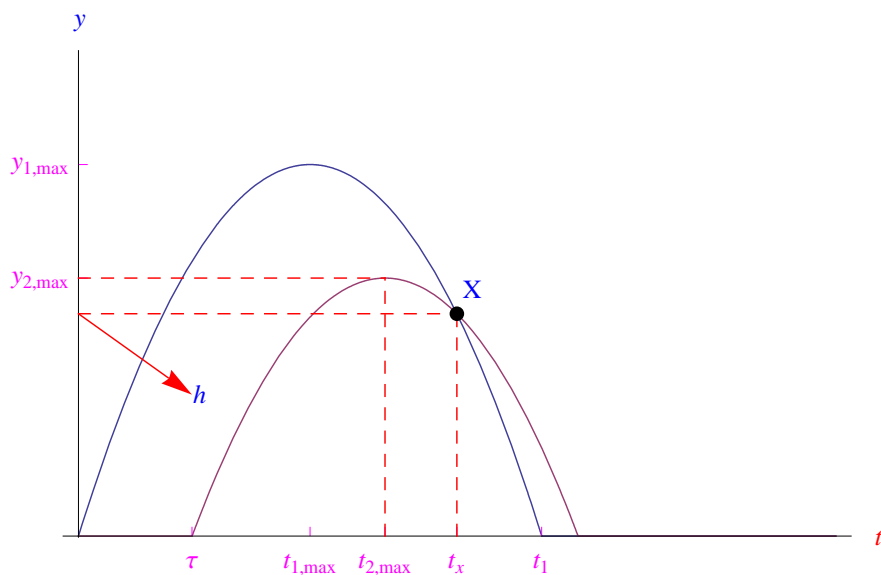


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Collisione di palline in caduta libera

Marcello Colozzo



Esercizio 1 La pallina A viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_{01} . Dopo un tempo τ , la pallina B viene lanciata verso l'alto lungo la medesima verticale con velocità iniziale $v_{02} < v_{01}$.

1. Determinare i valori di τ per i quali A e B collidono.
2. Per quale valore di $\tau > 0$ l'istante di collisione è minimo? In tal caso, a quale altezza le palline collidono?

(Schematizzare le palline attraverso due punti materiali che si muovono nel campo gravitazionale terrestre supposto uniforme e trascurando la resistenza dell'aria).

Soluzione

Orientiamo un asse y verso l'alto lungo la direzione del moto (fase ascendente), e con l'origine nel punto di lancio. L'equazione oraria del moto di A si scrive:

$$y_1(t) = v_{01}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Nel piano cartesiano ty la (1) è l'equazione di una parabola per l'origine e concava verso il basso. Dal momento che il moto si svolge nella regione $y \geq 0$, dobbiamo imporre $y(t > t_1) = 0$, essendo t_1 l'istante di ritorno a terra. Per un'evidente ragione di simmetria, si ha che $t_1 = 2t_{1,\max}$, essendo $t_{1,\max}$ l'ascissa del vertice della parabola (massima altezza raggiunta da A), riesce $t_2 = 2t_{1,\max}$, come possiamo vedere dal grafico di fig. 1. L'istante $t_{1,\max}$ è punto di massimo relativo per la funzione $y_1(t)$, onde è uno zero della derivata prima ovvero della velocità scalare:

$$v_1(t) = \dot{y}_1(t) \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}y(t) = v_{01} - gt, \quad (2)$$

onde

$$t_{1,\max} = \frac{v_{01}}{g} \quad (3)$$

Per quanto precede:

$$t_1 = 2t_{1,\max} = \frac{2v_{01}}{g} \quad (4)$$

Alternativamente, t_1 è l'ascissa del punto di intersezione della parabola (1) con l'asse dei tempi:

$$y_1(t) = 0 \iff t \left(v_{01} - \frac{1}{2}gt \right) = 0$$

Scartando la radice $t = 0$ (passaggio per l'origine), si ottiene $t_1 = \frac{2v_{01}}{g}$. La massima altezza raggiunta dalla pallina A è:

$$y_{1,\max} = y_1(t_{1,\max}) = \frac{v_{01}^2}{2g} \quad (5)$$

In definitiva, il diagramma orario di A è l'arco di parabola la cui equazione è espressa da:

$$y_1(t) = \begin{cases} v_{01}t - \frac{1}{2}gt^2, & t \in [0, t_1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6)$$

