Differenziabilità di una funzione vettoriale di variabile vettoriale

Marcello Colozzo

Esempio 1 *Consideriamo la funzione vettoriale da* $\mathbb{R}^2$ *a* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)),$$

con

$$f_1(x_1, x_2) = \sin(2x_1) e^{-x_2}, \; f_2(x_1, x_2) = x_1 - \cos x_2, \; f_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Proviamo a calcolare l'incremento

$$\mathbf{f}(h\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{0})$$

nella direzione $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$*. Abbiamo*

$$\mathbf{f}(h\mathbf{u}) = \left(\sin(2h) e^{-h}, h - \cosh, 2h^2\right), \; \mathbf{f}(\mathbf{0}) = (0, 0, 0)$$

Quindi

$$\Delta\mathbf{f} = \left(\sin(2h) e^{-h}, h - \cosh, 2h^2\right)$$

Il differenziale è

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= (df_1, df_2, df_3) \\ &= \left(2\cos(2x_1) e^{-x_2} dx_1 - \sin(2x_1) e^{-x_2} dx_2, dx_1 + \sin x_2 dx_2, 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2\right) \end{aligned}$$

In $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$d\mathbf{f}|_{\mathbf{0}} = (2dx_1, dx_1, 0) = (2\Delta x_1, \Delta x_2, 0) = h\mathbf{u} = (2h, h, 0)$$

cosicché

$$\left(\sin(2h) e^{-h}, h - \cosh, 2h^2\right) \underset{|h| \ll 1}{=} (2h, h, 0) + ...$$

In fig.1 riportiamo l'immagine della funzione vettoriale assegnata.

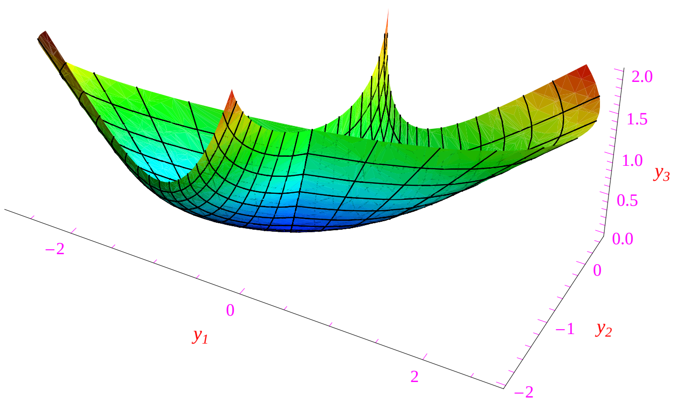

Figura 1: Esempio (1).