Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

0.1 Energia dell'oscillatore armonico

Ci proponiamo di determinare l'energia meccanica di un punto materiale mobile su un piano orizzontale liscio vincolato a una molla ideale di costante elastica k (oscillatore armonico unidimensionale), come illustrato in fig. 1.

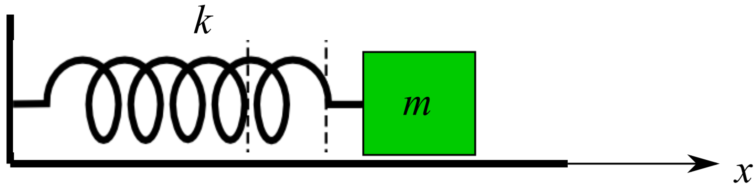

Figura 1: Oscillatore armonico unidimensionale.

Applicando il secondo principio della dinamica si perviene all'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

essendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la frequenza angolare (o pulsazione). Integrando la (1) con le condizioni iniziali

$$x(0) = A > 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

otteniamo l'equazione oraria dell'oscillatore

$$x(t) = A \cos \omega t \tag{2}$$

che è un'oscillazione cosinusoidale di ampiezza A e periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, graficata in fig. 2.

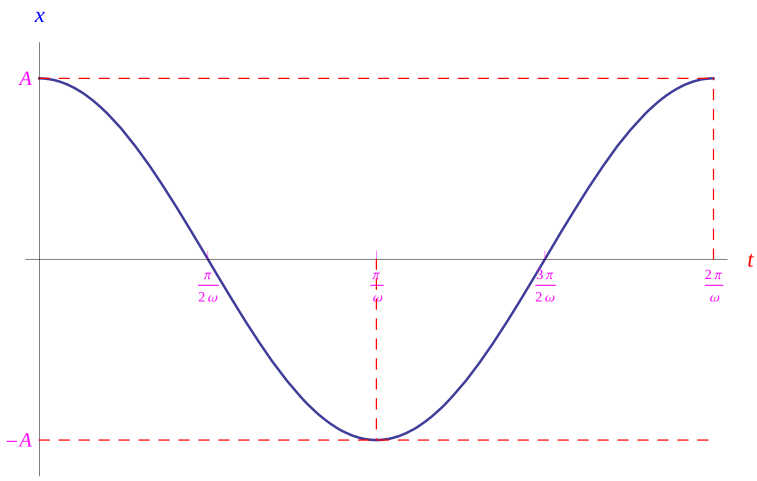

Figura 2: Diagramma orario di un oscillatore armonico unidimensionale.

La velocità scalare è

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin \omega t$$

graficata in fig. 3.

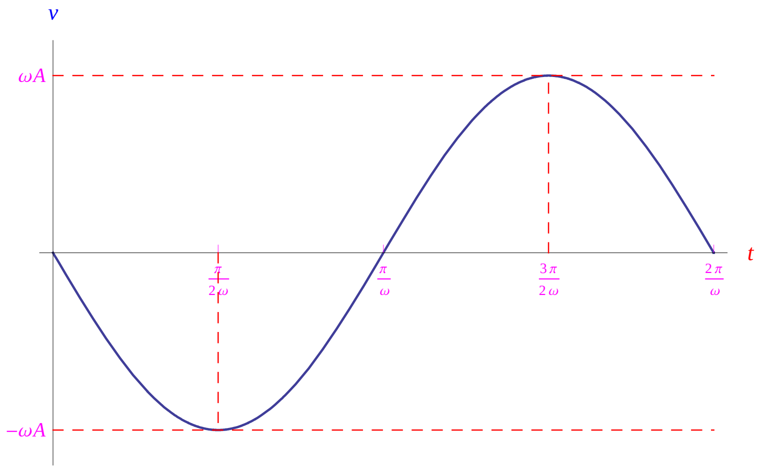

Figura 3: Velocità scalare di un oscillatore armonico unidimensionale.

