È possibile la trasmissione di informazione tramite l'Entanglement Quantistico?

Marcello Colozzo

1 Sistema a due particelle di spin $1/2$

Consideriamo un sistema composto da due particelle (denotate con 1 e 2) di spin $\frac{1}{2}$. Il momento angolare di spin totale è:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

In termini operatoriali:

$$\widehat{\vec{S}} = \widehat{\vec{S}}_1 + \widehat{\vec{S}}_2, \tag{1}$$

Se il sistema composito si trova nello stato di singoletto $s = 0$, $m_S = 0$, il vettore di stato di spin totale si scrive:

$$|s = 0, m_S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle - |-+\rangle \right), \tag{2}$$

dove:

$$\hat{S}_{1z} |+-\rangle = \frac{\hbar}{2} |+-\rangle$$
$$\hat{S}_{2z} |+-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |+-\rangle$$
$$\text{ecc.}$$

Dalla (2) si deduce che, eseguendo una misura della componente S_z dello spin di singola particella, abbiamo una probabilità pari a 1/2 di trovare $|+\rangle$ o $|-\rangle$. Tuttavia, se troviamo la particella 1 nello stato di spin "up $|+\rangle$, una successiva misura della omonima componente di spin della particella 2 darà necessariamente come risultato lo stato di spin "down $|-\rangle$. In altri termini, esiste una *correlazione* tra le componenti omonime di spin di singola particella, affinchè sia $s = 0$. Incidentalmente, tale correlazione si conserva anche quando le due particelle vengono separate da una distanza macroscopica. La separazione può avvenire attraverso una disintegrazione spontanea del sistema nei suoi componenti di spin 1/2. Un sistema del genere potrebbe essere, ad esempio, il risultato della diffusione protone-protone a basse energie. In forza del principio di esclusione di Pauli, i due protoni interagenti vengono a trovarsi nello stato di singoletto di spin, mentre il momento angolare orbitale è pari a 0. Per tale sistema varrà dunque un'equazione del tipo (2).Tenendo conto dei gradi di libertà orbitali, il ket di stato (nell'appropriato spazio di Hilbert) del sistema si scrive:

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |s, m_s\rangle \equiv |\phi\rangle\, |s, m_s\rangle \tag{3}$$

Nella rappresentazione delle coordinate la funzione d'onda è:

$$\Psi\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \vec{\sigma}\right) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \Psi \rangle = \phi\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) \psi\left(\vec{\sigma}\right), \tag{4}$$

dove abbiamo simbolicamente incorporato in $\vec{\sigma}$ le variabili di spin. Nella (4) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sono le coordinate spaziali di singola particella. Passando al sistema di coordinate del baricentro e della coordinata relativa $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, la (4) diventa:

$$\Psi\left(\mathbf{x}, \vec{\sigma}\right) = \phi\left(\mathbf{x}\right) \psi\left(\vec{\sigma}\right), \tag{5}$$

avendo ridifenito $\mathbf{x}_r$ in $\mathbf{x}$. Osserviamo poi che la funzione d'onda di spin $\psi\left(\vec{\sigma}\right)$ può essere scritta in termini di spin di singola particella, attraverso l'espansione del vettore (2). Indicando simbolicamente con $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ le variabili di spin di singola particella, abbiamo:

$$\Psi\left(\mathbf{x}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right) = \phi\left(\mathbf{x}\right) \psi\left(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right), \tag{6}$$

Supponiamo che in un istante iniziale t_0 il sistema composito che si trova nello stato di singoletto $|s = 0, m_S = 0\rangle$, si disintegri spontaneamente, per cui le particelle 1 e 2 si allontanano lungo due direzioni opposte. A un istante t le particelle saranno separate da una distanza macroscopica $\mathbf{x}'$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \text{ nell'istante } t_0 \\ &\mathbf{x} = \mathbf{x}' \neq \mathbf{0} \text{ nell'istante } t > t_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \Psi\left(0, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right) &= \phi\left(0\right) \psi\left(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right) \ \text{ all'istante } t_0 \\ \Psi\left(\mathbf{x}', \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right) &= \phi\left(\mathbf{x}'\right) \psi\left(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2\right) \ \text{ all'istante } t \end{aligned} \tag{8}$$

