Calcolo di un integrale curvilineo

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\boxed{I = \int_{\gamma(P,Q)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds,} \tag{1}$$

dove $\gamma(P,Q)$ è l'arco di elica cilindrica

$$x(t) = R\cos t, \; y(t) = R\sin t, \; z(t) = kt, \tag{2}$$

di estremi $P(R,0,0)$ e $Q(-R,0,k\pi)$ (cfr fig. **??**)

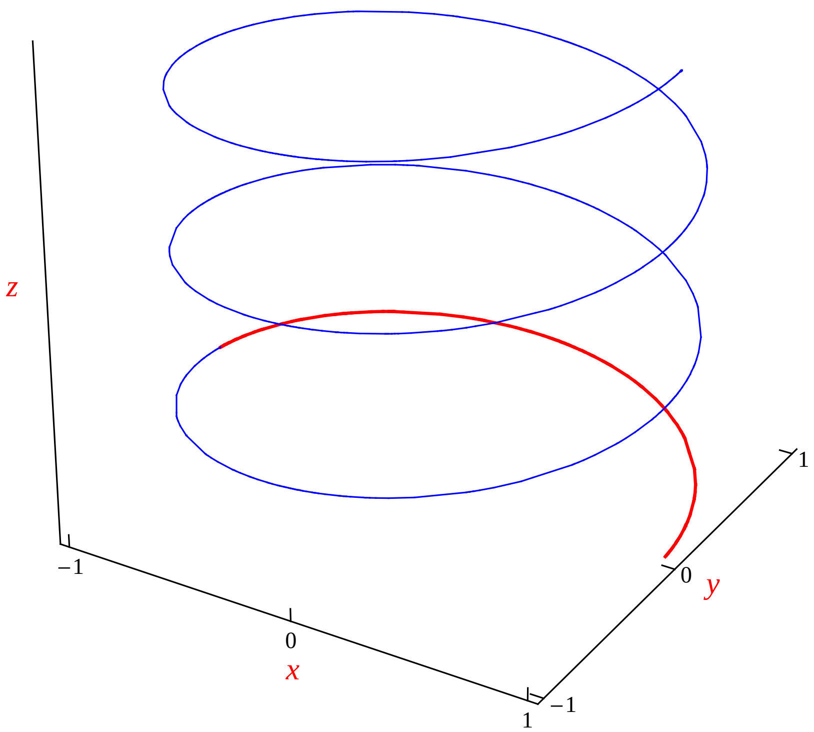

Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).

Soluzione

È facile persuadersi che gli estremi P e Q del cammino di integrazione corrispondono rispettivamente ai valori $t=0$ e $t=\pi$ del parametro, per cui la rappresentazione parametrica (2) va completata in

$$x(t) = R\cos t, \; y(t) = R\sin t, \; z(t) = kt, \quad t \in [0,\pi] \tag{3}$$

Calcoliamo innanzitutto la funzione:

$$H(t) = +\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \tag{4}$$

Le derivate delle funzioni $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono

$$x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,\ z'(t) = k \tag{5}$$

Quindi

$$H(t) = \sqrt{R^2 + k^2} \tag{6}$$

Il verso di percorrenza (da P a Q) è quello delle t crescenti, per cui introducendo un riferimento curvilineo con origine in P e s contata positivamente da P a Q, si ha che $s(t)$ è strettamente crescente:

$$ds = H(t)\,dt,$$

cioè

$$ds = \sqrt{R^2 + k^2}dt \tag{7}$$

Integrando:

$$s(t) = \sqrt{R^2 + k^2}\int_0^t d\tau = \sqrt{R^2 + k^2}t \tag{8}$$

La funzione inversa di $s(t)$ è

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, \quad s \in \left[0, \pi\sqrt{R^2 + k^2}\right], \tag{9}$$

giacché:

$$0 \leq t = \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}} \leq \pi \Longrightarrow 0 \leq s \leq \pi\sqrt{R^2 + k^2} \tag{10}$$

Ne segue che la rappresentazione naturale di γ è:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s), \tag{11}$$

dove

$$\varphi(s) = R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}\right), \quad \psi(s) = R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}\right), \quad \chi(s) = \frac{ks}{\sqrt{R^2 + k^2}} \tag{12}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(P,Q)} (x + y + z)\,ds &= \int_0^{\pi\sqrt{R^2+k^2}} \left[\varphi(s)^2 + \psi(s)^2 + \chi(s)^2\right] ds \\
&= \int_0^{\pi\sqrt{R^2+k^2}} \left(R^2 + \frac{k^2 s^2}{R^2 + k^2}\right) ds \\
&= R^2 \int_0^{\pi\sqrt{R^2+k^2}} ds + \frac{k^2}{R^2 + k^2}\int_0^{\pi\sqrt{R^2+k^2}} s^2 ds \\
&= R^2\pi\sqrt{R^2 + k^2} + \frac{k^2}{R^2 + k^2} \cdot \frac{1}{3}\, s^3\Big|_0^{\pi\sqrt{R^2+k^2}} \\
&= \pi R^2\sqrt{R^2 + k^2} + \frac{k^2\pi^3}{3}\sqrt{R^2 + k^2}
\end{aligned}$$

Cioè

$$\int_{\gamma(P,Q)} (x + y + z)\,ds = \pi\sqrt{R^2 + k^2}\left(R^2 + \frac{k^2}{3}\pi^2\right) \tag{13}$$

Alternativamente, possiamo integrare rispetto a t:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(P,Q)} (x+y+z)\, ds &= \int_0^{\pi} \left[x\left(t\right)^2 + y\left(t\right)^2 + z\left(t\right)^2\right] H\left(t\right) dt \\
&= \sqrt{R^2+k^2} \int_0^{\pi} \left(R^2 + k^2 t^2\right) dt \\
&= \pi\sqrt{R^2+k^2} \left(R^2 + \frac{k^2}{3}\pi^2\right)
\end{aligned}$$