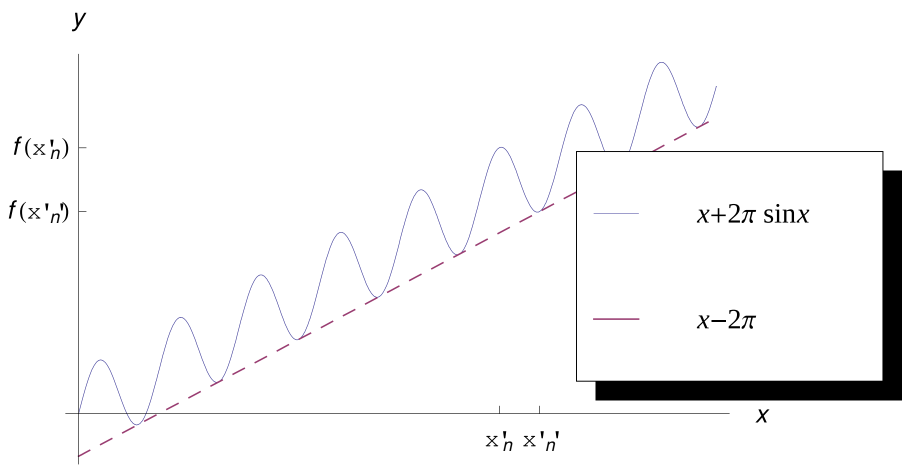
– http://www.extrabyte.info --

Appunti dalle lezioni di Analisi Matematica 1

La definizione di limite di una funzione reale di una variabile reale

Marcello Colozzo



1 Limite di una funzione reale di variabile reale

1.1 Definizione di limite

Consideriamo la funzione reale di una variabile reale:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \tag{1}$$

il cui insieme di definizione è $X = \mathbb{R} \diagdown \{1\}$. La funzione (1) è dunque definita su tutto l'asse reale, escluso il punto $x_0 = 1$. Incidentalmente, se proviamo a calcolare il valore assunto da f in x_0, la sua espressione analitica restituisce la **forma indeterminata** $\frac{0}{0}$. Procuriamoci allora una calcolatrice e andiamo a calcolare i valori assunti dalla funzione in punti *prossimi* a x_0. Ad esempio, per $x = 1.1$, otteniamo:

$$f(1.1) \simeq 2.100$$

Avviciniamoci ulteriormente al punto x_0:

$$\begin{aligned} f(1.01) &\simeq 2.010 \\ f(1.001) &\simeq 2.001 \end{aligned}$$

e così via. Ripetiamo ora lo stesso procedimento per $x < 1$:

$$\begin{aligned} f(0.9) &\simeq 1.900 \\ f(0.99) &\simeq 1.990 \\ f(0.999) &\simeq 1.999 \\ f(0.9999) &\simeq 1.9999 \end{aligned}$$

e così via.

Da tali risultati si deduce che possiamo rendere arbitrariamente piccola la differenza $|f(x) - 2|$ a patto di *avvicinarci sufficientemente* a $x_0 = 1$. Cerchiamo allora di determinare l'insieme dei valori di x per i quali si ha $|f(x) - 2| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - 1| < \varepsilon \\ \Longleftrightarrow 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

cosicchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \ |f(x) - 2| < \varepsilon \Longleftrightarrow x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \diagdown \{1\} \tag{2}$$

In altri termini, la differenza $|f(x) - 2|$ è minore di un *qualunque* $\varepsilon > 0$, se e solo se $x \in I_\varepsilon(1) \diagdown \{1\}$, dove $I_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ è un intorno di $x_0 = 1$ di raggio ε. La proprietà (2) è incorporata nell'espressione simbolica:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \tag{3}$$

dove il simbolo lim denota l'**operatore limite**.

Definizione 1 *La notazione simbolica*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

si legge: limite di $f(x)$ per x che tende a x_0.

Diremo dunque che nel punto $x_0 = 1$ la funzione **tende** o **converge** a 2. Per inciso, notiamo che la disuguaglianza $|f(x) - 2| < \varepsilon$ implica l'appartenenza di $f(x)$ ad un intorno del punto $l = 2$ di raggio ε. Pertanto, la (2) può essere riscritta in termini di intorni:

$$\forall J_\varepsilon(l), \ f(x) \in J_\varepsilon(l) \Longleftrightarrow x \in I_\varepsilon(x_0) \diagdown \{x_0\},$$

dove $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Osservazione 2 *L'ampiezza dell'intorno di x_0 è - in generale - diversa da ε, ma dipende comunque da tale numero reale.*

Sussiste, dunque, la seguente definizione:

Definizione 3 *Sia f una funzione reale di una variabile reale definita nel sottoinsieme $X \neq \emptyset$ di $\mathbb{R}$. Quindi:*

$$f : X \to \mathbb{R} \tag{4}$$

*Se x_0 è un punto di accumulazione al finito, diremo che la funzione f è **convergente** in x_0, se $\exists l \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall J_\varepsilon(l), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \diagdown \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l), \tag{5}$$

dove: $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$. La (5) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Simbolicamente, la proprietà (5) è espressa da:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

La definizione di convergenza ha un'immediata interpretazione geometrica come illustrato nelle figg. 1-2-3.

