Equazioni differenziali lineari di ordine n

Marcello Colozzo – www.extrabyte.info

1 Wronskiano di un'equazione differenziale lineare omogenea

Un'equazione differenziale di ordine n

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)} = 0\right) \tag{1}$$

si dice *lineare* se tale è la funzione F rispetto alle variabili $y, y', ..., y^{(n)}$. Una tale equazione si presenta nella seguente forma:

$$b_0(x)\, y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + b_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = q(x) \tag{2}$$

dove le $n+2$ funzioni $b_0(x), b_1(x), ..., b_n(x), q(x)$ si assumono continue in un assegnato intervallo X (limitato o illimitato). Senza perdita di generalità, supponiamo che la funzione $b_0(x)$ sia priva di zeri in X, per cui possiamo dividere primo e secondo membro della (2), ottenendo

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \tag{3}$$

avendo definito

$$a_k(x) = \frac{b_k(x)}{b_0(x)}, \quad k = 0, 1, ..., n$$
$$f(x) = \frac{q(x)}{b_0(x)}$$

Le funzioni $a_k(x)$ sono i *coefficienti* della (2), mentre la funzione $f(x)$ è il *termine noto* della medesima equazione. In particolare se il termine noto è identicamente nullo, l'equazione si dice *omogenea*. Nel caso contrario, *non omogenea*. Per la determinazione dell'integrale generale di una equazione non omogenea è utile l'integrazione della cosiddetta *equazione omogenea associata*, ovvero di un'equazione ancora di ordine n con i medesimi coefficienti, ma con termine noto identicamente nullo. Infatti, sussiste la seguente proposizione di cui omettiamo la dimostrazione:

Proposizione 1 *Se $y_0(x)$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea (3) e $\eta(x)$ è un integrale particolare dell'equazione omogenea associata*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \tag{4}$$

la funzione $y_0(x) + \eta(x)$ è ancora un integrale dell'equazione non omogenea. Più in generale, l'integrale generale dell'equazione non omogenea si esprime come somma di un integrale particolare della medesima equazione e dell'integrale generale dell'omogenea associata.

Tale proposizione giustifica, quindi, l'importanza dell'equazione omogenea associata. Pertanto fissiamo la nostra attenzione sulla (4). Iniziamo con l'osservare che la linearità di tale equazione implica:

Proposizione 2 *Una qualunque combinazione lineare di integrali della (4) è ancora un integrale della medesima equazione. Cioè, se $y_1(x), ..., y_p(x)$ sono integrali della predetta equazione (ove p è un intero fissato ad arbitrio), la funzione*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k y_k(x),$$

è ancora un integrale, comunque prendiamo i coefficienti $c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbb{R}$.

Sussiste la seguente definizione:

Definizione 3 *Comunque prendiamo n integrali $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n (4), dicesi* **wronskiano** *della predetta equazione, il seguente determinante funzionale di ordine n:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

Un'importante proprietà del wronskiano di n integrali presi ad arbitrio, è espressa dal seguente teorema:

Teorema 4 *(***Teorema di Liouville***)*
Comunque prendiamo n integrali $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ della (4) e un punto $x_0 \in X$, si ha:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \tag{6}$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra derivando primo e secondo membro della (5). A tale scopo, rammentiamo la regola di derivazione di un determinante funzionale. Per fissare le idee, consideriamo il caso più semplice:

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

Segue

$$D'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

La sua ovvia generalizzazione al nostro caso è

$$W'(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & ... & y_n''(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & ... & y_n''(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ ... + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Cioè

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & ... & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \tag{7}$$

Deve essere

$$y_1^{(n)}(x) + a_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + a_2(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + ... + a_{n-1}(x)\, y_1'(x) + a_n(x)\, y_1(x) = 0$$

All'ultima riga del determinante a secondo membro della (7) aggiungiamo la prima moltiplicata per $a_n(x)$, la seconda moltiplicata per $a_{n-1}(x)$, ..., la penultima moltiplicata per $a_2(x)$. Per una nota proprietà, il determinante non cambia:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) & -a_1(x)\, y_2^{(n-1)}(x) & \dots & -a_1(x)\, y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Cioè

$$W'(x) = a_1(x)\, W(x)$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine in $W(x)$. Scriviamo

$$W'(x) + a_1(x)\, W(x) = 0$$

Moltiplichiamo primo e secondo membro per il fattore integrante

$$I(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt},$$

ottenendo

$$\frac{d}{dx}\left[W(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}\right] = 0 \Longrightarrow W(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} = C$$

