Sviluppo in serie di Fourier di una funzione

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Studiare la convergenza della serie di Fourier associata alla funzione periodica di periodo* $T = 2\pi$.

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \qquad x \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

Soluzione. Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.

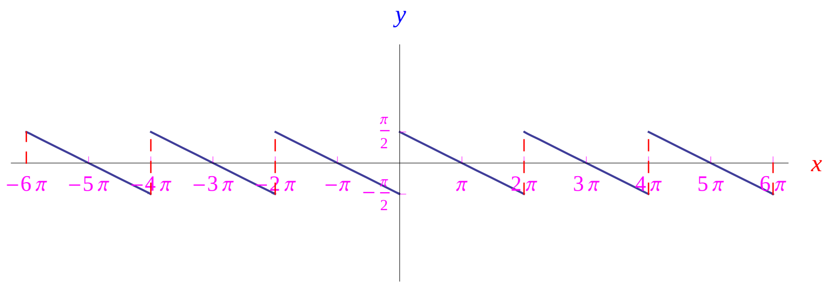

Figura 1: Grafico della funzione periodica (1).

Ricordiamo che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\right], \tag{2}$$

con i coefficienti di Fourier dati da:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)dx, \qquad k = 0, 1, 2, ... \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)dx, \qquad k = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3}$$

Dal momento che la funzione è dispari, si ha uno sviluppo di soli seni. Più precisamente, riscriviamo la seconda delle (3) nella forma equivalente

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)dx$$

L'integrando è pari, in quanto prodotto di due funzioni dispari ($f(x)$ e $\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$), onde:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)dx \underset{T=2\pi}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{T/2}\frac{1}{2}(\pi - x)\sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi\underbrace{\int_0^\pi \sin kx dx}_{=I_1} - \underbrace{\int_0^\pi x\sin kx dx}_{=I_2}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Calcoliamo separatamente gli integrali:

$$I_1 = \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx d(kx) = -\frac{1}{k}\left[\cos kx\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{1}{4}\left(\underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} - 1\right),$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{k}\left[1 - (-1)^k\right] \tag{5}$$

L'altro integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi x \sin kx dx = \int_0^\pi x d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) \\ &= -\left[x\frac{\cos kx}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx dx \\ &= -\frac{1}{k}\left[\pi (-1)^k - 0\right] + \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \cos kx d(kx) \\ &= -\frac{1}{k}\pi (-1)^k + \frac{1}{k^2}\left[\sin kx\right]_{x=0}^{x=\pi} \end{aligned}$$

Cioè

$$I_2 = -\frac{1}{k}\pi (-1)^k$$

Sostituendo I_1 e I_2 nella (4):

$$b_k = \frac{1}{k}, \quad (k = 1, 2, 3...,) \tag{6}$$

Finalmente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{7}$$

Per un noto teorema tale serie converge e ha per somma $f(x)$ nei punti di continuità di tale funzione. Precisamente, f è continua in

$$\mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi\} \tag{8}$$

I punti $x_k = 2k\pi$ sono di discontinuità di prima specie:

$$f\left(x_k^-\right) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad f\left(x_k^+\right) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

Per il predetto teorema, la serie (7) nei punti x_k converge a

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x_k^-\right) + f\left(x_k^+\right)\right] = 0 \tag{10}$$

Ne concludiamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & \text{se } x \neq 2k\pi \\ 0, & \text{se } x = 2k\pi \end{cases} \tag{11}$$

Osserviamo infine che il processo di convegenza esibisce il fenomeno di Gibbs in virtù della presenza delle discontinuità di prima specie, come mostrato in fig. 2

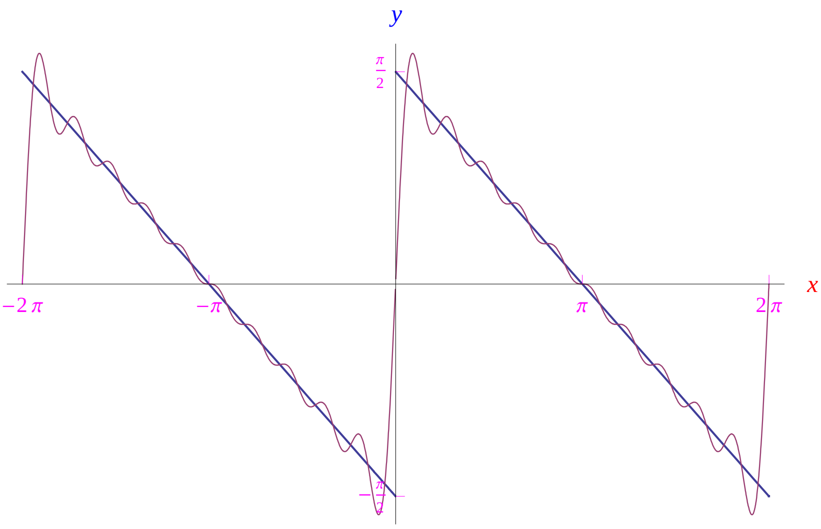

Figura 2: Grafico della funzione periodica (1), confrontato con il suo sviluppo di Fourier troncato al termine di ordine 10.