Calcolo di un integrale curvilineo

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Calcolare

$$I(R) = \int_{\gamma(P,Q)} f_R(x,y)\,ds, \tag{1}$$

dove:

- $f_R(x,y) = x + y - R$
- $\gamma(P,Q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}\,;\ P(0,R)\,,\ Q(R,0)$.
- L'ascissa curvilinea s ha per origine il punto Q ed è orientata nel verso antiorario.

Soluzione

Una rappresentazione parametrica del cammino di integrazione (illustrato in fig. 1) è

$$x(t) = R\cos t,\ \ y(t) = R\sin t, \qquad \frac{\pi}{2} \geq t \geq 0 \tag{2}$$

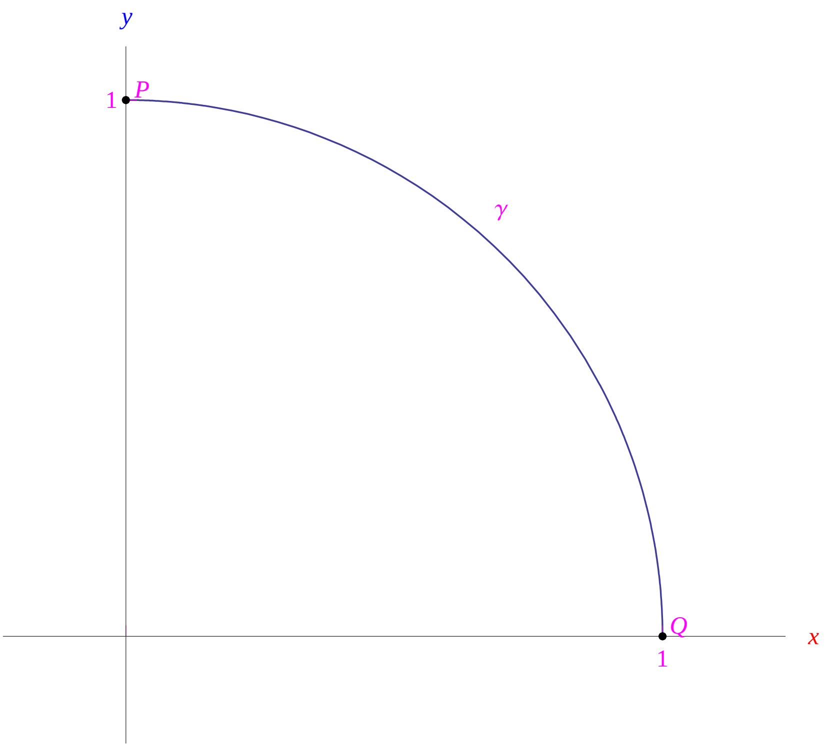

Figura 1: Cammino di integrazione relativo all'integrale (1).

Derivando rispetto a t:

$$x'(t) = -R\sin t,\ \ y'(t) = R\cos t \tag{3}$$

Segue l'elemento d'arco

$$ds = \pm\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \pm R dt \tag{4}$$

Cioè

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \pm R \tag{5}$$

Ma la funzione $s\left(t\right)$ è strettamente crescente, per cui

$$s'\left(t\right)=+R\Longrightarrow ds=Rdt \tag{6}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I\left(R\right) &= \int_{\pi/2}^{0}\left(R\cos t+R\sin t-R\right)Rdt=R^2\int_{\pi/2}^{0}\left(\cos t+\sin t-1\right)dt \\ &= R^2\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos t-\sin t\right)dt=R^2\left(\int_0^{\pi/2}dt-\int_0^{\pi/2}\cos tdt-\int_0^{\pi/2}\sin tdt\right) \\ &= R^2\left(\frac{\pi}{2}-\sin t|_0^{\pi/2}+\cos t|_0^{\pi/2}\right)=R^2\left(\frac{\pi}{2}-1+0-1\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Finalmente

$$I\left(R\right)=R^2\left(\frac{\pi}{2}-2\right) \tag{8}$$