Il valore della costante si ottiene per $x = x_0$

$$W(x_0) = C,$$

da cui l'asserto. ■

Da questo teorema segue il corollario:

Corollario 5 *Il wronskiano di n integrali o è identicamente nullo in X o è ivi privi di zeri.*

Dimostrazione. Se $W(x)$ non è identicamente nullo, allora esiste almeno un punto $x_0 \in X$ tale che $W(x_0) \neq 0$. L'asserto segue dalla (6). ■

2 Sistema fondamentale di integrali

Riprendiamo l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{8}$$

Definizione 6 *L'insieme*

$$\Sigma_n = \{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\} \tag{9}$$

è un **sistema fondamentale** *di integrali della (8) se i suoi elementi sono integrali della predetta equazione, e se il loro wronskiano non si annulla mai.*

Questa definizione è ben posta, poiché una qualunque equazione differenziale lineare omogenea non ammette un solo sistema fondamentale, ma ne ammette infiniti. Infatti comunque prendiamo $x_0 \in X$, denotiamo con $y_1(x)$ l'unico integrale della (8) che verifica le condizioni iniziali:

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ y_1''(x_0) = 0, ..., y_1^{(n-2)}(x_0) = 0,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Indichiamo poi con $y_2(x)$ l'integrale della stessa equazione che verifica le condizioni iniziali:

$$y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ y_2''(x_0)=0,...,y_2^{(n-2)}(x_0)=0,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0$$

e così via:

$$y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ y_n''(x_0)=1,...,y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1$$

Il wronskiano di tali integrali calcolato nel punto x_0 è

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}=1\Longrightarrow W(x)\neq 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Ne consegue che i precedenti integrali compongono un sistema fondementale. È facile persuadersi che di sistemi siffatti ne possiamo costruire infiniti (all'occorrenza vengono modificate le condizioni iniziali).

Il teorema seguente di cui omettiamo la dimostrazione, ci dice che il problema fondementalel dell'integrazione di un'equazione differenziale lineare omogenea, consiste nel determinare un sistema fondementale di integrali.

Teorema 7 *Se $\Sigma_n=\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}$ è un qualunque sistema fondamentale di integrali della (8), l'integrale generale della medesima equazione si esprime come combinazione lineare degli elementi di Σ_n con coefficienti arbitrari:*

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(x),\quad \forall c_1,...,c_n\in\mathbb{R}$$

Rammentiamo che un sistema di funzioni $\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}$ si dice linearmente indipendente se

$$\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+...\lambda_n y_n(x)=0\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$$

Ciò premesso, sussiste il seguente fondamentale teorema di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 8 *$\Sigma_n=\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}$ è un sistema fondamentale se e solo se è linearmente indipendente.*

Ne consegue che integrare un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n equivale a diterminare n integrali linearmente indipendenti.

Esempio 9 *La seguente equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine*

$$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2}{x^2+1}y=0, \tag{10}$$

ammette i seguenti integrali:

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^2-1,$$

il cui wronskiano è facilmente calcolabile:

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2+1\neq 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Quindi $\Sigma_2=\{x,x^2-1\}$ è un sistema fondamentale. Ne concludiamo che l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x)=c_1x+c_2\left(x^2-1\right),\quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Le curve integrali compongono una famiglia di parabole in parte graficate in fig. 1

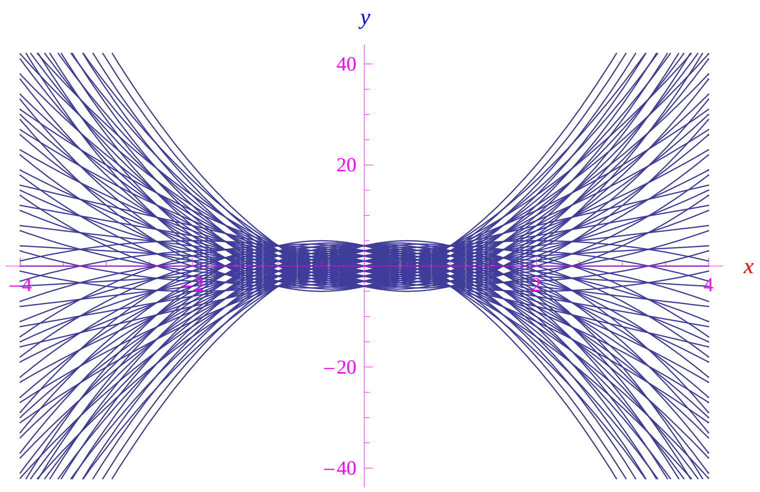

Figura 1: Alcune curve integrali della (10).