Appunti di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

0.1 Controesempio per il teorema di periodicità

Quest'articolo propone un controesempio a questo teorema.

Promemoria

Nella trattazione svolta nei numeri precedenti, il ruolo cruciale è svolto dalla funzione

$$f(x) = \frac{2}{m}[E - V(x)], \tag{1}$$

che è l'energia cinetica della particella in funzione dell'ascissa x. Il segno della (1) determina univocamente la regione classicamente accessibile:

$$\Lambda(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \tag{2}$$

Avevamo poi dimostrato che se $\xi \in \mathring{\Lambda}$ è uno zero di $f(x)$ e se l'energia potenziale $V(x)$ e di classe $C^{n\geq 1}$, si ha per un'assegnata condizione iniziale x_0 (teorema **??**)

$$t(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = +\infty \tag{3}$$

o ciò che è lo stesso

$$\xi = \lim_{t\to+\infty} x(t) \tag{4}$$

Ne segue che ξ è un punto di arresto asintotico.

Ciò premesso, il teorema citato nel titolo afferma che comunque prendiamo due punti di inversione consecutivi x_1, x_2, il moto tra essi è periodico di periodo

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{5}$$

Come controesempio, consideriamo l'energia potenziale (unità adimensionali):

$$V(x) = 1 + P_4\left(x - \frac{3}{2}\right) \tag{6}$$

dove $P_n(z)$ sono i polinomi di Legendre. Nel caso in esame abbiamo:

$$V(x) = \frac{1}{128}\left(560x^4 - 3360x^3 + 7080x^2 - 6120x + 1931\right) \tag{7}$$

Eseguendo uno studio di funzione troviamo il grafico di fig. 1. In particolare, $\xi_0 = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo relativo, ovvero ξ_0 è una posizione di equilibrio instabile. Studiamo il moto nel caso in cui l'energia meccanica della particella è

$$E = V(\xi_0) = \frac{11}{8} \tag{8}$$

Segue

$$f(x) = \frac{2}{m}[V(\xi_0) - V(x)] \tag{9}$$

cosicché

$$V(x) \leq V(\xi_0), \quad \forall x \in [x_1, x_2]) \Longrightarrow \Lambda(V(\xi_0)) = [x_1, x_2], \tag{10}$$

come vediamo dalla predetta figura. Per essere più specifici, esprimiamo tutto ciò numericamente:

$$E = \frac{11}{8} \Longrightarrow x_1 = \frac{21 - 2\sqrt{21}}{14}, \quad x_2 = \frac{21 + 2\sqrt{21}}{14} \tag{11}$$

Assumiamo come condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 \in [x_1, \xi_0), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0 \tag{12}$$

Cioè, la particella inizia a muoversi da x_0 di moto progressivo i.e. verso la posizione di equilibrio instabile. Per quanto precede, la sua energia meccanica totale è $E = V(\xi_0)$. È chiaro che inizialmente ha il medesimo valore

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E = V(\xi_0) \tag{13}$$

Siccome $V(x) < V(\xi_0), \ \forall x \in [x_0, \xi_0)$, la particella ha un contenuto non nullo di energia cinetica $f(x)$. Tuttavia dal momento che ξ_0 è uno zero di $f(x)$ interno a $\Lambda(E)$ (fig. 2), per il teorema della convergenza/divergenza dell'integrale che misura il tempo t in funzione di x, si ha:

$$\tau_0 = t(\xi_0) = \int_{x_0}^{\xi_0} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = +\infty \tag{14}$$

ossia

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \xi_0 \tag{15}$$

Ne consegue che la posizione di equilibrio instabile ξ_0 viene raggiunta asintoticamente. Si noti che possiamo lasciare cadere l'ipotesi restrittiva sulle condizioni iniziali (12) a patto di assegnare $x_0 \in [x_1, x_2]$. Ad esempio, se $x_0 \in [x_1, \xi_0), \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 < 0$, la particella compie un moto retrogrado verso x_1 che è un evidente punto di arresto con inversione del moto, per cui compie successivamente un moto progressivo verso ξ_0, raggiungendo tale punto dopo un intervallo di tempo infinito.

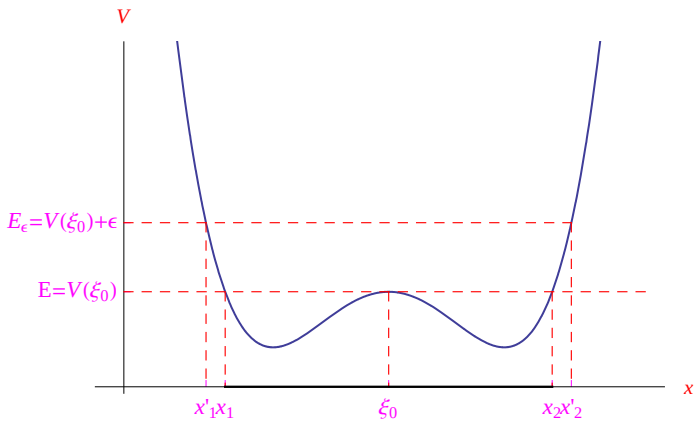

Figura 1: Andamento dell'energia potenziale (7).

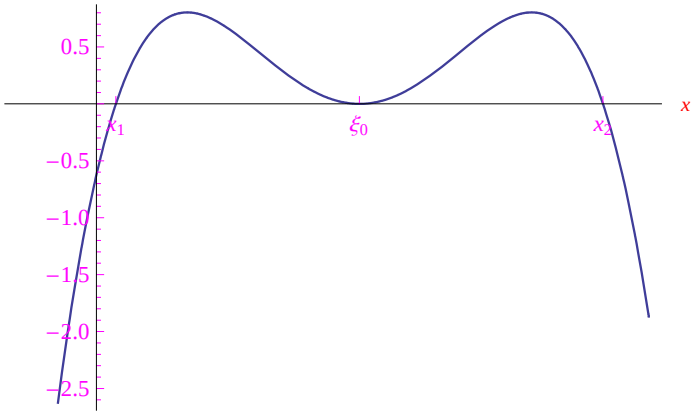

Figura 2: Andamento dell'energia cinetica in fnzione dell'ascissa, $f(x) = \frac{2}{m}[V(\xi_0) - V(x)]$, ove abbiamo posto $m = 2$ (unità adimensionali).

La conclusione a cui siamo giunti è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia meccanica: la particella non ha energia sufficiente per *attraversare* la posizione di equilibrio instabile. Incidentalmente, se l'energia meccanica è

$$E_\varepsilon = V(\xi_0) + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \tag{16}$$

si ha

$$f_\varepsilon(x) = \frac{2}{m}[\varepsilon + V(\xi_0) - V(x)] \tag{17}$$

Ne segue

$$\varepsilon > 0 \Longrightarrow \nexists \xi \in \mathring{\Lambda}(E_\varepsilon) \mid f_\varepsilon(\xi) = 0$$

Inoltre

$$\Lambda(E_\varepsilon) = [x_1', x_2'] \supset [x_1, x_2],$$

come mostrato in fig. 1. In tal caso il moto è periodico di periodo

$$T_\varepsilon = 2\int_{x_1'}^{x_2'} \frac{dx}{\sqrt{f_\varepsilon(x)}} < +\infty, \quad (\varepsilon > 0) \tag{18}$$

Per quanto precede:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = +\infty \tag{19}$$