Esercizio 30 (Mandò)

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *(Nel testo è il n. 30, pag. 68)*

Studiare il moto di un punto che si muove sull'asse x secondo la legge oraria

$$x(t) = 9A\sin\omega t - 4A\sin^3\omega t \tag{1}$$

In particolare:

1. *si verifichi che tale moto può considerarsi la somma di due moti armonici di pulsazione ω e 3ω;*
2. *si calcolino velocità ed accelerazione;*
3. *si determinino posizione e valore dei massimi e dei minimi di x;*
4. *si traccino infine i grafici di $x(t)$ e di $v(t)$.*

Soluzione

Per il quesito 1 ricordiamo l'identità trigonometrica

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

per cui l'equazione oraria diventa:

$$x(t) = 6A\sin\omega t + A\sin(3\omega t)$$

Abbiamo così un somma di moti armonici, il primo di pulsazione ω e il secondo di pulsazione 3ω. Osserviamo che il periodo fondamentale del moto è

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La risposta al quesito 2 è

$$\begin{aligned} v(t) &= 6\omega A\cos\omega t + 3\omega A\cos(3\omega t) \\ a(t) &= -6\omega^2 A\sin\omega t - 9\omega^2 A\sin(3\omega t) \end{aligned}$$

Per il quesito 3 conviene considerare l'equazione oraria

$$x(t) = 9A\sin\omega t - 4A\sin^3\omega t$$

Quindi la derivata prima ossia la velocità

$$v(t) = 9\omega A\cos\omega t - 12\omega A\sin^2\omega t\cos\omega t$$

Applichiamo quindi il procedimento standard per la ricerca di massimi e minimi relativi di una funzione reale di una variabile reale:

$$\begin{gathered} 9\omega A\cos\omega t - 12\omega A\sin^2\omega t\cos\omega t = 0 \\ \Longleftrightarrow 3\cos\omega t - 4\sin^2\omega t\cos\omega t = 0 \\ \Longleftrightarrow \left(3 - 4\sin^2\omega t\right)\cos\omega t = 0 \end{gathered}$$

Abbiamo

$$\cos\omega t = 0 \underset{t\in\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]}{\Longleftrightarrow} t = \frac{\pi}{2\omega},\ t = \frac{3\pi}{2\omega}$$

Vediamo per quali valori di t si annulla l'altro fattore:

$$3 - 4\sin^2\omega t = 0 \underset{t\in\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]}{\Longleftrightarrow} \sin\omega t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\underset{t\in\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]}{\Longleftrightarrow} t = \frac{\pi}{3\omega}, \frac{2\pi}{3\omega}, \frac{4\pi}{3\omega}, \frac{5\pi}{3\omega}$$

Deve essere

$$3 - 4\sin^2\omega t > 0 \Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\omega t < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

che si risolve facilmente tracciando il cerchio goniometrico oppure tramite il grafico della fig. 1, ottenendo

$$3 - 4\sin^2\omega t > 0 \underset{t\in\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]}{\Longleftrightarrow} t \in \left[0, \frac{\pi}{3\omega}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3\omega}, \frac{4\pi}{3\omega}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right],$$

mentre

$$\cos\omega t > 0 \underset{t\in\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]}{\Longleftrightarrow} t \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2\omega}, \frac{2\pi}{\omega}\right]$$

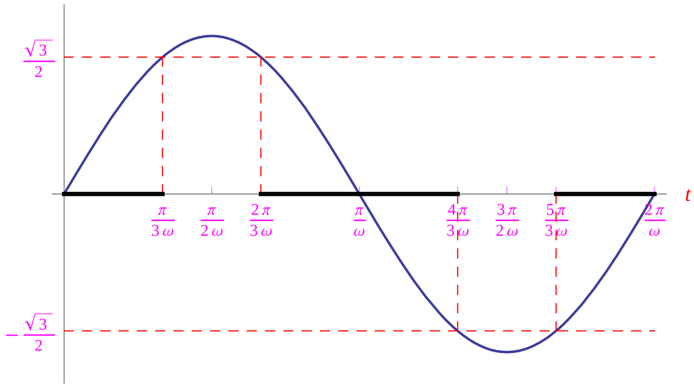

Figura 1: Ricerca delle soluzioni della disequazione $3 - 4\sin\omega t > 0$.

Studiando il segno del prodotto $\left(3 - 4\sin^2\omega t\right)\cos\omega t$, stabiliamo gli intervalli di monotonia della funzione $x(t)$, e quindi la natura dei singoli punti critici trovando. Non è difficile giungere alla seguente conclusione:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{3\omega} & \text{punto di max relativo} \\ x(t_1) = 3\sqrt{3}A \end{cases}, \quad \begin{cases} t_2 = \frac{\pi}{3\omega} & \text{punto di min relativo} \\ x(t_2) = 5A \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_3 = \frac{2\pi}{3\omega} & \text{punto di max relativo} \\ x(t_3) = 3\sqrt{3}A \end{cases}, \quad \begin{cases} t_4 = \frac{4\pi}{3\omega} & \text{punto di min relativo} \\ x(t_4) = -3\sqrt{3}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_5 = \frac{3\pi}{2\omega} & \text{punto di max relativo} \\ x(t_5) = 5A \end{cases}, \quad \begin{cases} t_6 = \frac{5\pi}{3\omega} & \text{punto di min relativo} \\ x(t_6) = -3\sqrt{3}A \end{cases}$$

Quesito 4

I grafici sono riportati in fig. 2.

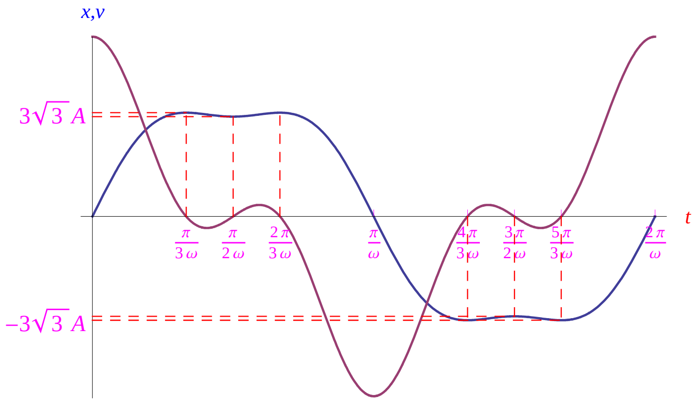

Figura 2: Andamento di $x(t)\,, v(t)$.