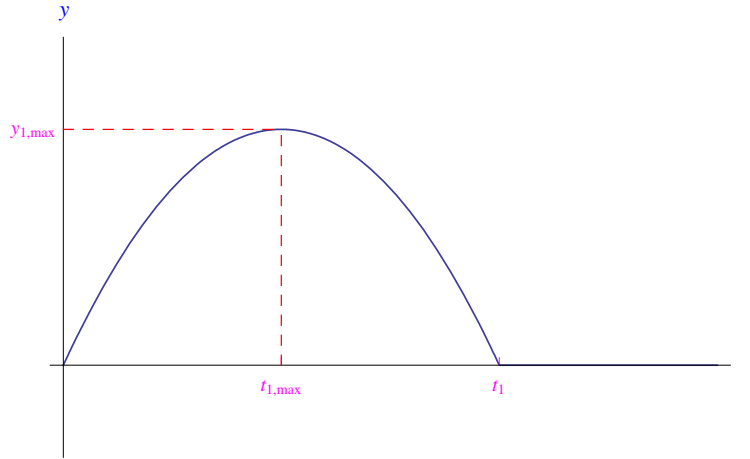


Figura 1: Esercizio 1. Diagramma orario della pallina A . La pallina raggiunge la massima quota all'istante $t_{1,\max} = \frac{v_{01}}{g}$. Al tempo $t_1 = \frac{2v_{01}}{g}$ ritorna a terra, e per $t \geq t_1$ il diagramma orario è il grafico della funzione identicamente nulla.

Per scrivere l'equazione oraria del moto della pallina B , dobbiamo tener conto del ritardo τ con cui viene lanciata. Dal momento che la pallina A viene lanciata a $t = 0$, si ha che B viene lanciata a $t = \tau$. Quindi scriviamo:

$$y_2(t) = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2}g(t - \tau)^2$$

Si noti che da un punto di vista formale è $y_2(0) < 0$. Cioè è come se nell'istante $t = 0$ la pallina B occupasse un punto di ordinata $y < 0$, per poi transitare per l'origine all'istante $t = \tau$ alla velocità v_{02} . Imponiamo, quindi, la condizione $y_2(t \leq \tau) = 0$. Inoltre, se t_2 è l'istante di ritorno a terra, dovrà essere $y(t \geq t_2) = 0$. In definitiva, l'equazione oraria del moto della pallina B è:

$$y_2(t) = \begin{cases} v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2}g(t - \tau)^2, & \text{se } t \in [\tau, t_2] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7)$$

Determiniamo t_2 , considerando che è l'ascissa del punto di intersezione dell'arco di parabola (7) con l'asse delle ascisse:

$$v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2}g(t - \tau)^2 = 0 \iff (t - \tau) \left[v_{02} - \frac{1}{2}g(t - \tau) \right] = 0$$

Cioè

$$\begin{aligned} t - \tau = 0 &\implies t = \tau \\ v_{02} - \frac{1}{2}g(t - \tau) = 0 &\implies t - \tau = \frac{2v_{02}}{g}, \end{aligned}$$

quindi

$$t_2 = \frac{2v_{02}}{g} + \tau, \quad (8)$$

come mostrato nel diagramma orario riportato in fig. 2. È facile determinare l'istante in cui B raggiunge la massima altezza:

