x + 4 + x^2, \text{ quindi}$$

$$-x^2 - 2x = 4Ax(x+2); \text{ quindi}$$

$$-x(x+2) = 4Ax(x+2); \text{ quindi}$$

$$-1 = 4A; A = -\frac{1}{4}.$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{x^3+2x^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^3+2x^2} dx &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \log x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(x+2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log 2 - -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 3 + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

11.6 Integrazione di alcune funzioni irrazionali

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

(a) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx;$

(b) $\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx;$

(c) $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx;$

(d) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx;$

(e) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2+3x+1)\sqrt{2x+1}} dx;$

(f) $\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx;$

Risoluzione.

- (a) Poniamo $\sqrt{x-1} = t$. Si ha $x-1 = t^2$; quindi $x = 1+t^2$; quindi $\frac{dx}{dt} = 2t$.
Per $x = 2$ si ha $t = 1$; per $x = 3$ si ha $t = \sqrt{2}$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(1+t^2)^2}{t} 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (1+2t^2+t^4) dt = \\ 2 \left[t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_1^{\sqrt{2}} &= 2 \left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}2\sqrt{2} + \frac{1}{5}4\sqrt{2} - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \\ 2 \left(\frac{47}{15}\sqrt{2} - \frac{28}{15} \right) &= \frac{94}{15}\sqrt{2} - \frac{56}{15}. \end{aligned}$$

- (b) Poniamo $\sqrt[4]{x} = t$. Si ha $x = t^4$; quindi $\frac{dx}{dt} = 4t^3$. Per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 16$ si ha $t = 2$.

Si ha quindi

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t} 4t^3 dt = 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt.$$

Eseguendo la divisione $t^2 : (t+1)$ si trova

$$t^2 = (t-1)(t+1) + 1.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{t+1} = t-1 + \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int_1^2 \left(t-1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$4 \left[\frac{1}{2}t^2 - t + \log(t+1) \right]_1^2 + 1^2 =$$

$$4 \left(2 - 2 + \log 3 - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 \right) =$$

$$4 \left(\frac{1}{2} + \log \frac{3}{2} \right) = 2 + 4 \log 32.$$

- (c) Poniamo $\sqrt[6]{x} = t$. Si ha $x = t^6$; quindi $\frac{dx}{dt} = 6t^5$. Per $x = 1$ si ha $t = 1$; per $x = 64$ si ha $t = 2$.

Si ha quindi

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Eseguendo la divisione $t^3 : (t+1)$ si trova

$$t^3 = (t^2 - t + 1)(t+1) - 1.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$$

$$\text{Si ha quindi } 6 \int_1^2 \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int_1^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$6 \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log(t+1) \right]_1^2 + 1^2 =$$

$$6 \left(\frac{8}{3} - 2 + 2 - \log 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right) =$$

$$6 \left(\frac{11}{6} + \log \frac{2}{3} \right) = 11 + 6 \log 23.$$

- (d) Poniamo $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$. Risulta $\frac{x}{x+1} = t^2$; quindi $x = xt^2 + t^2$; quindi $x(1-t^2) = t^2$; quindi $x = \frac{t^2}{1-t^2}$.

Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) + 2tt^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}.$$

Per $x = 0$ si ha $t = 0$; per $x = 1$ si ha $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} t \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt.$$

Si ha $(t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2(t + 1)^2$.

Esistono A, B, C, D tali che

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{(t - 1)^2} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{(t + 1)^2}.$$

Si ha

$$t^2 = A(t - 1)(t + 1)^2 + B(t + 1)^2 + C(t - 1)^2(t + 1) + D(t - 1)^2.$$

Per $t = 1$ si ha $1 = 4B$; quindi $B = \frac{1}{4}$.

Per $t = -1$ si ha $1 = 4D$; quindi $D = \frac{1}{4}$.

Si ha quindi

$$t^2 = A(t - 1)(t + 1)^2 + \frac{1}{4}(t + 1)^2 + C(t - 1)^2(t + 1) + \frac{1}{4}(t - 1)^2; \text{ quindi}$$

$$4t^2 = 4A(t - 1)(t + 1)^2 + t^2 + 2t + 1 + 4C(t - 1)^2(t + 1) + t^2 - 2t + 1; \text{ quindi}$$

$$2(t^2 - 1) = 4A(t - 1)(t + 1)^2 + 4C(t - 1)^2(t + 1); \text{ quindi}$$

$$2 = 4A(t + 1) + 4C(t - 1); \text{ quindi}$$

$$1 = 2A(t + 1) + 2C(t - 1);$$

Per $t = 1$ si ha $1 = 4A$; quindi $A = \frac{1}{4}$.

Per $t = -1$ si ha $1 = -4C$; quindi $C = -\frac{1}{4}$.

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t - 1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t + 1)^2}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t - 1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t + 1)^2} \right) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[\log |t - 1| - \frac{1}{t - 1} - \log |t + 1| - \frac{1}{t + 1} \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\log \left| \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} - 1} - \log \left| \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{1}{-1} + 1 \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\log \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} - \log \left| \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\log \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - 2}{1 - 2} \right) = \frac{1}{2} (\log(1 - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}) =$$

$$\log(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}.$$

(e) Poniamo $\sqrt{2x + 1} = t$.

Si ha $2x + 1 = t^2$; quindi $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

Si ha $\frac{dx}{dt} = t$.

Per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = \frac{3}{2}$, si ha $t = 2$.