Esercizio 4 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{x + 2}{x},$$

provare che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \tag{6}$$

Soluzione. La funzione è definita in $X = \mathbb{R} \diagdown \{0\}$. Applichiamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ 0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{x + 2}{x} - 3 \right| < \varepsilon$$

Deve essere:

$$\left| \frac{x + 2}{x} - 3 \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \frac{2(1 - x)}{x} \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \frac{2(1 - x)}{x} < \varepsilon$$

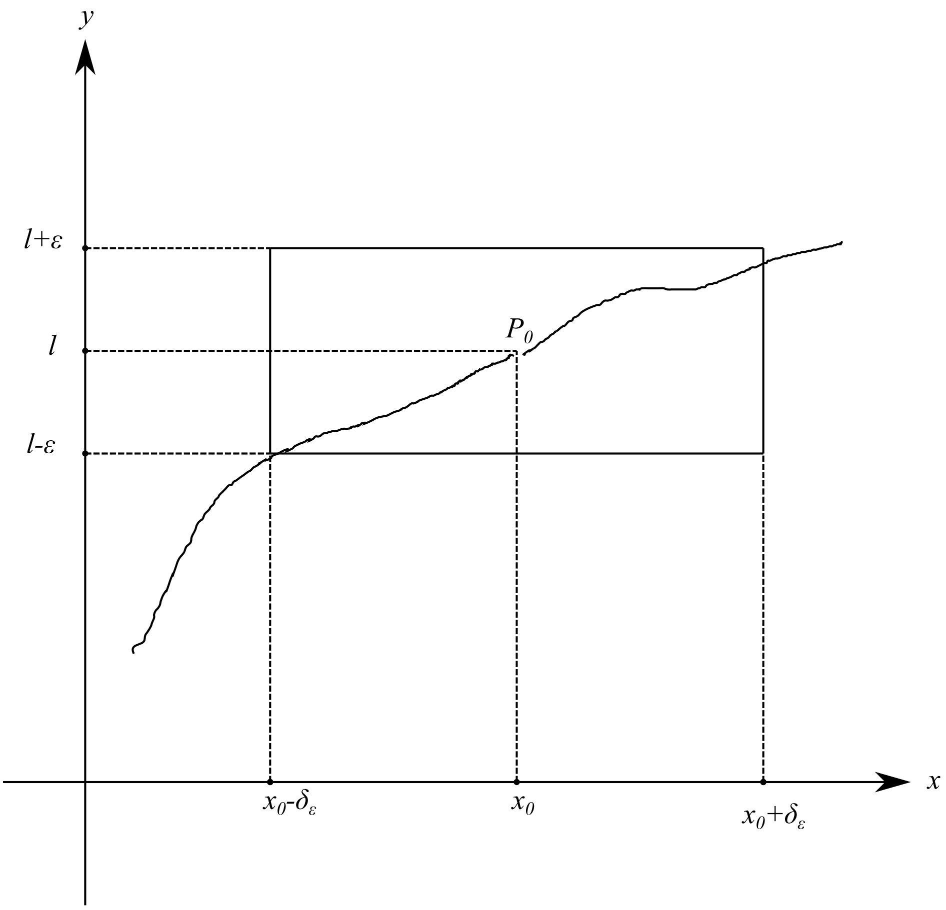


Figura 1: In questo caso è $x_0 \notin X$. Risulta: $\forall J_\varepsilon(l) = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow (x, f(x)) \in \mathcal{R} = I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \times J_\varepsilon(l)$. In realtà, il bordo andrebbe tratteggiato in quanto $\mathcal{R}$ è un insieme aperto. Abbiamo utilizzato la linea non tratteggiata per ragioni didattiche.

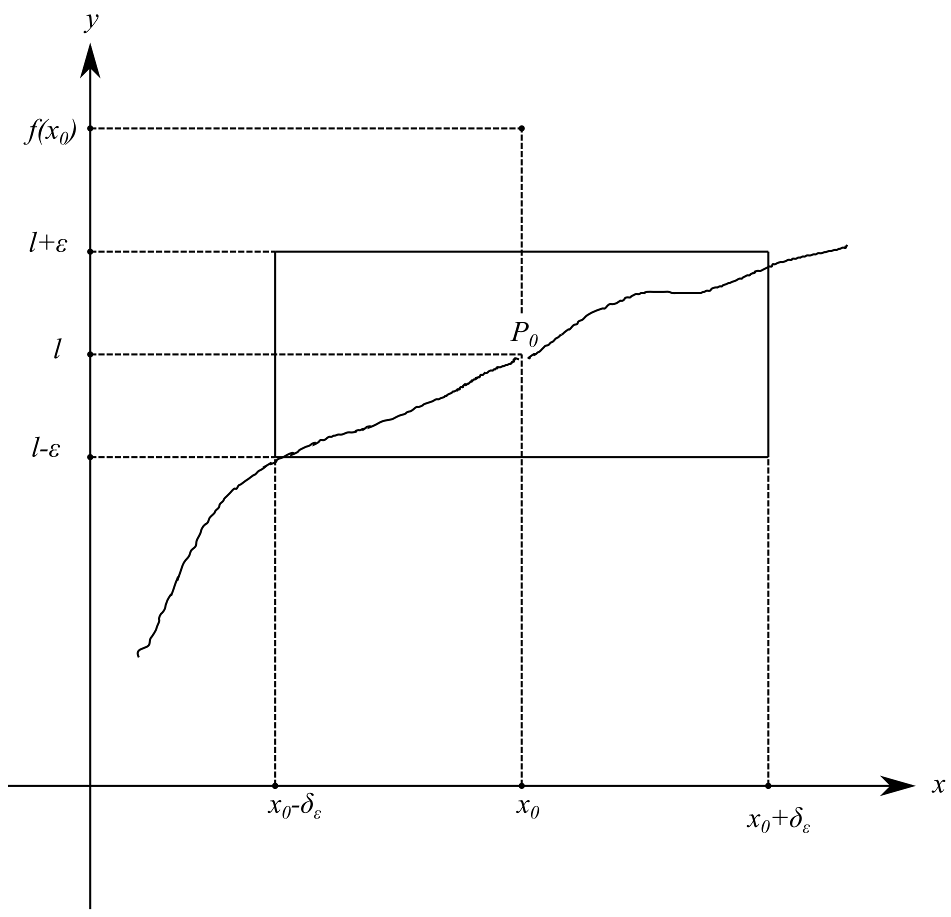


Figura 2: Qui è $x_0 \in X,\ f(x_0) \neq l$.