$$t_{2,\max} = \frac{v_{02}}{g} + \tau, \quad (9)$$

per cui

$$y_{2,\max} = y_2(t_{2,\max}) = \frac{v_{02}^2}{2g} \quad (10)$$

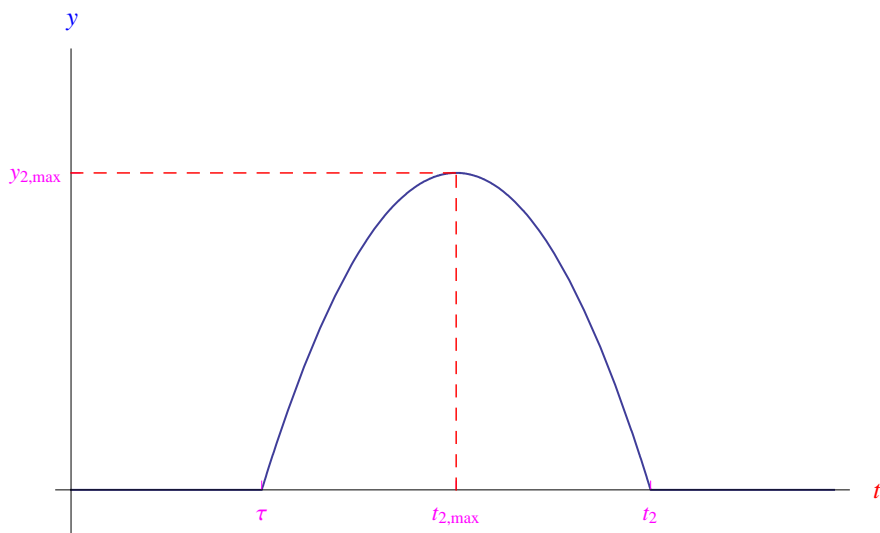


Figura 2: Esercizio 1. Diagramma orario della pallina B .

L'istante di collisione è l'ascissa t_x (nel piano cartesiano ty) del punto X di intersezione delle parabole γ_1 e γ_2 che rappresentano i diagrammi orari di singola pallina, come illustrato in fig. 3.

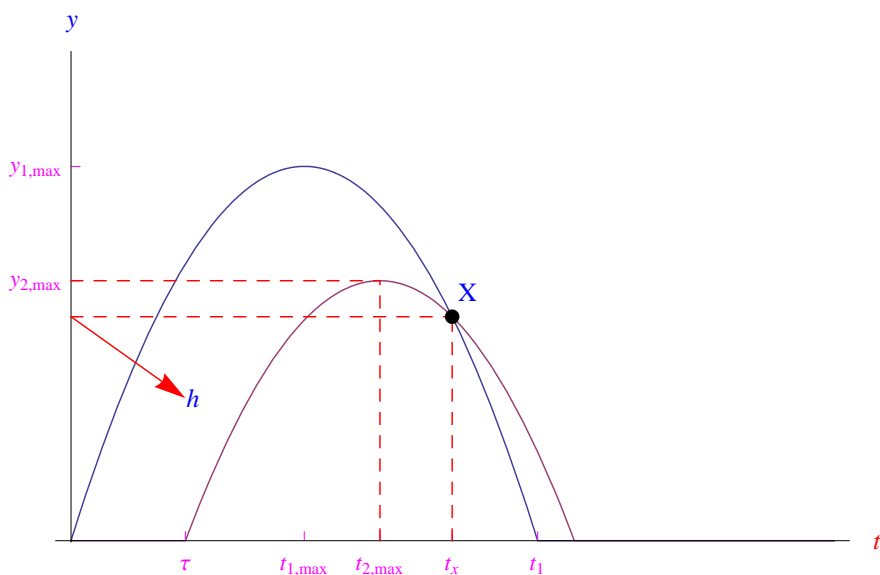


Figura 3: Esercizio 1. Collisione delle palline vista nel piano cartesiano ty .

Segue:

$$\begin{aligned} y_1(t) = y_2(t) &\iff v_{01}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2}g(t - \tau)^2 \\ &\iff v_{01}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{02}t - v_{02}\tau - \frac{1}{2}gt^2 + g\tau t - \frac{1}{2}g\tau^2 \\ &\iff v_{02}t - v_{01}t + g\tau t = \frac{1}{2}g\tau^2 + v_{02}\tau, \end{aligned}$$

onde

$$t_x = \frac{\frac{1}{2}g\tau^2 + v_{02}\tau}{v_{02} - v_{01} + g\tau} \quad (11)$$

Per rispondere al quesito 1 conviene eseguire uno studio di funzione di $t_x(\tau)$, riscrivendo:

$$t_x(\tau) = \frac{g\tau^2 + 2v_{02}\tau}{2(v_{02} - v_{01} + g\tau)} \quad (12)$$