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x^2 + 3x + 1)\sqrt{2x + 1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\left(2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 + 3\frac{t^2 - 1}{2} + 1\right)t} t dt =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\frac{t^4 - 2t^2 + 1}{2} + \frac{3t^2 - 3}{2} + 1} dt = \int_1^2 \frac{2}{t^4 - 2t^2 + 1 + 3t^2 - 3 + 2} dt = 2 \int_1^2 \frac{2}{t^4 + t^2} dt.$$

Si ha $t^4 + t^2 = t^2(t^2 + 1)$.

Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Si ha

$$1 = At(t^2 + 1) + B(t^2 + 1) + (Ct + D)t^2, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

Per $t = 0$, si ha $1 = B$; cioè $B = 1$.

Si ha quindi

$$1 = At(t^2 + 1) + t^2 + 1 + (Ct + D)t^2; \text{ quindi}$$

$$\cdot -t^2 = At(t^2 + 1) + (Ct + D)t^2; \text{ quindi}$$

$$\cdot -t = A(t^2 + 1) + (Ct + D)t, \text{ per ogni } t \in \mathbf{R}.$$

Per $t = 0$, si ha $0 = A$; cioè $A = 0$.

Si ha quindi

$$-t = (Ct + D)t; \text{ quindi}$$

$$\cdot -1 = Ct + D; \text{ quindi}$$

$$C = 0, D = -1.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_1^2 \frac{2}{t^4+t^2} dt = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2 \left[-\frac{1}{t} - \operatorname{Arctg} t \right]_1^2 t =$$

$$2 \left(-\frac{1}{2} - \operatorname{Arctg} 2 + 1 + \operatorname{Arctg} 1 \right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \operatorname{Arctg} 2 \right) = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 \operatorname{Arctg} 2.$$

(f) Poniamo $\sqrt{x} = t$.

Si ha $x = t^2$.

$$\text{Si ha } \frac{dx}{dt} = 2t.$$

Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = 4$, si ha $t = 2$.

Si ha quindi

$$\int_0^4 \frac{2x-x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{2t^2-t^3}{t+1} 2t dt = 2 \int_1^2 \frac{-t^4+2t^2}{t+1} dt.$$

Eseguendo la divisione $(-t^4 + 2t^2) : (t + 1)$ si trova

$$-t^4 + t^2 = (t + 1)(-t^3 + 3t^2 - 3t + 3).$$

Si ha quindi

$$\frac{-t^4 + t^2}{t + 1} = -t^3 + 3t^2 - 3t + 3 - \frac{3}{t + 1}.$$

Si ha quindi

$$2 \int_0^2 \frac{-t^4 + t^2}{t + 1} dt = 2 \int_0^2 \left(-t^3 + 3t^2 - 3t + 3 - \frac{3}{t + 1} \right) dt =$$

$$2 \left[-\frac{1}{4}t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3 \log(t + 1) \right]_0^2 = 2(-4 + 8 - 6 + 6 - 3 \log 3) =$$

$$2(4 - 3 \log 3) = 8 - 6 \log 3.$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx;$
 (b) $\int_1^{2 \operatorname{sh} 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx;$
 (c) $\int_2^{2 \operatorname{ch} 1} \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} dx;$

Risoluzione.

- (a) Poniamo $x = 2 \sin t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$. Per $x = 0$ possiamo scegliere $t = 0$; per $x = 1$ possiamo scegliere $t = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 t}{4}} 2 \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos t| \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos(2t)) dt = \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

- (b) Poniamo $x = 2 \operatorname{sh} t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2 \operatorname{ch} t$. Per $x = 0$ possiamo scegliere $t = 0$; per $x = 2 \operatorname{sh} 1$ possiamo scegliere $t = 1$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{2 \operatorname{sh} 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4 \operatorname{sh}^2 t}{4}} 2 \operatorname{ch} t dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt = \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \operatorname{ch} t dt = 2 \int_0^1 \operatorname{ch}^2 t dt = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{2} dt = \int_0^1 (\operatorname{ch}(2t) + 1) dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) + t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 + 1. \end{aligned}$$

- (c) Poniamo $x = 2 \operatorname{ch} t$; si ha $\frac{dx}{dt} = 2 \operatorname{sh} t$. Per $x = 2$ si ha $2 = 2 \operatorname{ch} t$; quindi $\operatorname{ch} t = 1$; possiamo quindi scegliere $t = 0$; per $x = 2 \operatorname{ch} 1$ si ha $2 \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{ch} 1$; quindi $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} 1$; possiamo scegliere $t = 1$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_2^{2 \operatorname{ch} 1} \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} dx &= \int_0^1 \sqrt{\frac{4 \operatorname{ch}^2 t}{4} - 1} 2 \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t dt = \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 |\operatorname{sh} t| \operatorname{sh} t dt = 2 \int_0^1 \operatorname{sh}^2 t dt = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2} dt = \\ &= \int_0^1 (\operatorname{ch}(2t) - 1) dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) - t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - 1. \end{aligned}$$

11.7 Integrazione di alcune funzioni trascendenti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti integrali:

- (a) $\int_0^1 \frac{3 - e^x}{1 + e^{2x}} dx;$
 (b) $\int_0^1 \frac{5 + e^x}{12 - 7e^x + e^{2x}} dx;$
 (c) $\int_0^1 \frac{1}{1 + 2^x} dx;$
 (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx;$
 (e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx.$

Risoluzione.

- (a) Poniamo $e^x = t$. Risulta $x = \log t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{3-e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{3-t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)} dt.$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Si ha

$$3-t = A(t^2+1) + (Bt+C)t;$$

per $t = 0$ si ha $3 = A$; quindi $A = 3$.

Si ha quindi

$$3-t = 3(t^2+1) + (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$-3t^2 - t = (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$(-3t-1)t = (Bt+C)t, \text{ cioè}$$

$$-3t-1 = Bt+C;$$

si ha quindi $B = -3$ e $C = -1$.