In questo esempio specifico, la particella 1 si allontana nel verso positivo di una direzione $\vec{r}$, mentre la particella 2 si sposta nel verso negativo, come illustrato in figura 1.In questa figura, inoltre, A e B denotano due osservatori con i loro rivelatori (simbolicamente rappresentati con due rettangolini). Supponiamo ora di orientare l'asse x nella direzione positiva dell'asse $\vec{r}$. In tale schema A misura S_{1z} (componente di spin della particella 1 nella direzione dell'asse z), mentre B misura S_{2z}, ovvero la componente di spin della particella 2 nella medesima direzione. Ad esempio, se A trova la particella 1 nello stato $|+\rangle$, necessariamente saprà con certezza che B troverà la particella 1 nello stato $|-\rangle$, *prima che B esegua la misura.* Se, invece, A non esegue alcuna misura, B avrà una probabilità pari a 1/2 di trovare lo spin della particella 2 nello stato up o down. Tali conclusioni valgono anche se invertiamo l'ordine con cui vengono eseguite le misure, cioè se è B ad eseguire una misura prima che venga eseguita da A. In altri termini, esiste una correlazione del 100% fra le misure eseguite da A e B. Si osservi che le particelle si trovano a una distanza macroscopica x' e che pertanto non possono scambiare informazione se non attraverso un campo non-locale (azione a distanza). Questi risultati

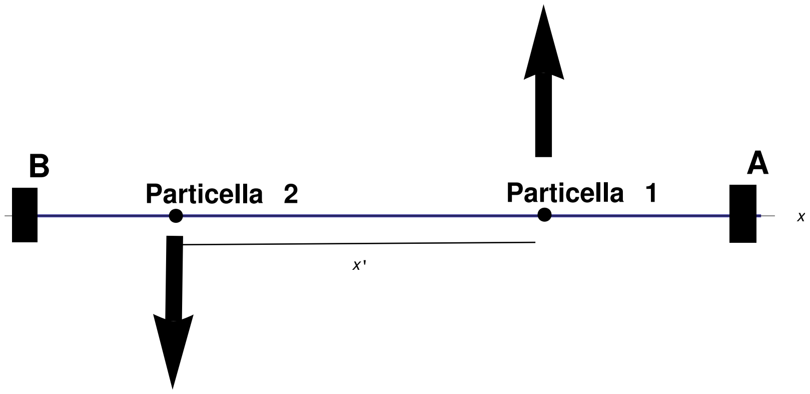

Figura 1: La particella 1 si allontana nel verso positivo dell'asse $\vec{r}$, mentre la particella 2 si muove nel verso opposto. Nella figura il sistema di riferimento è scelto in modo che l'asse x sia orientato nella direzione di $\vec{r}$.

non devono comunque sorprendere a causa dell'invarianza rotazionale dello stato di singoletto di spin. In altre parole, i risultati ottenuti da B saranno sempre e comunque opposti a quelli ottenuti da A.

Vediamo cosa succede quando vengono misurate componenti lungo assi differenti. A tale scopo, riscriviamo la (2) nel seguente modo:

$$|s=0, m_S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{z}+; \mathbf{z}-\rangle - |\mathbf{z}-; \mathbf{z}+\rangle\right) \tag{9}$$

in cui stiamo ricordando che abbiamo scelto la direzione dell'asse z come direzione di misura. Ovviamente siamo liberi di scegliere l'asse x o l'asse y. Ad esempio, se scegliamo l'asse x, dalla teoria della composizione del momento angolare, sappiamo che il singoletto di spin si esprime:

$$|s=0, m_S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\mathbf{x}-; \mathbf{x}+\rangle - |\mathbf{x}+; \mathbf{x}-\rangle\right) \tag{10}$$

Immaginiamo allora il seguente scenario:

A misura S_z o S_x della particella 1, oppure non esegue nessuna misura.