Insieme di definizione

Dal momento che $v_{02} > v_{01}$, deve essere $g\tau \neq v_{01} - v_{02} > 0$ per cui la funzione è definita in

$$\left[0, \frac{v_{01} - v_{02}}{g}\right) \cup \left(\frac{v_{01} - v_{02}}{g}, +\infty\right) \quad (13)$$

Comportamento agli estremi del campo di esistenza

Abbiamo

$$t_x(0) = 0 \quad (14)$$

Cinematicamente significa che A e B collidono ovvero coincidono, solo nell'istante di lancio (che è simultaneo in quanto $\tau = 0$), come appare in fig. 4. Ciò perchè $v_{01} > v_{02} \implies y_{2,\max} > y_{1,\max}$ per cui le parabole non si intersecano.

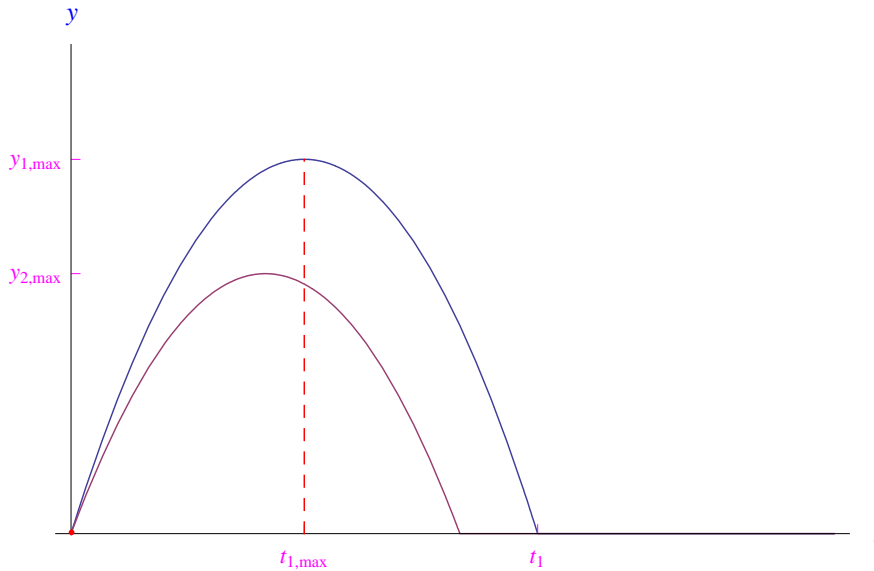


Figura 4: Esercizio 1. Per $\tau = 0$ le palline collidono ovvero coincidono, solo nell'istante $t = 0$.

Prima di studiare il comportamento in un intorno di

$$\tau_* \stackrel{def}{=} \frac{v_{01} - v_{02}}{g},$$

è preferibile studiare il segno della funzione:

$$t_x(\tau) \geq 0 \iff \frac{g\tau^2 + 2v_{02}\tau}{v_{02} - v_{01} + g\tau} \geq 0,$$

osservando che $t_x < 0$ non ha significato fisico, per cui deve essere (a parte $\tau = 0$ già visto sopra):

$$\tau > \tau_* \implies t_x(\tau) > 0 \quad (15)$$

In ogni caso, da ciò segue

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_*^-} t_x(\tau) = -\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_*^+} t_x(\tau) = +\infty \quad (16)$$

Cioè τ_* è punto di discontinuità di seconda specie per la funzione, e la retta $\tau = \tau_*$ è asintoto verticale per il corrispondente diagramma cartesiano. Inoltre

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} t_x(\tau) = +\infty \quad (17)$$

Studio della monotonia

La derivata prima è

$$t'_x(\tau) = \frac{d}{d\tau} t_x(\tau) = \frac{1}{2} \frac{g^2\tau^2 + 2g\tau(v_{02} - v_{01}) + 2v_{02}^2 - 2v_{02}v_{01}}{(v_{02} - v_{01} + g\tau)^2} \quad (18)$$

Ricerchiamone gli zeri:

$$\begin{aligned} t'_x(\tau) = 0 &\iff g^2\tau^2 + 2g\tau(v_{02} - v_{01}) + 2v_{02}^2 - 2v_{02}v_{01} = 0 \\ &\iff \tau_{\pm} = \frac{v_{01} - v_{02} \pm \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g} \end{aligned}$$