Si ha quindi

$$\frac{3-t}{t(1+t^2)} = \frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{3-t}{t(1+t^2)} dt &= \int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3t+1}{t^2+1} \right) dt = \int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \int_1^e \left(\frac{3}{t} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2+1} (2t) - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = [3 \log t - \frac{3}{2} \log(t^2+1) - \text{Arctg } t]_1^e = \\ &= 3 - \frac{3}{2} \log(e^2+1) - \text{Arctg } e + \frac{3}{2} \log 2 + \text{Arctg } 1 = 3 + \frac{3}{2} \log \frac{2}{e^2+1} - \text{Arctg } e + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

- (b) Poniamo $e^x = t$. Risulta $x = \log t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$; per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$ si ha $t = e$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{5+e^x}{12-7e^x+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{5+t}{12-7t+t^2} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} dt.$$

Si ha $t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$.

Si ha quindi

$$\frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} = \frac{t+5}{t(t-3)(t-4)}.$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{t+5}{t(t-3)(t-4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-4}.$$

Si ha

$$t+5 = A(t-3)(t-4) + Bt(t-4) + Ct(t-3).$$

Per $t = 0$ si ha $5 = 12A$; quindi $A = \frac{5}{12}$.

Per $t = 3$ si ha $8 = -3B$; quindi $B = -\frac{8}{3}$.

Per $t = 4$ si ha $9 = 4C$; quindi $C = \frac{9}{4}$.

Si ha quindi

$$\frac{t+5}{t(t-3)(t-4)} = \frac{5}{12} \frac{1}{t} - \frac{8}{3} \frac{1}{t-3} + \frac{9}{4} \frac{1}{t-4}.$$

Si ha quindi

$$\int_1^e \frac{t+5}{t(t^2-7t+12)} dt = \int_1^e \left(\frac{5}{12} \frac{1}{t} - \frac{8}{3} \frac{1}{t-3} + \frac{9}{4} \frac{1}{t-4} \right) dt =$$

$$\left[\frac{5}{12} \log |t| - \frac{8}{3} \log |t-3| + \frac{9}{4} \log |t-4| \right]_1^e = \frac{5}{12} - \frac{8}{3} \log(3-e) + \frac{9}{4} \log(4-e) + \frac{8}{3} \log 2 - \frac{9}{4} \log 2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} \log \frac{2}{3-e} + \frac{9}{4} \log \frac{4-e}{3}.$$

(c) Poniamo $2^x = t$.

Si ha $x = \log_2 t$.

Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{t}$.

Per $x = 0$, si ha $t = 1$; per $x = 1$, si ha $t = 2$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2^x} dx = \int_1^2 \frac{1}{1+t} \frac{1}{\log 2} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\log 2} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)} dt.$$

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

Si ha

$$1 = A(t+1) + Bt,$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Per $t = 0$ si ha $1 = A$; quindi $A = 1$. Per $t = 1$ si ha $1 = -B$; quindi $B = -1$.

Si ha quindi

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log 2} \int_0^2 \frac{1}{t(t+1)} dt &= \frac{1}{\log 2} \int_0^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ \frac{1}{\log 2} [\log t - \log(t+1)]_1^2 &= \frac{1}{\log 2} (\log 2 - \log 3 + \log 2) = \\ \frac{1}{\log 2} (2 \log 2 - \log 3) &= 2 - \frac{\log 3}{\log 2}. \end{aligned}$$

(d) Poniamo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Si ha $x = 2 \operatorname{Arctg} t$.

Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $t = 1$.

Si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Si ha quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$-2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt.$$

Si ha $t^2 - 2t - 1 = 0$ se e solo se $t = 1 \pm \sqrt{2}$; si ha quindi $t^2 - 2t - 1 = (t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))$.

Esistono $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{A}{t - (1 + \sqrt{2})} + \frac{B}{t - (1 - \sqrt{2})}.$$

Si ha

$$1 = A(t - (1 - \sqrt{2})) + B(t - (1 + \sqrt{2})),$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Per $t = 1 - \sqrt{2}$ si ha $1 = B(1 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2})$; quindi $1 = -2\sqrt{2}B$; quindi $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Per $t = 1 + \sqrt{2}$ si ha $1 = A(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})$; quindi $1 = 2\sqrt{2}A$; quindi $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Si ha quindi

$$\frac{1}{(t - (1 + \sqrt{2}))(t - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 + \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - (1 - \sqrt{2})}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt = \\ & -2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1}{t - 1 + \sqrt{2}} \right) dt = \\ & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log |t - 1 - \sqrt{2}| - \log |t - 1 + \sqrt{2}| \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log \left| \frac{t - 1 - \sqrt{2}}{t - 1 + \sqrt{2}} \right| \right]_0^1 = \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log (\sqrt{2} + 1)^2 = \sqrt{2} \log (\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

(e) Poniamo $\operatorname{tg} x = t$.

Si ha $x = \operatorname{Arctg} t$.

Si ha $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$.

Si ha $\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = 1$, si ha $t = \operatorname{tg} 1$.

Si ha quindi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x + 2} dx = \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{\frac{1}{t^2 + 1} + 2} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{1 + 2t^2 + 2} dt =$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{t}{2t^2+3} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{4t}{2t^2+3} dt = \frac{1}{4} [\log(2t^2+3)]_0^{\operatorname{tg} 1} = \\ &= \frac{1}{4} (\log(2 \operatorname{tg}^2 1 + 3) - \log 3) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2}{3} \operatorname{tg}^2 1 + 1 \right) .\end{aligned}$$

Capitolo 12

Sviluppi in serie

12.1 Limiti

1. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x (1 - \operatorname{ch} x)}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{Arctg} x - x}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x} - 1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2}$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x}$;

(e) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x \sqrt{1+x})^3}{1 - \cos x^3}$;

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)}$;

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)}$;

(h) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1 - \cos x)^2}$;

(i) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x}$.