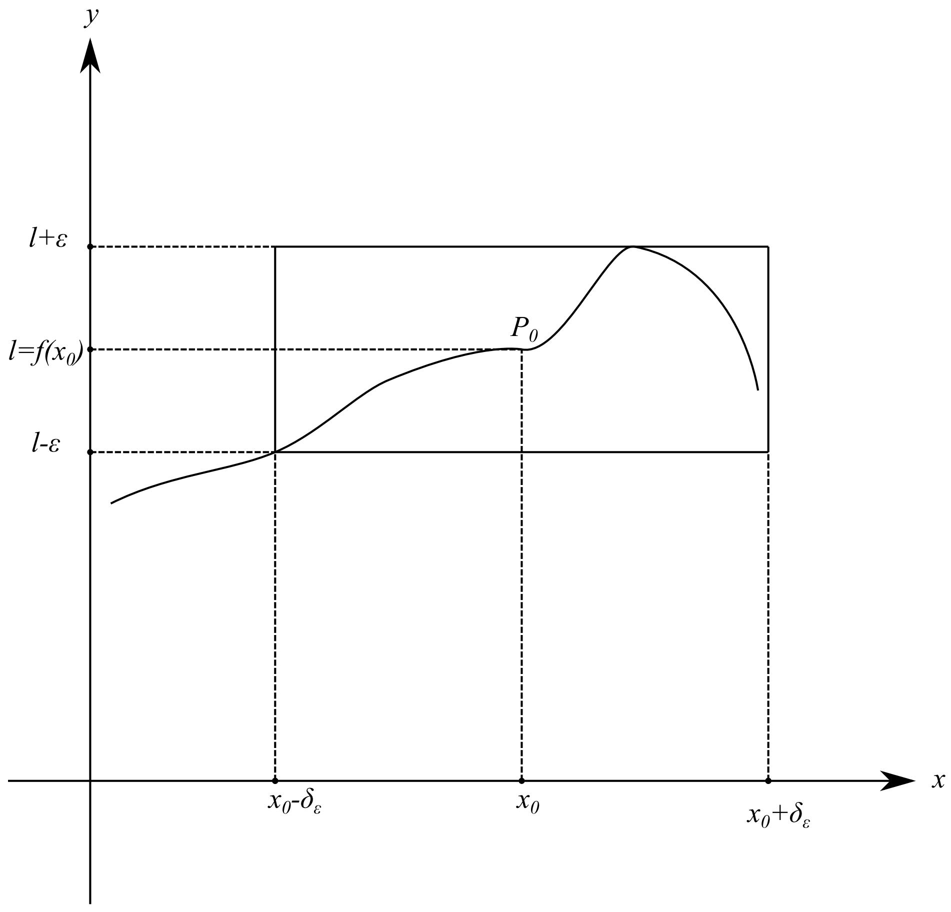


Figura 3: Qui è $x_0 \in X,\ f(x_0) = l$.

Abbiamo dunque il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{2(1-x)}{x} < \varepsilon \\ \frac{2(1-x)}{x} > -\varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

Se S è l'insieme delle soluzioni di $\left|\frac{2(1-x)}{x}\right| < \varepsilon$, si ha:

$$S = S_1 \cap S_2,$$

dove S_k è l'insieme delle soluzioni della *k-esima* disequazione ($k = 1, 2$) del sistema (7). Risolviamo la prima:

$$\frac{2(1-x)}{x} < \varepsilon \Longleftrightarrow x \in S_1 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{2+\varepsilon}, +\infty\right)$$

La seconda:

$$\frac{2(1-x)}{x} > -\varepsilon \Longleftrightarrow x \in S_2 = \left(0, \frac{2}{2-\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon \in (0, 2)$$

Quindi

$$S = \left(\frac{2}{2+\varepsilon}, \frac{2}{2-\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon \in (0, 2)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2+\varepsilon} < x < \frac{2}{2-\varepsilon} &\Longleftrightarrow \frac{2}{2+\varepsilon} - 1 < x - 1 < \frac{2}{2-\varepsilon} - 1 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \in (0, 2) \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon \in (0, 2)$:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x-1| < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ |x-1| < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{cases} \end{aligned}$$

Assumiamo

$$\delta_\varepsilon = \min_{\varepsilon \in (0,2)} \left\{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right\} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon},$$

cosicchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \mid x \in X, \, 0 < |x-1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x+2}{x} - 3\right| < \varepsilon \,, \tag{8}$$

onde la (6). La (8) è rappresentata graficamente nel diagramma di fig. 4.

