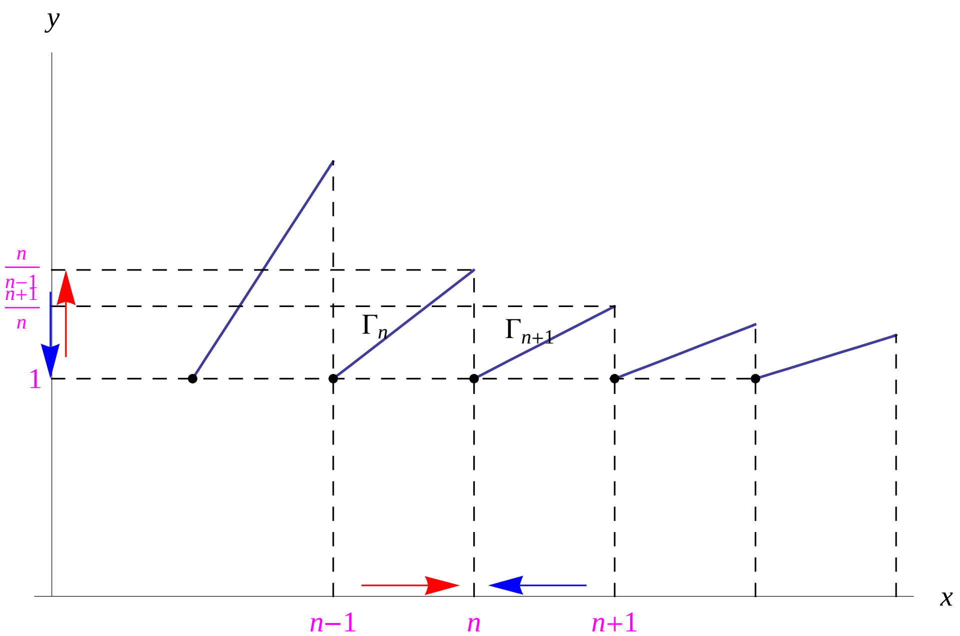
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Punti di discontinuità della funzione $f(x) = \frac{x}{[x]}$

Marcello Colozzo



È la reciproca della funzione studiata nell'handbook precedente. Osserviamo che $x \in (0,1) \Longrightarrow [x] = 0$, per cui la funzione non è definita in $(0,1)$. Dobbiamo allora studiare il comportamento della funzione in $[1,+\infty)$.

Per $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:

$$x \in [n-1,n) \Longrightarrow [x] = n-1 \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{n-1}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n:

$$\begin{aligned}
&n = 2 \Longrightarrow x \in [1,2) \Longrightarrow f(x) = x \\
&n = 3 \Longrightarrow x \in [2,3) \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{2} \\
&n = 4 \Longrightarrow x \in [3,4) \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{3} \\
&n = 5 \Longrightarrow x \in [4,5) \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{4} \\
&\ldots,
\end{aligned}$$

Ne consegue che il grafico $\Gamma : y = f(x)$ è l'unione di infiniti segmenti semiaperti a destra. Infatti, posto:

$$\Gamma_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid n-1 \leq x < n, \ \ y = \frac{x}{n-1} \right\} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0,1\},$$

cioè

$$\Gamma_n : y = \frac{x}{n-1}, \ \ x \in [n-1,n) \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

Riesce:

$$\Gamma = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \Gamma_n$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.

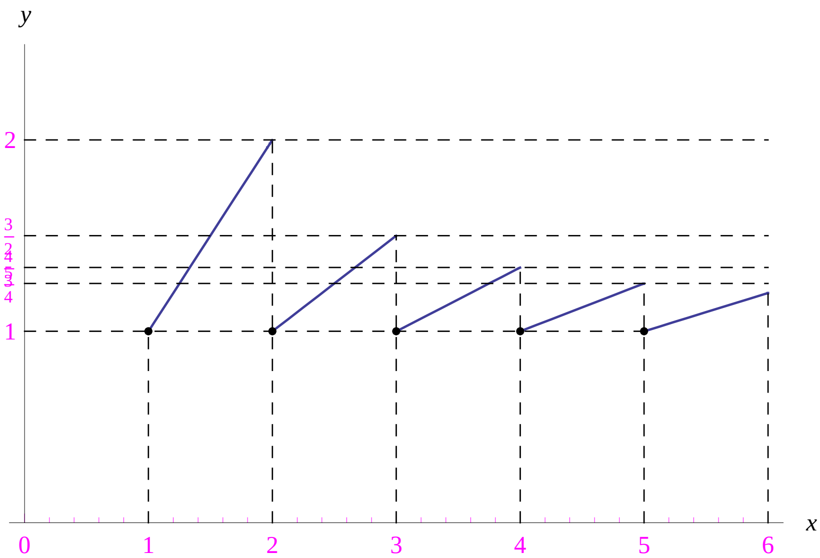


Figura 1: Grafico della funzione $\frac{x}{[x]}$ per $x > 0$.

Determiniamo ora il comportamento di $\frac{x}{[x]}$ in un intorno di $x = n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Dalla fig. 2 deduciamo che:

$$\lim_{x \to n^-} \frac{x}{[x]} = \frac{n}{n-1}, \quad \lim_{x \to n^+} \frac{x}{[x]} = 1,$$

per cui $x = n$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(n) = -\frac{1}{n-1} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Al crescere indefinito di n:

$$\lim_{n \to +\infty} s(n) = 0$$

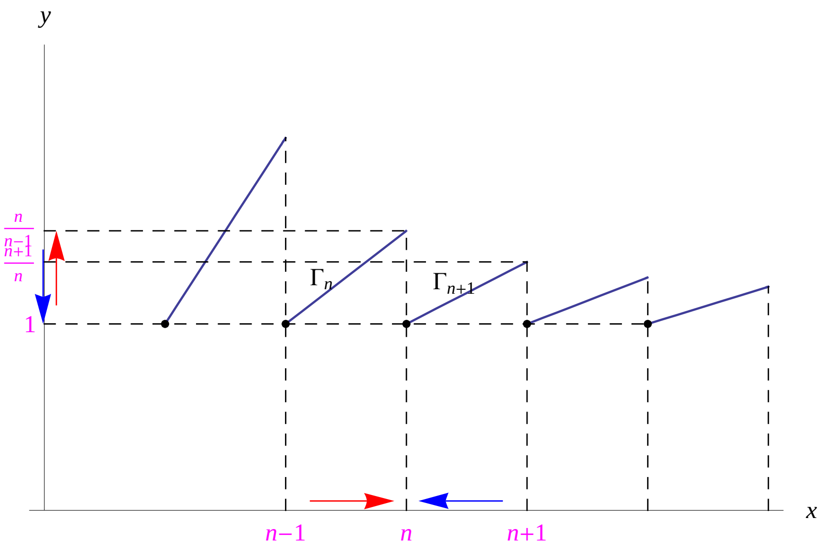


Figura 2: Grafico della funzione $\frac{x}{[x]}$ per $x > 0$.