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$.

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\log(1_2 x)} - e^x}{1 - \cos(3x)}$.

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2}$.

(m) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)}$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x(1 - \operatorname{ch} x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x(-\frac{x^2}{2})} = -\frac{2}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{\sin x(1 - \operatorname{ch} x)} = -\frac{2}{3}.$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \operatorname{sh} x - \sin x &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3, \\ \operatorname{Arctg} x - x &\sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^3, \\ \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{Arctg} x - x} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = -1. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{Arctg} x - x} = -1.$$

(c) Si ha $(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2 \sim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2}x)^2 x^2 = \frac{1}{4}x^4$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \operatorname{sh} x \sin x &= x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 2 \cos x &= 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \\ \operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x &= x^2 - 2 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}x^4, \\ \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} &\sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x \sin x - 2 + 2 \cos x}{(\sqrt{1+x}-1)^2 \operatorname{Arcsin} x^2} = \frac{1}{3}.$$

(d) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Arctg} x - x)^2}{\operatorname{Arctg} x^4 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{3}x^3)^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9}x = 0$.(e) Si ha per $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos x^3 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(x^3)^2 = \frac{1}{2}x^6.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} x &= x + o(x^2); \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + o(x); \\ x\sqrt{1+x} &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2); \\ \operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x} &= x + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^2. \\ (\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x})^3 &\sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{8}x^6; \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1 - \cos x^3} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^6} = -\frac{1}{x^4}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - x\sqrt{1+x}}{1 - \cos x^3} = -\frac{1}{4}.$$

(f) Si ha

$$\log(1+x^5) \sim_{x \rightarrow 0} x^5.$$

Si ha

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x = x^2 + \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{36}x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^4),$$

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x = x^3 - \frac{1}{3}x^5 + o(x^5),$$

$$\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3 = -\frac{1}{3}x^5 + o(x^5) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^5.$$

Quindi si ha

$$\frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^5}{x^5} = -\frac{1}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{sh} x \operatorname{Arctg} x - x^3}{\log(1+x^5)} = -\frac{1}{3}.$$

(g) Si ha:

$$\log(1+x^2) \sim_{x \rightarrow 0} x^2;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x);$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x); \text{ quindi}$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2}x + o(x) = x + o(x) \sim_{x \rightarrow 0} x; \text{ quindi}$$

$$\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{\log(1+x^2)} = 1.$$

(h) Si ha:

$$1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2; \text{ quindi}$$

$$(1 - \cos x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}x^4;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-x^2)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4);$$

quindi

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{6}x^4 +$$

$$o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-\cos x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-\cos x)^2} = \frac{2}{3}.$$

(i) Si ha:

$$(x - \operatorname{sh} x) \sin x \sim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6}x^3\right)x = -\frac{1}{6}x^4; \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4);$$

$$\operatorname{Arctg} y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3); \text{ quindi } \operatorname{Arctg} x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) = x^2 + o(x^4);$$

$$\text{quindi } \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^4); \text{ quindi } \cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 +$$

$$\frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) = \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24}x^4; \text{ quindi}$$

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{24}x^4}{-\frac{1}{6}x^4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Quindi si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x^2}{(x - \operatorname{sh} x) \sin x} = -\frac{1}{4}.$$

(j) Si ha

$$1 - \cos(2x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2.$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$(1+y)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{5}y - \frac{2}{25}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per $x \rightarrow 0$

$$\sqrt[5]{1+2x} = 1 + \frac{1}{5}(2x) - \frac{2}{25}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + o(x^2).$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$(1+y)^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6}y + o(y);$$

quindi si ha per $x \rightarrow 0$

$$\sqrt[6]{1+3x^2} = 1 + \frac{1}{6}(3x^2) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} &= (1 + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 + o(x^2))(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per $x \rightarrow 0$

$$e^{\frac{2}{5}x} = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + o(x^2).$$

Si ha per $y \rightarrow 0$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

quindi si ha per $x \rightarrow 0$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x) &= (1 + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 + o(x^2))(1 - 2x^2 + o(x^2)) = \\ &= 1 - 2x^2 + o(x^2) + \frac{2}{5}x + \frac{2}{25}x^2 = 1 + \frac{2}{5}x - \frac{48}{25}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x) &= 1 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{50}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{2}{5}x + \frac{48}{25}x^2 = \\ &= \frac{21}{10}x^2 + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{21}{10}x^2. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{21}{10}x^2}{2x^2} = \frac{21}{20}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[6]{1+3x^2} - e^{\frac{2}{5}x} \cos(2x)}{1 - \cos(2x)} = \frac{21}{20}.$$

(k) Si ha:

$$1 - \cos(3x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2.$$

Si ha:

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2);$$

$$\log(1+2x) = 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2);$$

$$\sqrt{1+\log(1+2x)} = \sqrt{1+2x-2x^2+o(x^2)} =$$

$$1 + \frac{1}{2}(2x-2x^2+o(x^2)) - \frac{1}{8}(2x-2x^2+o(x^2))^2 + o(x^2) =$$

$$1 + x - x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\log(1+2x)} - e^x &= 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = -2x^2 + \\ &+ o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -2x^2. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{\frac{9}{2}x^2} = -\frac{4}{9}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\log(2x)}-e^x}{1-\cos(3x)} = -\frac{4}{9}.$$