B misura S_x della particella 2.

Se A misura S_z e trova la particella 1 nello stato $|\mathbf{z}+\rangle$, l'osservatore B avrà una probabilità pari a 1/2 di trovare la particella 2 in uno dei due stati $|\mathbf{x}+\rangle$ o $|\mathbf{x}-\rangle$.

Se, invece, A misura S_x e trova la particella 1 nello stato $|\mathbf{x}+\rangle$, saprà con certezza che il risultato della misura eseguita da B sarà $|\mathbf{x}-\rangle$.

Ne consegue che se, per i singoli osservatori, gli assi di misura sono omonimi, vi sarà una correlazione al 100% fra le due misure. Viceversa, se gli assi sono diversi, la correlazione è casuale.

I risultati delle misure eseguite da B sembrano, in ogni caso, dipendere dalle misure eseguite da A. In altri termini, è come se esistesse una *pre-conoscenza* da parte della particella 2 circa le misure eseguite da A. Ricordiamo altresì, che le due particelle sono separate da una distanza macroscopica che può essere resa arbitrariamente grande.

Tuttavia, è facile persuadersi che non è possibile utilizzare la correlazione tra le misure per trasmettere informazione. Infatti, anche se A e B concordano di misurare la stessa componente dello spin, le misure eseguite da B non permettono di discriminare i due casi:

1. A non ha eseguito nessuna misura.

2. A ha eseguito una misura.

Per essere più specifici, supponiamo che B esegua una misura ottenendo spin down. Allora, può pensare: A ha eseguito una misura ottenendo spin up. Ma, potrebbe anche non aver eseguito misure, giacchè il risultato ottenuto da B è comunque casuale, trovandosi la particella in una sovrapposizione di stati equiprobabili.

1.0.1 Il paradosso del gatto di Schrödinger

In questa sezione presentiamo una variante del famoso *paradosso del gatto di Schrödinger*, mostrando come sia possibile trasmettere informazioni utilizzando l'Entanglement Quantistico.

> Sia G un gatto posto in una stanza chiusa. Nella stanza c'è un analizzatore di spin S_G che esegue misure su un sistema di spin 1/2 che si trova in uno stato di sovrapposizione espresso dalla (11). Il circuito dell'analizzatore è poi collegato ad un recipiente contenente del gas tossico. Un osservatore Ω misura - tramite S_G - lo spin del sistema quantistico nella direzione dell'asse z. Se il risultato della misura è $|\mathbf{z};-\rangle$ l'analizzatore chiude il circuito, che a sua volta apre il recipiente del gas. Se, invece, il risultato della misura è $|\mathbf{z};+\rangle$ il circuito non viene chiuso e il gas non fuoriesce dal contenitore.

Il ket di stato iniziale del sistema quantistico è:

$$|\alpha,t_0\rangle = c_1(t_0)\,|\mathbf{z};+\rangle + c_2(t_0)\,|\mathbf{z};-\rangle \tag{11}$$

La sovrapposizione lineare espressa dalla (11) si conserva nel tempo, in forza della linearità dell'operatore di evoluzione temporale $\mathcal{U}(t,t_0)$ (o, ciò che è lo stesso, della linearità dell'equazione di Schrödinger). Lo stato a tutti i tempi è

$$|\alpha,t\rangle = \mathcal{U}(t,t_0)\,|\alpha,t_0\rangle = c_1(t)\,|\mathbf{z};+\rangle + c_2(t)\,|\mathbf{z};-\rangle$$

Ricordiamo che $|c_{1,2}(t)|^2$ è la probabilità di trovare al tempo t il sistema nello stato $|\mathbf{z};\pm\rangle$. Per quanto detto:

$$\begin{aligned} |\alpha,t\rangle &\underset{mis\ S}{\longrightarrow} |\mathbf{z};+\rangle \longrightarrow \text{ gatto vivo} \\ |\alpha,t\rangle &\underset{mis\ S}{\longrightarrow} |\mathbf{z};-\rangle \longrightarrow \text{ gatto morto} \end{aligned} \tag{12}$$