Riesce $\tau_- < 0$ e dal momento che richidiamo $\tau \geq 0$, la radice accettabile è:

$$\tau_+ = \frac{v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g} \stackrel{def}{=} \tau_1 > \tau_* = \frac{v_{01} - v_{02}}{g},$$

che cade dopo l'asintoto verticale. Studiamo il segno:

$$t'_x(\tau) > 0 \iff g^2\tau^2 + 2g\tau(v_{02} - v_{01}) + 2v_{02}^2 - 2v_{02}v_{01} > 0 \iff \tau \notin [\tau_-, \tau_+]$$

Ma $\tau > 0$ onde

$$\tau \in (\tau_1, +\infty) \implies t'_x(\tau) > 0$$

Ne consegue che $t_x(\tau)$ è strettamente crescente in $(\tau_1, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(0, \tau_1)$. Quindi τ_1 è punto di minimo relativo.

Asintoto obliquo

Calcoliamo il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} t'_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{g^2 + \frac{2g}{\tau}(v_{02} - v_{01}) + \frac{1}{\tau}(2v_{02}^2 - 2v_{01}v_{01})}{\left(\frac{v_{02} - v_{01}}{\tau} + g\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ordinata all'origine:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} [t_x(\tau) - m\tau] = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[\frac{g\tau^2 + 2v_{02}\tau}{v_{02} - v_{01} + g\tau} - \frac{\tau}{2} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\tau(v_{01} + v_{02})}{2\left(\frac{v_{01}-v_{02}}{\tau} + g\tau\right)} = \frac{v_{01} + v_{02}}{2g} \end{aligned}$$

Ne concludiamo che la retta

$$r : t = \frac{\tau}{2} + \frac{v_{01} + v_{02}}{2g}$$

è asintoto obliquo. Si noti che il suo coefficiente angolare è indipendente dalle condizioni iniziali (velocità di lancio), mentre l'ordinata all'origine è proporzionale alla media aritmetica delle velocità di lancio.

Tracciamento del grafico

Non è necessario studiare la derivata seconda. Il grafico è riportato in fig. 5.

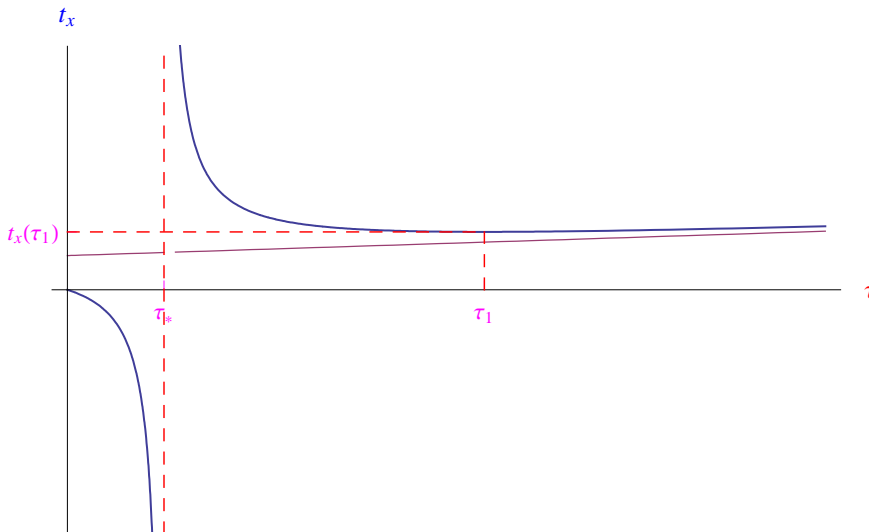


Figura 5: Esercizio 1. Diagramma cartesiano della funzione (12).

