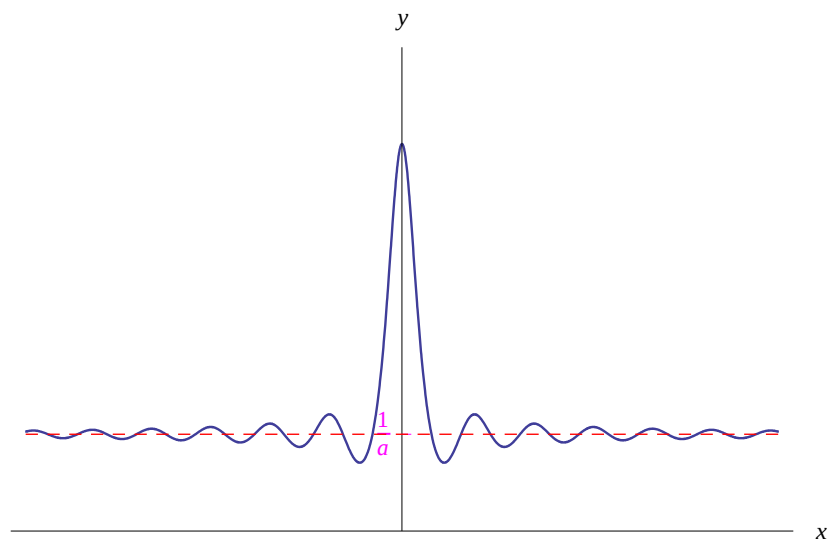


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x + \sin x}{ax - \sin x}, \quad (a \in \mathbb{R})$$

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{ax - \sin x}, \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Soluzione.

Poniamo per definizione:

$$f_a(x) = \frac{x + \sin x}{ax - \sin x}, \quad (2)$$

distinguendo i due casi:

1. $a \neq 0$

2. $a = 0$

Nel primo caso scriviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{ax - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(a - \frac{\sin x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{a - \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1 + 0}{a - 0} \\ &= \frac{1}{a}, \end{aligned} \quad (3)$$

giacchè:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

in forza del **teorema dei carabinieri**. Infatti, la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è definitivamente limitata (in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tra $-\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x}$, che sono entrambe infinitesime per $x \rightarrow \pm\infty$. Tenendo conto della (3), per $a = 0$ siamo tentati a scrivere $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{\sin x} = 0$. Più precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) &= - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{\sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{\sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}_{=1} \end{aligned}$$

Ma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sin x}$ non esiste. Infatti, $\frac{x}{\sin x}$ è definitivamente limitata (in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tra $-x$ e x , per cui detta funzione assume infinite volte (in ogni intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$. Ne concludiamo che il limite proposto non esiste per $a = 0$.

Nelle fig. 1-2. riportiamo il grafico di $f_{a=2}(x)$ e $f_{a=0}(x)$ rispettivamente.

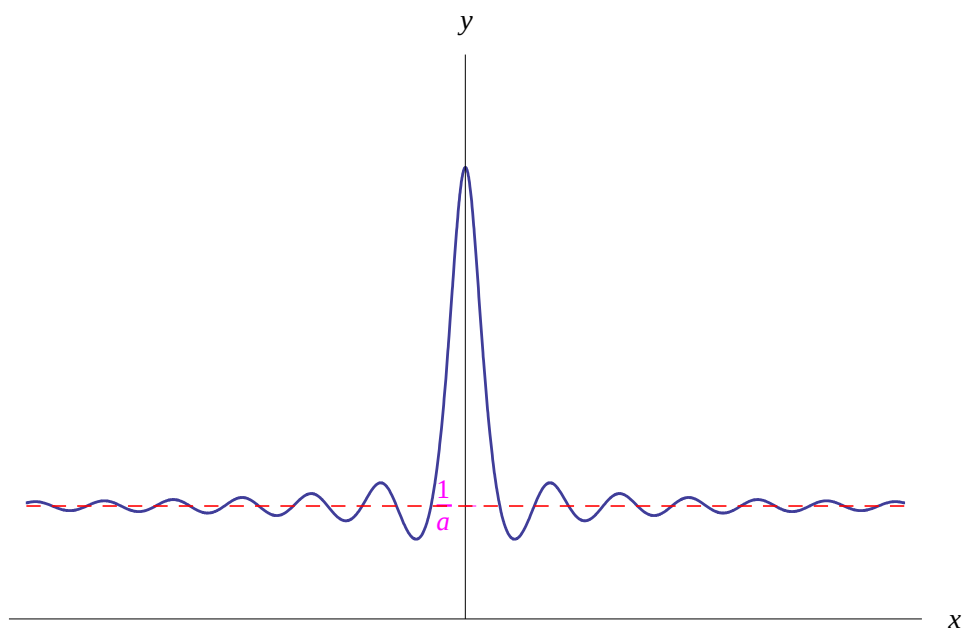


Figura 1: Grafico della funzione (2) per $a = 2$.

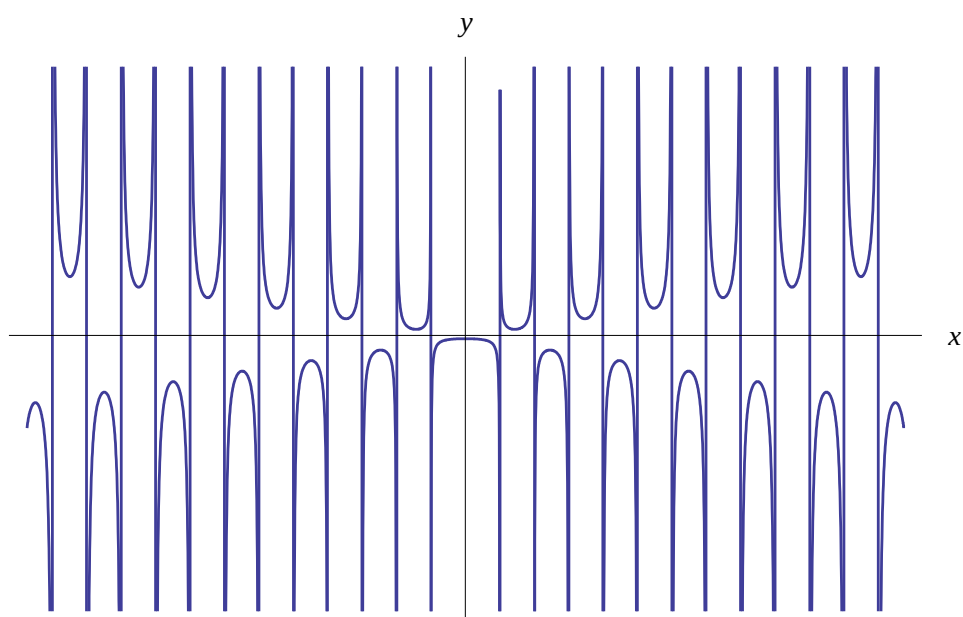


Figura 2: Grafico della funzione (2) per $a = 0$.