All'istante $t = 0$ l'oscillatore ha la massima elongazione $(+A)$ e velocità nulla. Progressivamente acquisisce una velocità negativa (aumenta in valore assouto) poiché il moto è retrogrado. Il predetto valore assoluto è massimo nell'istante $t = \frac{\pi}{2\omega}$ i.e. quando il punto materiale transita per l'origine $(x = 0)$. Da tale istante la velocità (negativa) diminuisce in valore assoluto pere annullarsi a $t = \pi/\omega$, che è un istante di arresto con inversione del moto $(x = -A)$. Da tale posizione la velocità diviene positiva in quanto il moto è progressivo, ed è massima a $t = \frac{3\pi}{2\omega}$, cioè quando passa per l'origine, dopodiché diminuisce per annullari a $t = \frac{2\pi}{\omega}$, mentre l'ascissa è $x = +A$. Anche questo è un istante di arresto con inversione del moto. Quest'ultimo riprende con le modalità precedenti grazie alla sua periodicità.

Per quanto visto in questa lezione, l'energia potenziale è

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Sostituendo l'espressione dell'equazione oraria, otteniamo l'energia potenziale in funzione del tempo

$$V(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \tag{3}$$

Alla stessa maniera:

$$T(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \tag{4}$$

cosicché l'energia meccanica

$$E = T(t) + V(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{5}$$

cioè è una costante come richiesto dal teorema di conservazione dell'energia meccanica. L'aspetto interessante è la periodicità delle funzioni $V(t)$ e $T(t)$. Precisamente, sono entrambe periodiche con periodo

$$\tau' = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

ossia la metà del periodo delle funzioni che esprimono rispettivamente l'equazione oraria e la velocità. In fig. 4 sono graficate le predette funzioni.

L'interpretazione fisica è la seguente: nell'istante inziale $t = 0$ l'energia meccanica è puramente potenziale (oscillatore fermo, massimo allungamento della molla). Progressivamente l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica; quest'ultima è massima quando l'oscillatore transita per

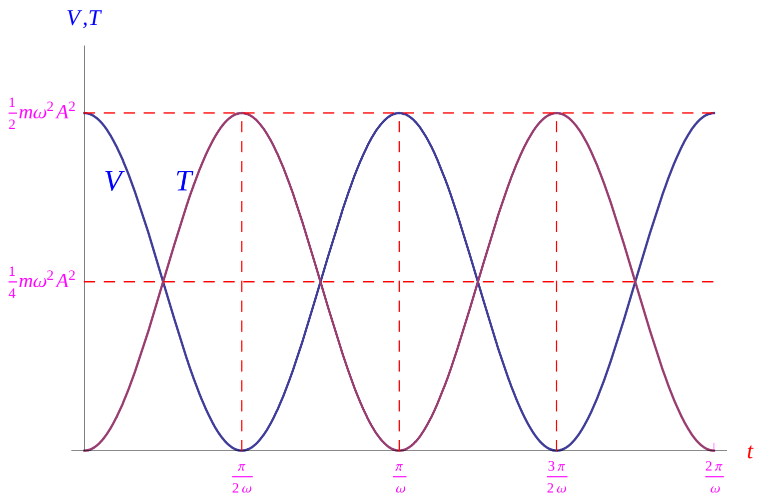

Figura 4: Energia potenziale ed energia cinetica di un oscillatore armonico in funzione del tempo.

l'origine, giacché qui è massima la velocità, dopodiché l'energia cinetica diminuisce convertendosi in energia potenziale, che assumerà nuovamente un massimo in $x = -A$. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, si assiste a un continuo scambio di energia da potenziale a cinetica, e viceversa. Il periodo di tale scambio è la metà del periodo di oscillazione.

Concludiamo questo numero ricavando l'equazione oraria da considerazioni energetiche, anziché applicando il secondo principio della dinamica. Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E = \text{costante}$$

In particolare

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2,$$

da cui

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Ma

$$v = \frac{dx}{dt},$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \int dt$$

Cioè

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

essendo φ una costante di integrazione. La condizione è iniziale è $x(0) = A$, cosicché $x(t) = A\cos\omega t$. Il vantaggio di tale procedimento è evidente, poichè abbiamo dovuto integrare un'equazione del primo ordine e non del secondo ordine (proveniente dal secondo principio della dinamica).

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I.* Veschi