Calcolo di un integrale generalizzato

Marcello Colozzo (http://www.extrabyte.info)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1}$$

manifestamente definita in $X = (-1, 1)$, con il seguente comportamento agli estremi di X:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \tag{2}$$

Inoltre è $f(x) \geq 0$, per cui possiamo applicare la definizione di integrale esteso all'intervallo X. A tale scopo assumiamo come successione $\{T_n\}$ quella il cui termine n-esimo è

$$T_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right),$$

cosicché

$$\lim_{n \to \infty} T_n = X$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\, dx &= \lim_{n \to \infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n \to \infty} \left[\arcsin \frac{1}{x}\right]_{x=-1+\frac{1}{n}}^{x=1-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(-1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi
\end{aligned}$$

Cioè

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

cosicchè il rettangoloide

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

è un insieme illimitato ma di misura finita:

$$misU = \pi$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.

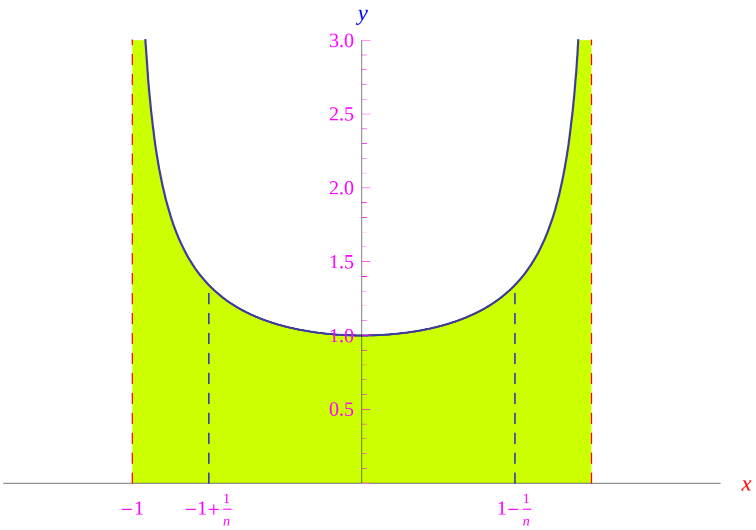

Figura 1: Grafico della funzione (1).