Esercizio 5 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = x^2,$$

provare che

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \tag{9}$$

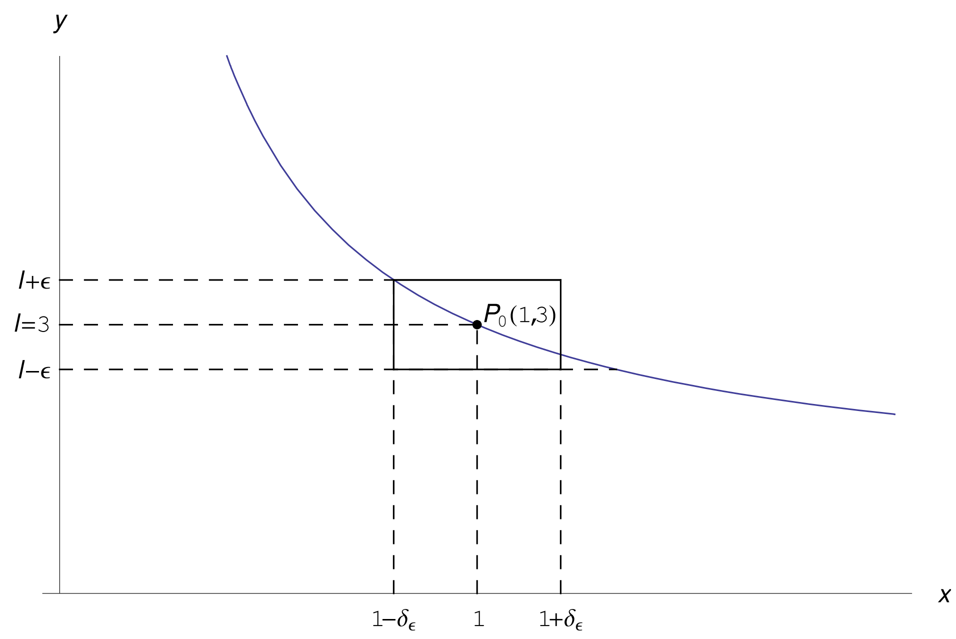


Figura 4: Risulta: $\forall J_\varepsilon(3) = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, $\exists I_{\delta_\varepsilon}(1) = (1-\delta_\varepsilon, 1+\delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(1) \setminus \{1\} \Longrightarrow (x, f(x)) \in \mathcal{R} = I_{\delta_\varepsilon}(1) \times J_\varepsilon(3)$. La regione $\mathcal{R}$ è il rettangolo centrato in $P_0(1,3)$. In realtà, il bordo andrebbe tratteggiato in quanto $\mathcal{R}$ è un insieme aperto. Abbiamo utilizzato la linea non tratteggiata per ragioni didattiche.

Soluzione. Applichiamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in \mathbb{R}, \ 0 < |x-2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$$

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

$$\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon, \tag{10}$$

o ciò che è lo stesso, il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 4 < \varepsilon \\ x^2 - 4 > -\varepsilon \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della prima è $S_1 = \left(-\sqrt{4+\varepsilon}, -\sqrt{4+\varepsilon}\right)$, mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S_2 = \left(-\infty, -\sqrt{4-\varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{4-\varepsilon}, +\infty\right)$ a patto che sia $\varepsilon \in (0,4)$. Quindi le soluzioni della (10) sono

$$x \in S = S_1 \cap S_2 = \left(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}\right), \ \forall \varepsilon \in (0,4)$$

Quindi:

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon,$$

come mostrato in fig. 5. Dobbiamo, dunque, assegnare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\begin{cases} 2 + \delta_\varepsilon < \sqrt{4+\varepsilon} \\ 2 - \delta_\varepsilon > \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_\varepsilon < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 \\ \delta_\varepsilon < 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases}$$

Cioè:

$$0 < \delta_\varepsilon = \min\left\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\right\} = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$$

Concludiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon = \sqrt{4+\varepsilon} - 2 \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| x^2 - 4 \right| < \varepsilon,$$

cioè la (9).

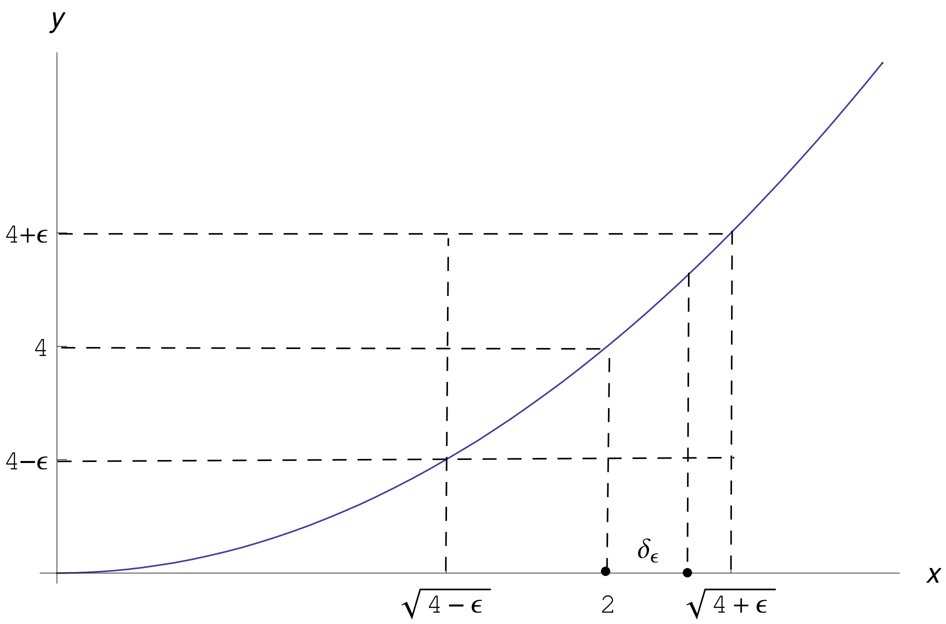


Figura 5: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = x^2$.