(l) Si ha

$$(1 - \cos \sin x)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right)^2 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} x^4.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \\ x \log(1+x) &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ 2(1 - \cos x) &= x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \\ x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3 &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) = \\ &= \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{12}x^4. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{\frac{1}{4}x^4} = \frac{5}{3}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x) - 2(1 - \cos x) + \frac{1}{2}x^3}{(1 - \cos \sin x)^2} = \frac{5}{3}.$$

(m) Si ha

$$(2x - \sin(2x)) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}(2x^3) = \frac{1}{3}x^3.$$

Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ e^x - 1 &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \\ \sin y &= y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \text{ per } y \rightarrow 0; \\ \sin(e^x - 1) &= \sin\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o((e^x - 1)^3) = \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + o(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3); \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \\ \sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2 &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = -\frac{1}{4}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - \log(1+x) - x^2}{2x - \sin(2x)} = -\frac{1}{4}.$$

2. **Esercizio.** Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{5}} (3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}).$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}}).$

- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x} \right).$
 (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right).$

Risoluzione.

(a) Si ha

$$3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x} = x^{\frac{1}{5}} \left(3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} \right).$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[5]{1+y} = 1 + \frac{1}{5}y + o(y).$$

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha quindi

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} = 3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{2}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = 2 + \frac{4}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} = 1 + \frac{1}{5}\frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} &= \\ 3 + \frac{3}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 2 - \frac{4}{5}\frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{5}\frac{1}{x} &= \frac{4}{5}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{5}\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$x^{\frac{1}{5}} \left(3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{3}{x}} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{4}{5}\frac{1}{x} \right) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}}.$$

Quindi si ha

$$x^{\frac{4}{5}} (3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}) \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{5}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{5}} (3\sqrt[5]{1+x} - 2\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{3+x}) = -\frac{4}{5}.$$

(b) Per $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}} &= \\ x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} \right). \end{aligned}$$

Si ha

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y) \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Quindi si ha

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Quindi si ha

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

quindi

$$2e^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si ha quindi

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{x} - 2 - \frac{2}{x} = -\frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{5}{2x}.$$

Si ha quindi

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2e^{\frac{1}{x}} \right) \sim x \left(-\frac{5}{2x} \right) = -\frac{5}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2xe^{\frac{1}{x}}) = -\frac{5}{2}.$$

(c) Per $x > 0$ si ha

$$x^2 \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x} \right) = x^3 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right).$$

Si ha

$$\sqrt[4]{1 + y} = 1 + \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{3}\right)y^3 + o(y^3) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + \frac{7}{128}y^3 + o(y^3)$$

per $y \rightarrow 0$.

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} &= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{3}{32} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \frac{7}{128} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{16} \frac{1}{x^3} + \frac{7}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{5}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{17}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x} - \frac{3}{32} \frac{1}{x^2} + \frac{7}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} &= \\ &= 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{5}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{17}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{3}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{7}{128} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} = \\ &= -\frac{3}{16} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim -\frac{3}{16} \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$x^3 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right) \sim x^3 \left(-\frac{3}{16} \frac{1}{x^3} \right) = -\frac{3}{16}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x^4 + x^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x} \right) = -\frac{3}{16}.$$

(d) Si ha

$$\sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6} = 2x^3.$$

Per $x > 0$ si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} = 2x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}.$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[4]{1 + y} = 1 + \frac{1}{4}y + \left(\frac{1}{2}\right)y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{32}y^2 + o(y^2).$$

Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\begin{aligned} 2x \sqrt[4]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} &= 2x \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) - \frac{3}{32} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = \\ &= 2x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^4} - \frac{3}{8} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Per $x > 0$ si ha

$$\sqrt[4]{16x^4 + 1} = 2x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{16x^4}}.$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + o(y).$$

Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$2x\sqrt[4]{1 + \frac{1}{16x^4}} = 2x\left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{16x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 2x\left(1 + \frac{1}{64x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{32}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Per $y \rightarrow 0$ si ha

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^3).$$

Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Si ha quindi

$$\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{4}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{6} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} = \frac{133}{96}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{133}{96}\frac{1}{x^3}.$$

Si ha quindi

$$\sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \frac{133}{96} \frac{1}{x^3} = \frac{133}{48}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^6 + x^3 + 3} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 32x^2 + 64} - \sqrt[4]{16x^4 + 1} - \sin \frac{1}{x} \right) = \frac{133}{48}.$$

12.2 Asintoti

1. **Esercizio.** Dire se la seguente funzione ammette sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow +\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Risoluzione.

Si ha

$$\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 1; \text{ quindi si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = 1.$$

Si ha

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} x\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Quindi f ammette sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow +\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow +\infty$ è la retta

$$y = x + \frac{1}{2}.$$

2. **Esercizio.** Dire se le seguenti funzioni ammettono sviluppo asintotico affine per $x \rightarrow -\infty$; in caso affermativo determinare l'asintoto:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+3}{x}}$.

Risoluzione.

(a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \frac{1}{x} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$.

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} - x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1}{2} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = x$.

(c) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3+3}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3+3}{x}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + x \right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f ammette asintoto per $x \rightarrow -\infty$ e l'asintoto di f per $x \rightarrow -\infty$ è la retta di equazione $y = -x$.

12.3 Serie

1. **Esercizio.** Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{n}} \right) .$$

Risoluzione. Si ha

$$\sqrt{\frac{1}{n}} - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \right)^3 = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} .$$

Quindi la serie assegnata è convergente.

Capitolo 13

Integrali impropri

13.1 Integrali impropri

1. **Esercizio.** Dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente positivamente.