Dalle (12) segue che la sovrapposizione lineare dei due stati di spin espressa dalla (11) implica una sovrapposizione lineare degli "stati di vita e di morte" del gatto. È l'atto di osservazione da parte di un osservatore cosciente Ω a far collassare il ket di stato in uno degli autostati del sistema di spin 1/2. Se Ω non esegue alcuna misura, il gatto si trova in una sovrapposizione di vita e morte. L'assurdità di tale implicazione risiede nel fatto che il gatto è un sistema macroscopico e come tale esiste in uno stato ben definito e non in una sovrapposizione quantistica. La funzione d'onda del sistema gatto + sistema quantistico è:

$$|\psi, t\rangle = c_1(t)\,|\mathbf{z};+\rangle\,|\text{gatto vivo}\rangle + c_1(t)\,|\mathbf{z};-\rangle\,|\text{gatto morto}\rangle \tag{13}$$

Qui il simbolo $|\mathbf{z};+\rangle\,|\text{gatto vivo}\rangle$ denota $|\mathbf{z};+\rangle \otimes |\text{gatto vivo}\rangle$.

$$|\psi, t\rangle \underset{\Omega \text{ misura } S}{\longrightarrow} |\mathbf{z};+\rangle\,|\text{gatto vivo}\rangle$$

Il processo di misura è illustrato in figura (2).

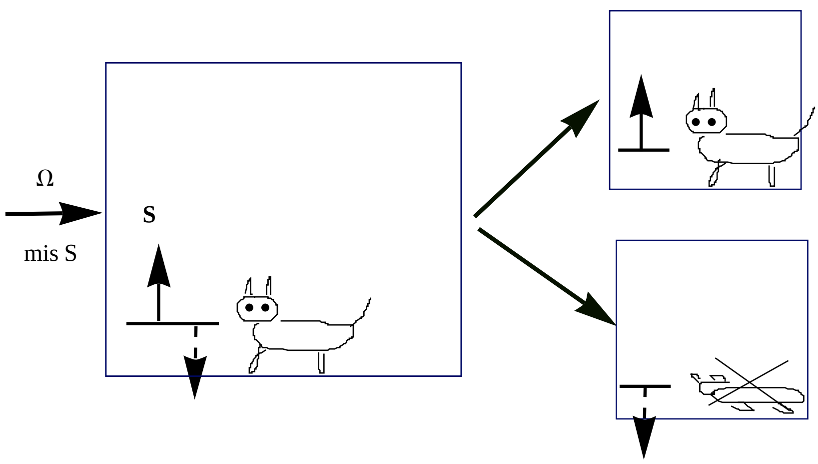

Figura 2: Fino a quando l'osservatore Ω non esegue alcuna misura dello spin S, il gatto si trova in una sovrapposizione lineare degli stati $|\text{gatto vivo}\rangle$, $|\text{gatto morto}\rangle$. L'operazione di misura determina la riduzione del vettore di stato, selezionando uno dei due stati suddetti.

Sembra che l'unico modo per risolvere il paradosso consista nell'invocare l'interpretazione di Everett [1]. In tale paradigma l'evoluzione temporale della funzione d'onda di sistema quantistico + gatto + osservatore si scrive:

$$|\psi, t\rangle = c_1(t)\, |\mathbf{z}; +\rangle\, |\text{gatto vivo}\rangle\, |\Omega_+\rangle + c_1(t)\, |\mathbf{z}; -\rangle\, |\text{gatto morto}\rangle\, |\Omega_-\rangle \tag{14}$$

dove $|\Omega\rangle$ è lo stato dell'osservatore prima che venga eseguita la misura. Tale stato è a sua volta una sovrapposizione lineare dei due stati $|\Omega_+\rangle$ e $|\Omega_-\rangle$. Nella *Many World Interpretation* non c'è riduzione del vettore di stato (14), per cui si realizzano entrambe le alternative $|\mathbf{z}; +\rangle\, |\text{gatto vivo}\rangle\, |\Omega_+\rangle$, $|\mathbf{z}; -\rangle\, |\text{gatto morto}\rangle\, |\Omega_-\rangle$. Come è noto, esse si realizzano in universi differenti convoluti in uno spazio-tempo denominato *Multiverso*.