Esempio 6 *Consideriamo la funzione "signum" $f(x) = sgnx$, così definita:*

$$sgnx = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Tale funzione non converge ad alcun limite per $x \to 0$, come illustrato in fig.6, da cui segue che:

$$\forall J_{\varepsilon \in (0,1)},\ \exists I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) \setminus \{0\} \Longrightarrow f(x) \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}$$

Più precisamente:

$$x \in (-\delta_\varepsilon, 0) \Longrightarrow f(x) = -1 \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}$$
$$x \in (0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) = +1 \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}$$

Definizione 7 *La funzione (4) è **divergente positivamente** in x_0 se:*

$$\forall J_\varepsilon(+\infty),\ \ \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(+\infty), \tag{12}$$

dove: $J_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$ con $\varepsilon > 0$. La (12) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

Simbolicamente, la proprietà (5) è espressa da:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

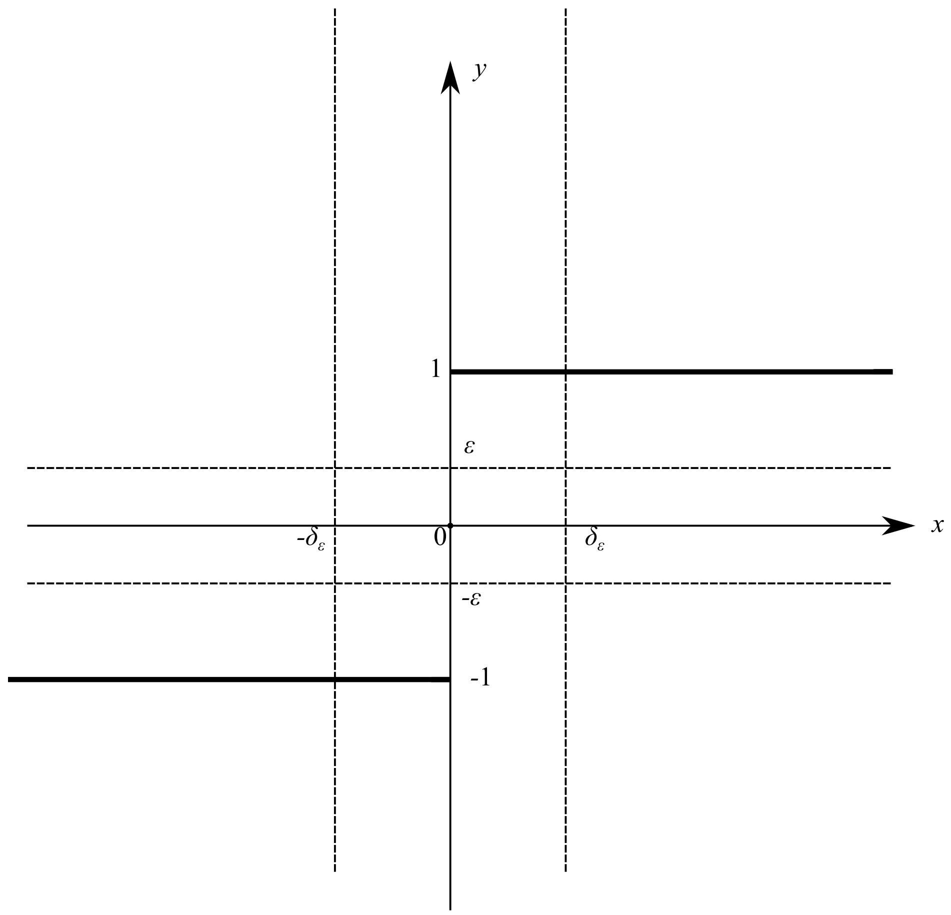


Figura 6: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = sgnx$. Comunque prendiamo un intorno $J_{\varepsilon\in(0,1)}$ di $f(0) = 0$, è possibile associare ad esso intorni $I_{\delta_\varepsilon}(0)$ tali che $x \in x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) \diagdown \{0\} \Longrightarrow f(x) \notin J_{\varepsilon\in(0,1)}$.

