Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Superficie equipotenziale. Gradiente

L'energia potenziale ha le dimensioni di un lavoro, per cui si misura in erg (CGS) o in J (MKS). Si badi che si tratta di due grandezze fisiche distinte. Più precisamente, il lavoro si realizza solo quando un corpo si sposta da un punto ad un altro, ed è quantificato dalla differenza di energia potenziale. Può comunque essere nullo (ovviamente in corrispondenza di differenze nulle di energia potenziale). Più in generale, comunque prendiamo una *superficie equipotenziale*

$$S : V(x, y, z) = \text{costante}, \quad \forall (x, y, z)$$

per qualunque spostamento di un punto materiale su S, il corrispondente lavoro è nullo. Prendiamo ad esempio, il campo delle forze di gravità, la cui energia potenziale è (asse y orientato verso il basso):

$$V(y) = -mgy$$

Le superfici equipotenziali sono tutti e soli i piani $y =$costante, i.e. i piani orizzontali. Per un assegnato piano orizzontale α, e per uno spostamento del punto materiale da A a B lungo un percorso arbitrario γ contenuto in α, gli spostamenti elementari $d\mathbf{s}$ sono ortogonali ad α, per cui $dL = 0$ e quindi

$$L = \int_{\gamma(A,B)} dL = 0$$

Per un campo centrale le superfici equipotenziali sono sfere concentriche di centro il centro della forza. In generale, per un campo conservativo si definiscono le cosiddette *linee di forza*, ossia quelle curve tali che in ogni punto (x, y, z) la forza $\mathbf{F}$ è orientata lunto la retta tangente alla curva in (x, y, z). Dalla monodromia della funzione $V(x, y, z)$ segue che per un punto (x, y, z) passa una sola superficie equipotenziale e una sola linea di forza. Per quanto precede, quest'ultima è perpendicolare alla corrispondente superficie equipotenziale. Le linee di forza di un campo conservativo vengono allora dette *traiettorie ortogonali* di una assegnata superficie equipotenziale. Da ciò segue che un campo conservativo $\mathbf{F}(x, y, z)$ è univocamente determinato dall'energia potenziale $V(x, y, z)$. Infatti, la direzione di $\mathbf{F}$ è univocamente determinata dalle traiettorie ortogonali di singola superficie equipotenziale. Per deteminare il modulo della forza, consideriamo due superfici equipotenziali infinitamente vicine:

$$S_1 : V(x, y, z) = V_1$$

passante per P in cui vogliamo determinare $F = |\mathbf{F}|$. L'altra superficie sia

$$S_2 : V(x, y, z) = V_1 + dV$$

come illustrato in fig. (1).

Da P tracciamo la normale orientata verso S_2, che definisce la retta di azione di $\mathbf{F}$ nel punto P. È univocamente determinato lo spostamento elementare $d\mathbf{s} = d\mathbf{n}$ lungo la predetta normale. Per definizione di energia potenziale:

$$dV = -dL = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \underset{d\mathbf{s}=d\mathbf{n}}{=} -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} = -F dn$$

giacché i vettori $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{n}$ sono paralleli e concordi. Ne segue

$$F = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

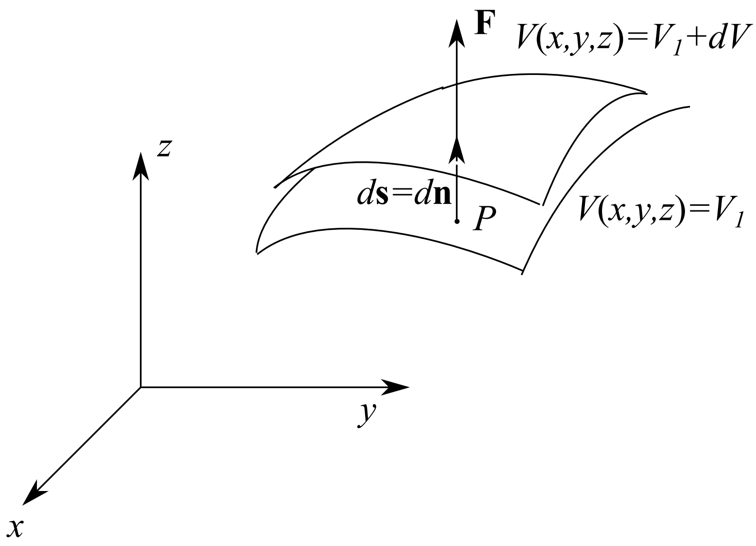

Figura 1: Superfici equipotenziali di uno stesso campo di forze, infinitamente vicine.

cioè il modulo della forza è la derivata di $V(x,y,z)$ secondo la direzione della normale di versore $\mathbf{n}$. D'altra parte, esplicitando il prodotto scalare attraverso le componenti cartesiane dei singoli vettori:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}, \quad d\mathbf{n} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

si ha

$$dV = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Cioè

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1}$$

Quindi

$$F = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \tag{2}$$

Dall'analisi vettoriale segue l'operatore nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}$$

che definisce il *gradiente* di un campo scalare. Abbiamo quindi la seguente espressione per la forza conservativa di energia potenziale V:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{3}$$

Alcune volte è preferibile riferirsi al *potenziale scalare* (o semplicemente *potenziale*) della forza F:

$$U(x,y,z) = -V(x,y,z)$$

onde

$$\mathbf{F} = \nabla U \tag{4}$$

e suole dirsi che la forza $\mathbf{F}$ deriva dal potenziale U.

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I.* Veschi