Risoluzione. Sia $y > 1$; si ha

$$\int_1^y \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^y = \log y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2. **Esercizio.** Dimostrare che $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ è divergente positivamente.

Risoluzione. Sia $y \in]0, 1]$; si ha

$$\int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_y^1 = -\log(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty.$$

13.2 Valore di un integrale improprio

1. **Esercizio.** Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e in caso affermativo determinarne il valore:

(a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$;

(b) $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Risoluzione.

- (a) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(x - (-1))^{\frac{1}{2}}}.$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$ l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \lim_{y \rightarrow -1} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \lim_{y \rightarrow -1} \int_y^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow -1} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_y^1 = \lim_{y \rightarrow -1} 2 (\sqrt{2} - \sqrt{1+y}) = 2\sqrt{2}.$$

In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

- (b) Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Si ha

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo $\frac{1}{3} < 1$ l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right), dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_y^1 =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} \right]_y^1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} + 3 - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - 3y^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{5} + 3 = \frac{18}{5}.$$

In particolare si ritrova che l'integrale improprio è convergente.

13.3 Convergenza di integrali impropri di funzioni positive

Esercizio. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti, esplicitando dapprima le funzioni che si considerano

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx;$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx;$
3. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}} dx;$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{2^x+x} dx;$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2};$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x}{3^x+x^2+1} dx;$
7. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}};$

8. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$
9. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1-\cos x} dx;$
10. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1} dx;$
11. $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2};$
12. $\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x} dx.$

Risoluzione.

1. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x}{x^2+x+1}$.
Si ha $\frac{x}{x^2+x+1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.
2. Si tratta dell'integrale improprio su di una semiretta positiva della funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x^2}{x^4+1}$.
Si ha $\frac{x^2}{x^4+1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$; quindi l'integrale improprio è convergente.
3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}};$$

si ha $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-3}{2^x+x}.$$

Si ha

$$\frac{x+3}{2^x+x} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x} = x\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}.$$

Si ha

$$\frac{1}{1+x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2};$$

quindi l'integrale improprio è convergente.

6. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva di

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x^2 + x}{3^x + x^2 + 1}.$$

Si ha

$$\frac{x^2 + x}{3^x + x^2 + 1} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3^x} = x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

7. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}};$$

si ha $\sqrt{\frac{x+1}{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è convergente.

8. Si tratta dell'integrale improprio su di un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Si ha $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; quindi l'integrale improprio è convergente.

9. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

Si ha

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2 \frac{1}{x}.$$

Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

10. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra di

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

Si ha

$$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{ch} x - 1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = 2 \frac{1}{x}.$$

Quindi l'integrale improprio assegnato è divergente positivamente.

11. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra della funzione

$$f : [0, 1[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{1 - x^2}.$$

Si ha

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-x)};$$

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

12. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra della funzione

$$f :]0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x}.$$

Si ha

$$\frac{\operatorname{Arcsin} x + 1}{x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x};$$

quindi l'integrale improprio è divergente positivamente.

13.4 Convergenza e valori di integrali impropri

Esercizio. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e, in caso affermativo, determinarne il valore:

1. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx,$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx;$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx;$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+2} dx.$

Negli esercizi 4 e 5 si può utilizzare la formula

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c,$$

dove $p^2 - 4q < 0$.

Risoluzione.

1. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow x^5 e^{-2x}.$$

Si ha

$$x^5 e^{-2x} = x^5 \left(\frac{1}{e^2} \right)^x.$$

Essendo $\frac{1}{e^2} < 1$, l'integrale improprio è convergente.

Per ogni $y \in [0, +\infty[$ si ha

$$\int_0^y x^5 e^{-2x} dx = \left[x^5 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2} e^{-2x} 5x^4 dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2} x^5 e^{-2x} \right]_0^y + \frac{5}{2} \int_0^y x^4 e^{-2x} dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} \right]_0^y + \frac{5}{2} \left(\left[x^4 \left(-\frac{1}{2}e^{-5x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 4x^3 dx \right) = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} \right]_0^y + 5 \int_0^y x^3e^{-2x} dx = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} \right]_0^y + 5 \left(\left[x^3 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 3x^2 dx \right) = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} \right]_0^y + \frac{15}{2} \int_0^y x^2e^{-2x} dx = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{2} \left(\left[x^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y + 0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} 2x dx \right) = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}e^{-2x} \right]_0^y + \frac{15}{2} \int_0^y xe^{-2x} dx = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2e^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{2} \left(\left[x \left(\frac{1}{2}e^{-2x} \right) \right]_0^y - \int_0^y -\frac{1}{2}e^{-2x} dx \right) = \\
& \left[-\frac{1}{2}x^5e^{-2x} - \frac{5}{4}x^4e^{-2x} - \frac{5}{2}x^3e^{-2x} - \frac{15}{4}x^2e^{-2x} - \frac{15}{4}xe^{-2x} \right]_0^y + \\
& \frac{15}{4} \int_0^y e^{-2x} dx = \\
& \left[\left(-\frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{15}{8} \right) e^{-2x} \right]_0^y = \\
& \left(-\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8} \right) e^{-2y} + \frac{15}{8} .
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx = \\
& \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^3 - \frac{15}{4}y^2 - \frac{15}{4}y - \frac{15}{8} \right) e^{-2y} + \frac{15}{8} \right) = \frac{15}{8} .
\end{aligned}$$

2. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} .$$

Si ha

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} .$$

Essendo $\frac{3}{2} > 1$, l'integrale improprio è convergente.