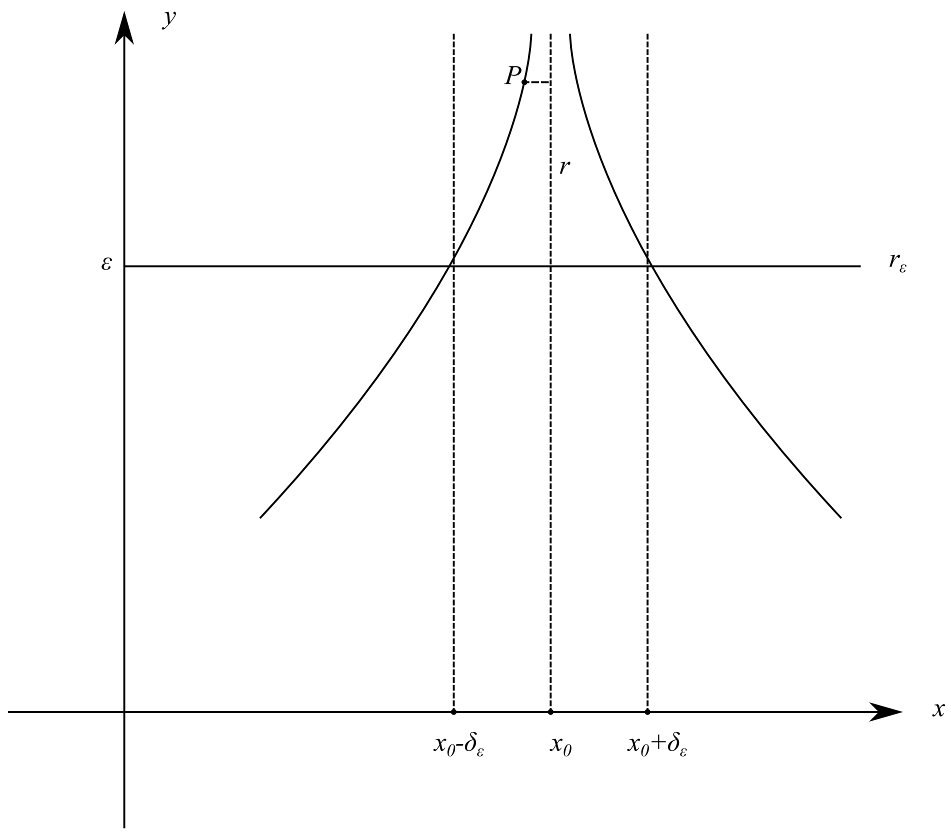


Figura 7: In questo caso è $x_0 \notin X$. Risulta: $\forall r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, $\exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow (x, f(x)) \in \Gamma$ giace al di sopra della retta r_ε, dove Γ è il grafico della funzione f. Se $P(x, y) \in \Gamma$ e $d = dist(P, r) = |x - x_0|$ dove $r : x = x_0$, risulta $x \to x_0 \Longrightarrow d \to 0 \Longrightarrow y \to +\infty$. Ciò si esprime dicendo che la retta r è un **asintoto verticale** per il diagramma cartesiano della funzione.

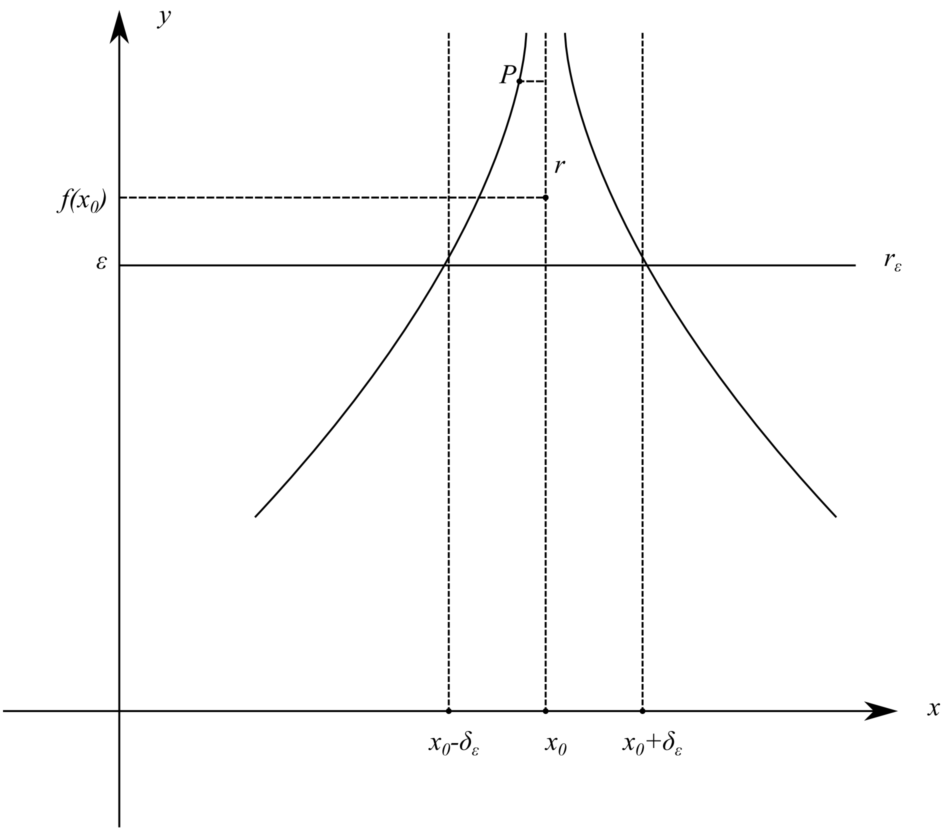


Figura 8: Qui è $x_0 \in X$, per cui risulta $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

La definizione 7 ha un'immediata interpretazione geometrica come illustrato nelle figure 7-8.

Definizione 8 *La funzione (4) è **divergente negativamente** in x_0 se:*

$$\forall J_\varepsilon(-\infty), \ \ \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \diagdown \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(-\infty), \tag{13}$$

dove: $J_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$ con $\varepsilon < 0$. La (12) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

La definizione 8 ha un'immediata interpretazione geometrica come illustrato in fig. 9.