1.0.2 Bob, Alien e il gatto di Schrödinger

Una suggestiva variante del paradosso del gatto è quella che considera non un sistema di spin 1/2, bensì un sistema entangled di due particelle di spin 1/2 in uno stato di singoletto di spin (sezione 1). Nello schema illustrato in **figura 3,** Bob è un fisico il cui compito consiste nel misurare la componente di spin di una particella (particella 2 in figura) appartenente al sistema suddetto. La particella 1 si trova, invece, su un pianeta X distante milioni di anni-luce dalla Terra, e il suo spin viene misurato da Alien, un fisico alieno.

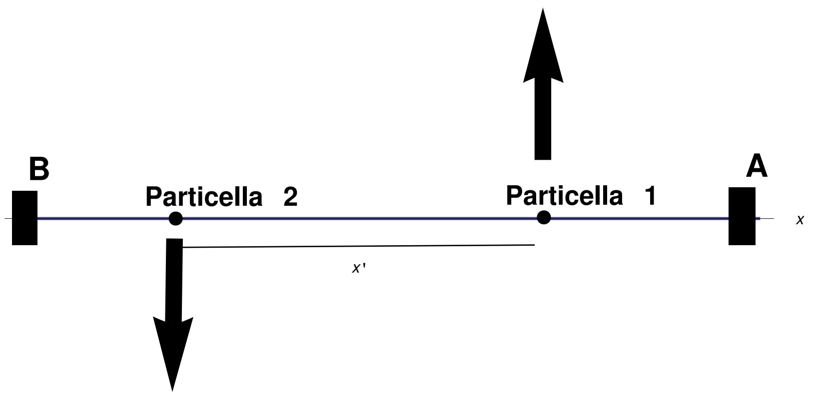

Figura 3: La particella 1 si trova su un pianeta X distante milioni di anni luce del nostro. Su tale pianeta un fisico alieno (A) misura lo spin della particella 1. La particella 2 si trova sulla Terra, e il suo spin è misurato da Bob (B).

In forza del paradosso EPR, le misure di Bob dipendono dalle misure eseguite da Alien. Consideriamo il caso più banale (derivante dall'invarianza per rotazioni dello stato di singoletto), corrispondente alla situazione in cui Alien e Bob misurano lo spin delle rispettive particelle lungo lo stesso asse (ad esempio z). Se Alien trova la particella 1 nello stato di spin up, necessariamente Bob trova la particella 2 nello stato di spin down. Quindi, l'analizzatore di spin di Bob chiude il circuito collegato al contenitore del gas tossico, determinando la morte del gatto. Quindi, tramite un'azione a distanza, Alien determina la morte del gatto. Tuttavia, anche in questo caso non c'è trasmissione di informazione, per la semplice ragione che Bob dovrà comunque aprire la scatola dove c'è il gatto per conoscerne l'esito, da cui non potrà evincere il tipo di misura eseguito da Alien. Però, Bob potrebbe aggiungere una spia luminosa comandata da un rivelatore di cianuro. Gli stati logici (acceso/spento) della spia luminosa saranno quindi entangled con gli stati di vita e morte del gatto, onde con gli stati di spin del sistema sottoposto alle misure di Alien. Con tale accorgimento, Bob riuscirà a conoscere il risultato della misura eseguita Alien che dista da Bob milioni di anni luce. E ciò compone manifestamente una trasmissione di informazione utilizzando il campo non-locale realizzato dal sistema di due particelle di spin 1/2.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Everett, *Rev. Mod. Phys,* **29**, 454 (1957). Available at http://tinyurl.com/everettw