Sia $y \geq 0$.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx .$$

Poniamo $\sqrt{x} = t$; si ha $x = t^2$; quindi $\frac{dx}{dt} = 2t$; per $x = 0$, si ha $t = 0$; per $x = y$, si ha $t = \sqrt{y}$.

Si ha quindi

$$\int_0^y \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t}{t^4 + 1} 2t dt = 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt .$$

Le radici dell'equazione complessa $t^4 = -1$ sono

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} t^4 - 1 &= ((t - t_0)(t - t_3))((t - t_1)(t - t_2)) = \\ &= ((t - (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}))(t - (\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})))((t - (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}))(t - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}))) = \\ &= ((t - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})(t - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}))((t + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2})(t + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2})) = \\ &= ((t - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2})(t + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}) = (t^2 - \sqrt{2}t + 1)(t^2 + \sqrt{2}t + 1) . \end{aligned}$$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{t^2}{t^4 + 1} = \frac{At + B}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} .$$

Si ha

$$t^2 = (At + B)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + (Ct + D)(t^2 + \sqrt{2}t + 1) .$$

Quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 1 \\ A + \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 0 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} C = -A \\ D = -B \\ \sqrt{2}A + B + \sqrt{2}A - B = 1 \\ A + \sqrt{2}B - A + \sqrt{2}B = 0 \end{cases};$$

quindi

$$\begin{cases} B = 0 \\ D = 0 \\ A = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\frac{t^2}{t^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. - (\log(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}) \right]_0^{\sqrt{y}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2t - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{y}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} \log \frac{y - \sqrt{2}\sqrt{y} + 1}{y + \sqrt{2}\sqrt{y} + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} \log \frac{y - \sqrt{2}\sqrt{y} + 1}{y + \sqrt{2}\sqrt{y} + 1} + \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{y} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi .$$

3. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{x-1}{x^3+x} .$$

Si ha

$$\frac{x-1}{x^3+x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} .$$

Quindi l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{x-1}{x^3+x} dx .$$

Sia $y \geq 0$.

Si ha

$$x^3 + x = x(x^2 + 1).$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} .$$

Si ha

$$x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Per $x=0$ si ha $-1=A$; quindi $A=-1$.

Si ha quindi

$$x-1 = -x^2-1 + (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x^2+x = (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x(x+1) = (Bx+C)x; \text{ quindi}$$

$$x+1 = Bx+C; \text{ quindi}$$

$$B=1, C=1.$$

Si ha quindi

$$\frac{x-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} .$$

$$\text{Si ha quindi } \int_1^y \frac{x-1}{x^3+x} dx = \int_1^y \left(-\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$\int_1^y \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left[-\log x + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y =$$

$$\left[-\log x + \log \sqrt{x^2+1} + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y = \left[\log \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{Arctg} x \right]_1^y =$$

$$\log \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} y - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} .$$

Si ha quindi $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\log \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} + \operatorname{Arctg} - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 + \frac{\pi}{2} - \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$.

4. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{x+1}{x^3+8}.$$

Si ha

$$\frac{x+1}{x^3+8} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Essendo $2 > 1$, l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{x+1}{x^3+8} dx.$$

Sia $y \geq 0$.

Calcoliamo $\int_0^y \frac{x+1}{x^3+8} dx$

Si ha

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{x+1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

Si ha

$$x+1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x+2).$$

Per $x = -2$ si ha $-1 = 12A$; quindi $A = -\frac{1}{12}$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} x+1 &= -\frac{1}{12}(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2); \text{ quindi} \\ 12x+12 &= -x^2+2x-4+12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi} \\ x^2+10x+16 &= 12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi} \\ (x+2)(x+8) &= 12(Bx+C)(x+2); \text{ quindi} \\ x+8 &= 12Bx+12C; \text{ quindi} \\ 12B &= 1 \text{ e } 12C = 8; \text{ quindi } B = \frac{1}{12} \text{ e } C = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{x+1}{x^3+8} = -\frac{1}{12} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{12} \frac{x+8}{x^2-2x+4}.$$

Si ha quindi

$$\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \int_0^{\sqrt{y}} \left(-\frac{1}{12} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{12} \frac{x+8}{x^2-2x+4} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \left[-\log(x+2) + \log \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \frac{16+2}{\sqrt{16-4}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-2}{\sqrt{16-4}} \right]_0^y = \\
& \frac{1}{12} \left[\log \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^y = \\
& \frac{1}{12} \left(\log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \\
& \frac{1}{12} \left(\log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) .
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+8} dx = \\
& \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{12} \left(\log \frac{\sqrt{y^2 - 2y + 4}}{y+2} + 3\sqrt{3} \operatorname{Arctg} \frac{y-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) \\
& \frac{1}{12} \left(3\sqrt{3} \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) = \frac{1}{12} 2\sqrt{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi .
\end{aligned}$$

5. Si tratta dell'integrale improprio su una semiretta positiva della funzione

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{x^3+2} .$$

Si ha

$$\frac{1}{x^3+2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} .$$

Essendo $3 > 1$, l'integrale improprio è convergente.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+2} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{1}{x^3+2} dx .$$

Sia $y \geq 0$.