Consideriamo ora il caso in cui x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Abbiamo la seguente definizione:

Definizione 9 *La funzione f è **convergente** per $x \to +\infty$, se $\exists l \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall J_\varepsilon(l), \ \ \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l), \tag{14}$$

dove: $I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) = (\delta_\varepsilon, +\infty)$ con $\delta_\varepsilon > 0$. La (14) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Simbolicamente, la proprietà (14) è espressa da:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

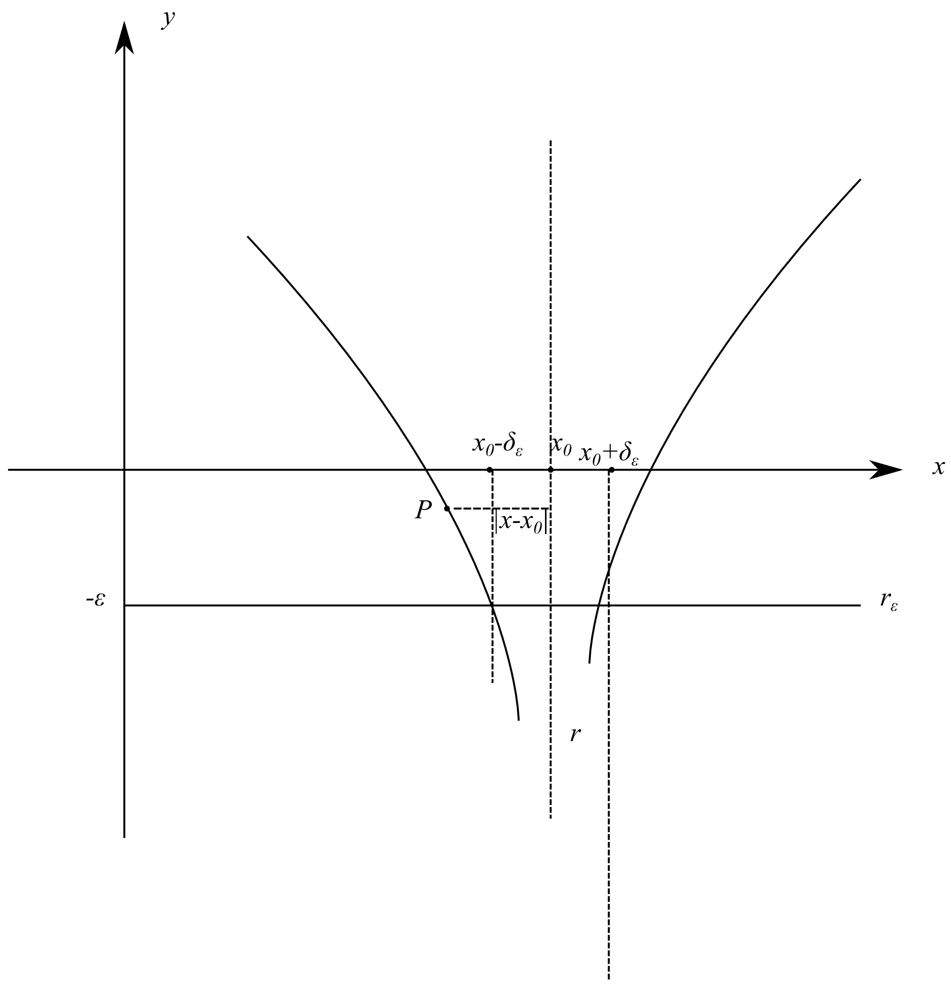


Figura 9: Risulta: $\forall r_\varepsilon : y = -\varepsilon < 0$, $\exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \diagdown \{x_0\} \Longrightarrow (x, f(x)) \in \Gamma$ giace al di sotto della retta r_ε, dove Γ è il grafico della funzione f. Se $P(x, y) \in \Gamma$ e $d = dist(P, r) = |x - x_0|$ dove $r : x = x_0$, risulta $x \to x_0 \Longrightarrow d \to 0 \Longrightarrow y \to -\infty$. Ciò si esprime dicendo che la retta r è un **asintoto verticale** per il diagramma cartesiano della funzione.

