Studio della convergenza della serie trovata da Riemann

Marcello Colozzo

Scriviamo

$$\pi_0(x) = R(x) + G(x) + H(x), \tag{1}$$

avendo definito

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} Li\left(x^{1/k}\right) \\ G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left[-\ln 2 + \int_{x^{1/k}}^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}\right] \\ H(x) &= -\sum_{\rho} Li\left(x^{\rho}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Per lo studio della convergenza dell'integrale nella seconda delle (2), si rimanda alla seguente risorsa. Nel frattempo osserviamo che la serie a secondo membro della prima delle (2) è uniformemente convergente in $[2,+\infty)$. Per quanto riguarda la serie a secondo membro della seconda delle citate equazioni, a parte la divergenza dell'integrale nel limite per $k \to +\infty$ (come stabilito in questa risorsa), tale serie *dovrebbe essere* uniformemente convergente, cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \nu_\varepsilon \in N \mid n > \nu_\varepsilon \Longrightarrow \left| G(x) - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon, \;\; \forall x \in [2,+\infty), \tag{3}$$

dove l'indice ν_ε *non* dipende da x, mentre

$$\varphi_k(x) = \frac{\mu(k)}{k}\left[-\ln 2 + I\left(x^{1/k}\right)\right], \quad I\left(x^{1/k}\right) \stackrel{def}{=} \int_{x^{1/k}}^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} \tag{4}$$

L'integrale $I\left(x^{1/k}\right)$ non è elementarmente esprimibile, per cui ci affidiamo a Mathematica per eseguire un'integrazione numerica. Precisamente, dopo aver generato una lista di valori si esegue un'interpolazione, ottenendo una funzione approssimata $I_{app}(x)$. A questo punto ci si riferisce alla somma parziale di ordine N_0. Nel predetto ordine di approssimazione:

$$G_{N_0,app}(x) = \sum_{k=1}^{N_0} \varphi_{k,app}(x), \tag{5}$$

dove

$$\varphi_{k,app}(x) = \frac{\mu(k)}{k} I_{app}\left(x^{1/k}\right)$$

In fig. 1 riportiamo il grafico di $G_{N_0,app}(x)$ con $N_0 = 2 \times 10^3$, da cui vediamo che $G_{N_0,app}(x) \sim 2 \cdot 10^{-3}$ anche per $N \gg 1$.

Esaminiamo il comportamento dei singoli termini della serie, iniziando con l'osservare che

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \frac{\mu(k)}{k}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \left[-\ln 2 + I\left(x^{1/k}\right)\right]}_{=+\infty} = 0 \cdot \infty,$$

per cui non possiamo dire nulla circa il comportamento dei singoli termini della serie nel limite dei grandi k. Tuttavia, l'analisi numerica suggerisce:

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = 0$$

Tale risultato depone a favore della convergenza uniforme, giustificando al contempo il contributo trascurabile di $G_{N_0,app}(x)$, nonostante la divergenza dell'integrale per $k \to +\infty$.

A questo punto risulta istruttivo confrontare la somma parziale di ordine $N_0 = 2 \times 10^3$ della serie $R(x) + G(x)$ con la funzione $\pi(x)$, come riportato nel grafico di fig. 2.

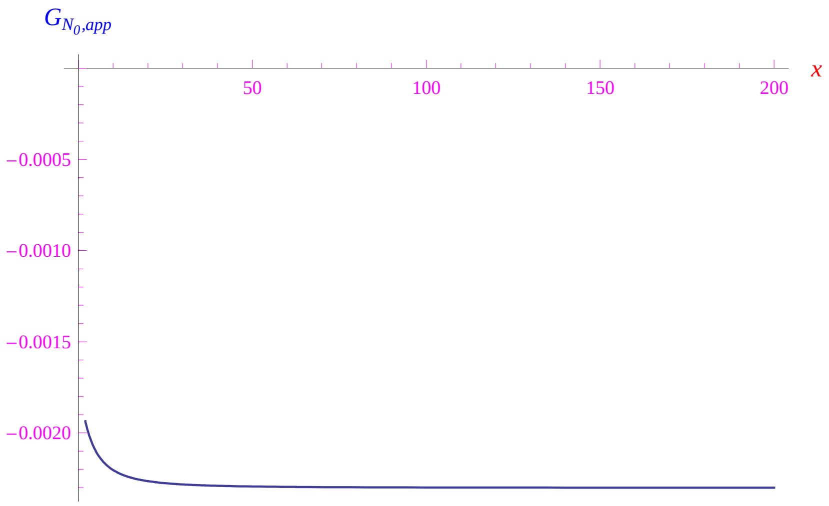

Figura 1: Andamento di $G_{N_0,app}(x)$.

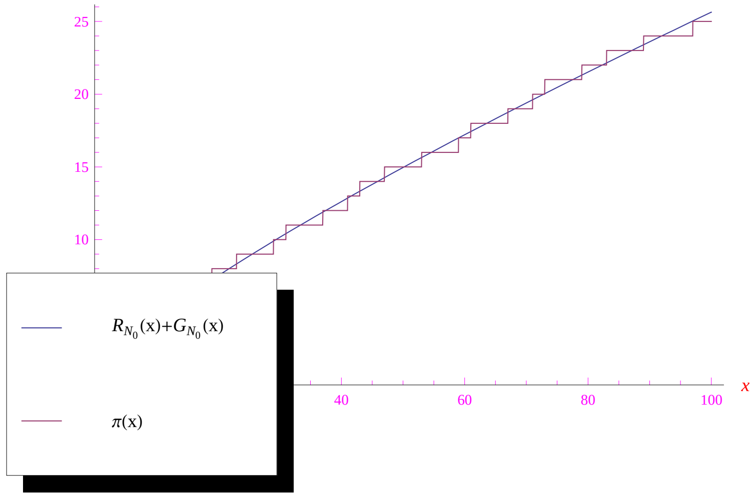

Figura 2: Andamento di $R_{N_0}(x) + G_{N_0,app}(x)$ confrontato con $\pi(x)$.