Integrazione per quadrature di equazioni differenziali del primo ordine

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Consideriamo un sistema dinamico caratterizzato da una grandezza variabile in funzione del tempo t, attraverso una legge $y(t)$ tale da verificare un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\dot{y} + \alpha(t)\, y = \beta(t)\,, \tag{1}$$

dove i coefficienti $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono funzioni di classe C^1 in $X = [t_0, +\infty)$. Per determinare l'integrale generale della (1), osserviamo innanzitutto che il primo membro "somiglia" alla derivata del prodotto della funzione incognita $y(t)$ per un qualche esponenziale contenente il coefficiente $\alpha(t)$. Per far coincidere il primo membro con la predetta derivata, dobbiamo moltiplicare ambo i membri per un *fattore integrante*. Proviamo con la seguente funzione esponenziale:

$$I(t) = e^{\int \alpha(t)dt} \tag{2}$$

Segue

$$e^{\int \alpha(t)dt}\dot{y} + \alpha(t)\, e^{\int \alpha(t)dt} y = \beta(t)\, e^{\int \alpha(t)dt}$$

Cioè

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int \alpha(t)dt} y\right] = \beta(t)\, e^{\int \alpha(t)dt}, \tag{3}$$

da cui

$$y(t)\, e^{\int \alpha(t)dt} = C + \int \beta(t)\, e^{\int \alpha(t)dt} dt,$$

dove C è una costante di integrazione. Dalla precedente ricaviamo l'integrale generale:

$$y(t, C) = e^{-\int \alpha(t)dt}\left[C + \int \beta(t)\, e^{\int \alpha(t)dt} dt\right] \tag{4}$$

La (4) permette di determinare l'integrale generale della (1) *per quadrature*, i.e. attraverso il calcolo di uno o più integrali indefiniti, per tutte e sole le equazioni differenziali del tipo (1) per le quali le primitive delle seguenti funzioni

$$\alpha(t)\,, \quad \beta(t)\, e^{\int \alpha(t)dt} \tag{5}$$

sono elementarmente esprimibili.

Esempio 1 *Integriamo l'equazione differenziale*

$$\dot{y} + ty = t \tag{6}$$

Qui è

$$\alpha(t) = \beta(t) = t,$$

per cui applicando la (4)

$$y(t, C) = e^{-t^2/2}\left(C + \int te^{t^2/2}dt\right)$$

L'integrale si calcola facilmente:

$$\int te^{t^2/2}dt = \int e^{t^2/2}d\left(\frac{t^2}{2}\right) = e^{t^2/2},$$

avendo omesso la costante di integrazione, in quanto già incorporata nella (4). Ne concludiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale assegnata è

$$y(t, C) = Ce^{-t^2/2} + 1 \tag{7}$$

0.0.1 Integrazione numerica

Se le primitive delle funzioni (5) non sono elementarmente esprimibili, si ricorre a un'integrazione numerica eccetto i casi in cui le primitive si esprimono attraverso funzioni integrali o comunque, le funzioni speciali della fisica matematica. Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 2 *Integriamo la seguente equazione differenziale*

$$\dot{y} + ty = 1 \tag{8}$$

Qui è

$$\alpha(t) = t, \ \beta(t) = 1,$$

per cui applicando la (4)

$$y(t, C) = e^{-t^2/2}\left(C + \int e^{t^2/2}dt\right)$$

La primitiva di $e^{t^2/2}$ *non è elementarmente esprimibile se non attraverso la cosiddetta "funzione degli errori" che non stiamo qui a specificare. D'altra parte, tale funzione è built-in in Mathematica che in tal modo restituisce l'integrale generale in forma simbolica, dando la possibilità di plottare la corrispondente famiglia di curve integrali, come mostrato in fig. 1.*

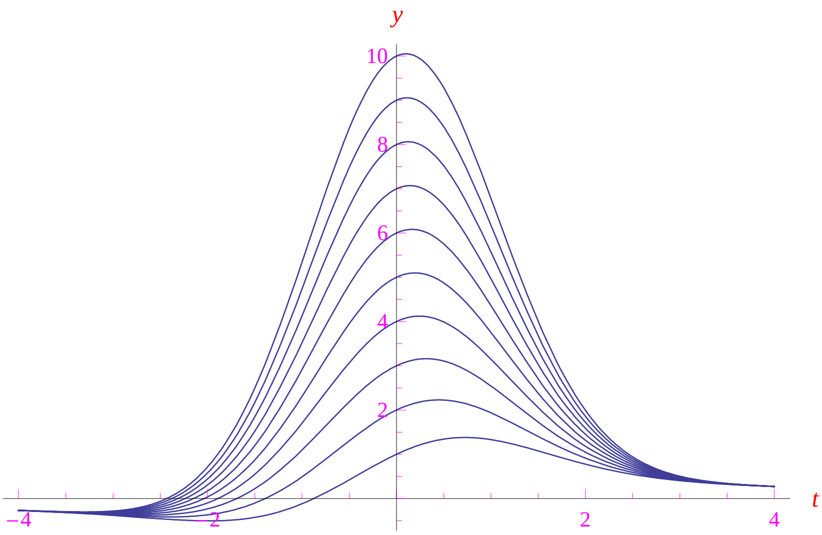

Figura 1: Famiglia di curve integrali della (**??**).