
Un limite difficile

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

In questo [sito web](#) viene proposto il calcolo del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6} \quad (1)$$

L'esercizio è preso dal libro di analisi matematica di Hardy, e deve essere svolto senza applicare né la regola di De L'Hospital né il teorema di Taylor. In altre parole, bisogna rifarsi ai limiti fondamentali.

Abbiamo provato a risolvere l'esercizio seguendo il procedimento del suddetto sito, però con qualche variante. Il procedimento consiste nel trasformare il numeratore, in modo da spezzare il limite in una somma. Innanzitutto scriviamo

$$x = (x - \sin x) + \sin x, \quad \sin(\sin x) = \sin(\sin x) - \sin x + \sin x,$$

per cui il numeratore diventa:

$$\begin{aligned} x \sin(\sin x) - \sin^2 x &= \\ &= [(x - \sin x) + \sin x] [\sin(\sin x) - \sin x + \sin x] - \sin^2 x \\ &= (x - \sin x) [\sin(\sin x) - \sin x] + \\ &\quad + (x - \sin x) \sin x + \sin x [\sin(\sin x) - \sin x] \end{aligned}$$

Cioè

$$x \sin(\sin x) - \sin^2 x = (x - \sin x) [\sin(\sin x) - \sin x] + \sin x [x - 2 \sin x + \sin(\sin x)],$$

per cui denotando con λ (se esiste) il limite proposto, si ha:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) [\sin(\sin x) - \sin x]}{x^6} + \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [x - 2 \sin x + \sin(\sin x)]}{x^6} \\ &= \lambda_1 + \lambda_2, \end{aligned}$$

essendo:

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) [\sin(\sin x) - \sin x]}{x^6}, \quad \lambda_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [x - 2 \sin x + \sin(\sin x)]}{x^6} \quad (2)$$

Calcoliamo separatamente i due limiti λ_1 e λ_2 .

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}}_{=\lambda'_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{\sin^3 x}}_{=\lambda''_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3}_{=1} \\ &= \lambda'_1 \lambda''_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Se in λ''_1 eseguiamo il cambio di variabile $t = \sin x$, otteniamo:

$$\lambda''_1 = -\lambda'_1 \implies \lambda_1 = -\lambda'^2_1 = - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \right)^2 \quad (4)$$

Per calcolare tale limite scriviamo

$$\lambda'_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Il secondo limite è quasi immediato:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}}_{=1/2} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

cosicchè

$$\lambda'_1 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} \quad (5)$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} &= \frac{x - \sin x}{\tan x (1 - \cos x)} \\ &= \frac{x - \sin x}{\sin x (1 - \cos x)} \cdot \cos x \end{aligned}$$

Sostituendo in (5):

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x (1 - \cos x)} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}_{=1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x (1 - \cos x)} \end{aligned}$$

Poniamo

$$g(x) \stackrel{def}{=} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x - \sin x}$$

Riesce:

$$-x^2 + 3 \leq g(x) \leq x^2 + 3,$$

per cui applicando il **teorema dei carabinieri**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{1}{3} \implies \lambda'_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

E dalla (4):

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) [\sin(\sin x) - \sin x]}{x^6} = -\frac{1}{36}$$

Passiamo a λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [x - 2 \sin x + \sin(\sin x)]}{x^6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin x + \sin(\sin x)}{x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin x + \sin(\sin x)}{x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) - [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^5} \end{aligned}$$

Utilizzando prostaferesi e addizione:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} &= \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \\
&= \frac{\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \\
&= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= 1 - \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}
\end{aligned}$$

Per $\alpha = x$, $\beta = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \sin (\sin x)}{\sin (x - \sin x)} &= 1 - \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)} \\
\implies \sin x - \sin (\sin x) &= \sin (x - \sin x) \left[1 - \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)} \right]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) - \sin (x - \sin x) \left[1 - \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)} \right]}{x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) - \sin (x - \sin x) + \sin (x - \sin x) \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)}}{x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(x - \sin x) - \sin (x - \sin x)}{x^5}}_{=0} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x - \sin x) \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)}}{x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x - \sin x) \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)}}{x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x - \sin x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\sin x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)}}{x^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x - \sin x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin (x - \sin x)}{x - \sin x}}_{=\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x - \sin x}{x^3}}_{=\frac{1}{6}} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

L'altro è

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)}}{x^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \cos\left(\frac{x - \sin x}{2}\right) = 1}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{x}}_{=1/2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\lambda_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Il limite proposto:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$$