Calcoliamo $\int_0^y \frac{1}{x^3+2} dx$

Si ha

$$x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) .$$

Esistono $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^3+2} = \frac{A}{x + \sqrt[3]{2}} + \frac{Bx + C}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} .$$

Si ha

$$1 = A(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) + (Bx + C)(x + \sqrt[3]{2}) .$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\sqrt[3]{2}A + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ \sqrt[3]{2}B + \sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4}B + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}C = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} A = -B \\ 2\sqrt[3]{2}B + C = 0 \\ -\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}(-2\sqrt[3]{2})B = 1 \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} -2\sqrt[3]{4}B = 1 \\ A = -B \\ C = -2\sqrt[3]{2}B \end{cases} ;$$

quindi

$$\begin{cases} B = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \\ A = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \\ C = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{4}} \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^3 + 2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{1}{x + \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{x - 2\sqrt[3]{2}}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} .$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{x^3 + 2} dx &= \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{1}{x + \sqrt[3]{2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{x - 2\sqrt[3]{2}}{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} \right) dx = \\ &\quad \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \\ &\quad \left[\log(x + \sqrt[3]{2}) - \log \sqrt{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}} - \frac{-4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{4\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}}} \right]_0^y \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left[\log \frac{x + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\sqrt[3]{2}}} \right]_0^y = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left(\log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\ & \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left(\log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 2} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left(\log \frac{y + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{y^2 - \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \right) = \\ & \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \frac{2}{\sqrt{3}} \pi = \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{3}} \pi. \end{aligned}$$

13.5 Integrali impropri su intervalli aperti

Esercizio. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

1. $\int_0^{+\infty} \log x \, dx$;
2. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \, dx$.

Risoluzione.

1. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \log x.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_0^1 \log x \, dx$ e $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$.

Consideriamo $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$.

Si ha $\log x \asymp_{x \rightarrow +\infty} 1$.

Quindi l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \log x \, dx$ è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \log x \, dx$ non è convergente.

2. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f :]1, 2[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}.$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se è convergenti l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a sinistra $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \, dx$ e di $f|]1, \frac{3}{2}]$ e se

è convergente l'integrale improprio su un intervallo limitato aperto a destra $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$ di $f|[\frac{3}{2}, 2[$.

Consideriamo $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$.

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1) \cdot 1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo $\frac{1}{3} < 1$ l'integrale improprio $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$ è convergente.

Consideriamo $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$.

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} \sim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{1 \cdot (2-x)}} = \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo $\frac{1}{3} < 1$ l'integrale improprio $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

3. **Esercizio.** Dire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

NB 1. Si può utilizzare la formula $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = a \log \sqrt{x^2+px+q} + \frac{2b-pa}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$, dove $p^2 - 4q < 0$.

Risoluzione.

Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo aperto della funzione

$$f:]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \frac{1}{1+x^4}.$$

L'integrale improprio assegnato è convergente, se sono convergenti gli integrali impropri $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ e $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$.

Si ha

$$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}.$$

Quindi l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ è convergente.

Si ha

$$\frac{1}{1+x^4} \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4}.$$

Quindi l'integrale improprio $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx$ è convergente.

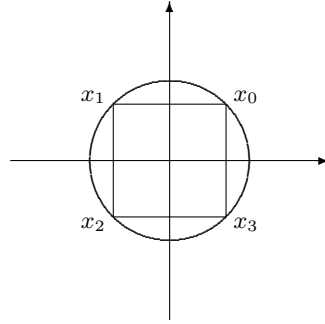
Quindi l'integrale improprio assegnato è convergente.

Determiniamo il valore dell'integrale improprio. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx .$$

Calcoliamo $\int \frac{1}{1+x^4} dx$.

Per fattorizzare il polinomio $x^4 + 1$ determiniamo le radici complesse di $x^4 = -1$. Si ha $|-1| = 1$ e $\pi \in \arg(-1)$.



Tenendo conto della posizione delle radici, si trova

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Si ha

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= ((x - x_0)(x - x_3))((x - x_1)(x - x_2)) = \\ &= \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \left(\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \\ &= \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \left(\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) . \end{aligned}$$

Esistono $A, B, C, D \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} .$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) .$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} ,$$

cioè

$$\begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ \sqrt{2}A + \sqrt{2}A + 1 - B = 0 \\ A + \sqrt{2}B + -A - \sqrt{2}(1 - B) = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} C = -A \\ D = 1 - B \\ 2\sqrt{2}A = -1 \\ 2\sqrt{2}B = \sqrt{2} \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \frac{-\sqrt{2}x + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}x - 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \log \sqrt{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{4 - 2}{\sqrt{4 - 2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} - \right. \\ &\quad \left. (\sqrt{2} \log \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-4 + 2}{\sqrt{4 - 2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}}) \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} \log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

Per ogni $y \in \mathbf{R}_+^*$ si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_0^y = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \right. \\ & \left. \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg}(-1) \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

Per ogni $y \in \mathbf{R}$, $y < 0$ si ha

$$\begin{aligned} & \int_y^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\log \sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]_y^0 = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg}(-1) - \log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \right. \\ & \left. \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \\ & \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx = \\ & \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\log \sqrt{\frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1}} + \operatorname{Arctg} \frac{2y + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \operatorname{Arctg} \frac{2y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi .$$

13.6 Integrali impropri su intervalli privati di punti

Esercizio. Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx .$$

Risoluzione. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [-1, 1] - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{x} .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$.

L'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ è divergente positivamente.

Quindi l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ non è convergente.

Esercizio. Dire se il seguente integrali improprio è convergente e, in caso affermativo, determinarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx .$$

Risoluzione. Si tratta dell'integrale improprio su un intervallo privato di punti della funzione

$$f : [-1, 1] - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}} .$$

L'integrale improprio è convergente se e solo se sono convergenti gli integrali impropri $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$.

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx .$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$, l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ è convergente.

Analogamente si vede che l'integrale improprio $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ è convergente.

Quindi l'integrale improprio $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ è convergente.

Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_y^1 = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} (1 - \sqrt{y}) = 2 .\end{aligned}$$

Analogamente si vede che

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 .$$

Si ha quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 + 2 = 4 .$$