Per quanto precede:

$$A \text{ e } B \text{ collidono} \iff 0 \leq t_x(\tau) \leq t_1$$

Cioè

$$0 \leq \frac{g\tau^2 + 2v_{02}\tau}{2(v_{02} - v_{01} + g\tau)} \leq \frac{2v_{01}}{g} \quad (19)$$

Dal precedente studio di funzione si ha:

$$t_x(\tau) > 0 \iff \tau > \tau_* = \frac{v_{01} - v_{02}}{g},$$

per cui la (19) conduce al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{g\tau^2 + 2v_{02}\tau}{2(v_{02} - v_{01} + g\tau)} \leq \frac{2v_{01}}{g} \\ \tau > \frac{v_{01} - v_{02}}{g} \end{cases} \quad (20)$$

Dalla prima

$$\frac{g^2\tau^2 + 2v_{02}g\tau - 4v_{01}(v_{02} - v_{01} + g\tau)}{2g(v_{02} - v_{01} + g\tau)} \leq 0 \quad (21)$$

Dalla seconda delle (20) si ha che il denominatore della (21) è sempre > 0 , onde la (21) equivale a:

$$g^2\tau^2 + 2v_{02}g\tau - 4v_{01}(v_{02} - v_{01} + g\tau) \leq 0$$

Risolviamo dapprima

$$\begin{aligned} g^2\tau^2 + 2v_{02}g\tau - 4v_{01}(v_{02} - v_{01} + g\tau) &= 0 \\ \iff g^2\tau^2 - 2g(2v_{01} - v_{02})\tau - 4v_{01}(v_{02} - v_{01}) &= 0 \end{aligned}$$

Cioè

$$\tau = \begin{cases} 2\tau_* = \frac{2(v_{01} - v_{02})}{g} \\ t_1 \end{cases}$$

Ne consegue che il sistema (20) è verificato per $\tau \in [2\tau_*, t_1]$, ovvero

$$A \text{ e } B \text{ collidono} \iff 2\tau_* \leq \tau \leq t_1 \quad (22)$$

Tale condizione (necessaria e sufficiente) di collisione è illustrata graficamente in fig. 6.

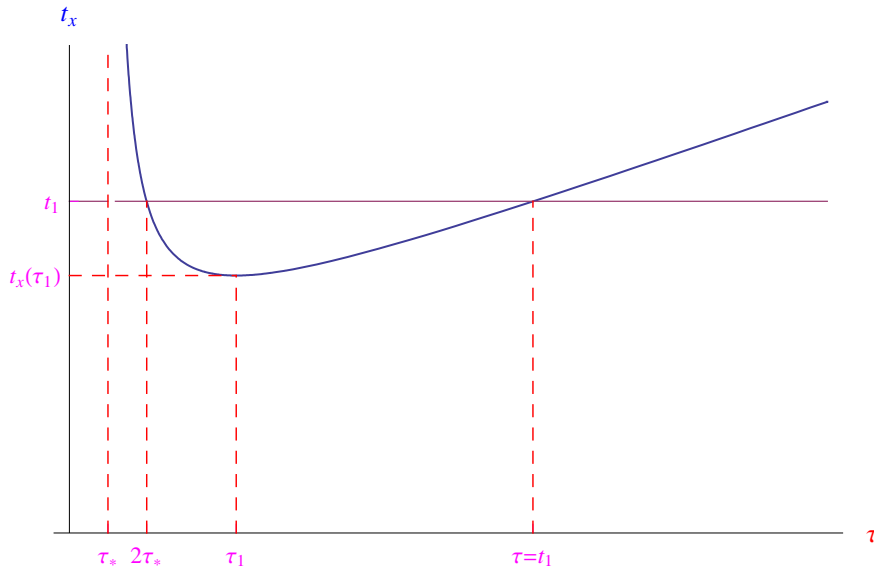


Figura 6: Esercizio 1. Rappresentazione grafica delle soluzioni del sistema (21).

Per rispondere al quesito 2, rammentiamo che

$$\tau_1 = \frac{v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g}$$

è punto di minimo relativo per la funzione $t_x(\tau)$. Inoltre è $\tau_1 \in [2\tau_*, t_1]$ per cui se il tempo di ritardo è $\tau = \tau_1$, l'istante di collisione raggiunge il minimo valore:

$$t_{x,\min} = t_x(\tau_1) = \frac{v_{01}^2 - v_{02}^2 + v_{01}\sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g\sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}},$$

L'altezza in cui le palline collidono è

$$h = y_1(t_{x,\min}) = \frac{v_{02}^2}{2g},$$

cioè $h = y_{2,\max}$.