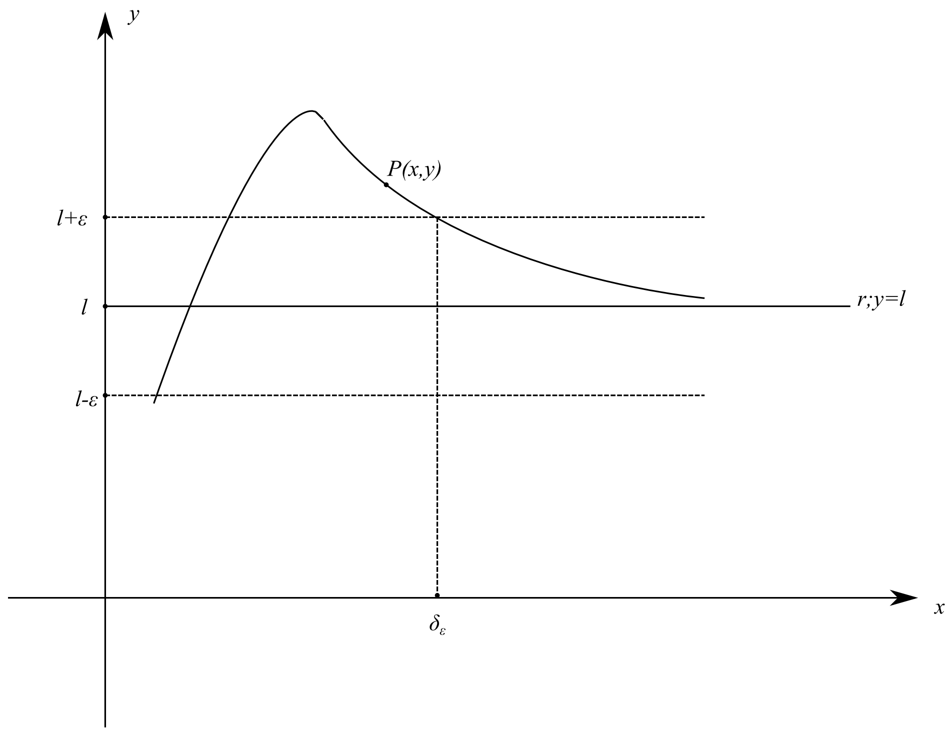


Figura 10: $\forall J_{\varepsilon}(l)\,,\ \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid x > \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow (x, f(x)) \in (\delta_{\varepsilon}, +\infty) \times J_{\varepsilon}(l)$. Assegnato $P(x,y) \in \Gamma : y = f(x)$, $dist\,(P,r) = |f(x) - l|$, dove $r : y = l$. Risulta: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} dist\,(P,r) = 0$. Ciò si esprime dicendo che la retta r è **asintoto orizzontale a destra** per Γ.

La definizione 9 ha un'immediata interpretazione geometrica come illustrato nella fig. 10.

Definizione 10 *La funzione f è **convergente** per $x \to -\infty$, se $\exists l \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall J_{\varepsilon}(l)\,,\ \exists I_{\delta_{\varepsilon}}(-\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_{\varepsilon}}(-\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_{\varepsilon}(l)\,, \tag{15}$$

dove: $I_{\delta_{\varepsilon}}(-\infty) = (-\infty, -\delta_{\varepsilon})$. La (15) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid x \in X,\ x < -\delta_{\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Simbolicamente, la proprietà (15) è espressa da:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

La definizione 10 ha un'immediata interpretazione geometrica come illustrato nella fig. 11.

Definizione 11 *La funzione f è **divergente positivamente** per $x \to +\infty$, se:*

$$\forall J_{\varepsilon}(+\infty)\,,\ \exists I_{\delta_{\varepsilon}}(+\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_{\varepsilon}}(+\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_{\varepsilon}(+\infty)\,, \tag{16}$$

La (16) è equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid x \in X,\ x > \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

Tale proprietà è simbolicamente espressa da:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

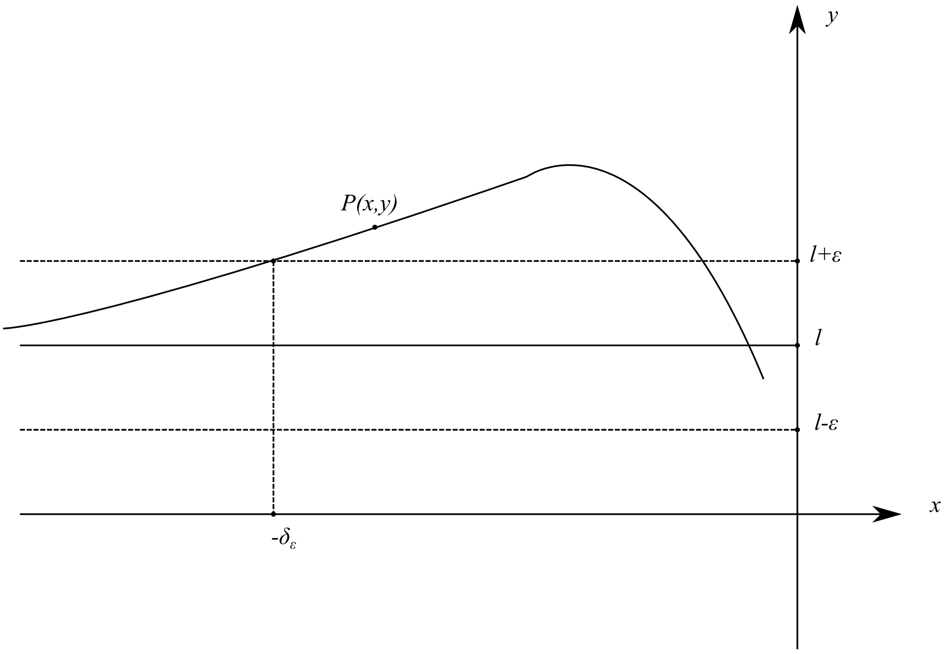


Figura 11: $\forall J_\varepsilon(l)\,,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow (x, f(x)) \in (-\infty, -\delta_\varepsilon) \times J_\varepsilon(l)$. Assegnato $P(x,y) \in \Gamma : y = f(x)$, $dist(P,r) = |f(x) - l|$, dove $r : y = l$. Risulta: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} dist(P,r) = 0$. Ciò si esprime dicendo che la retta r è **asintoto orizzontale a sinistra** per Γ.

Definizione 12 *La funzione f è **divergente negativamente** per $x \to +\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon(-\infty)\,,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(-\infty)\,, \tag{17}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X,\ x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Definizione 13 *La funzione f è **divergente positivamente** per $x \to -\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon(+\infty)\,,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}(-\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(-\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(+\infty)\,, \tag{18}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X,\ x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Definizione 14 *La funzione f è **divergente negativamente** per $x \to -\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon(-\infty)\,,\ \exists I_{\delta_\varepsilon}(-\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(-\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(-\infty)\,, \tag{19}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X,\ x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Definizione 15 *Sia x_0 punto di accumulazione al finito o all'infinito.*

$$f \text{ è } \textbf{\textit{regolare}} \text{ in } x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Di contro:

$$f \text{ è } \textbf{\textit{non regolare}} \text{ in } x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \nexists l \in [-\infty, +\infty] \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Esempio 16 *La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è non regolare in $x = 0$, poichè in ogni intorno di tale punto assume valori positivi e negativi.*