Configurazioni di equilibrio di una diffusione virale. Il caso del Coronavirus

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Introduzione

In quest'articolo mostriamo che un sistema non autonomo (nel caso specifico di una diffusione virale)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(t) N, \quad (\alpha(t) \geq 0, \ \forall t)$$

può essere descritto da un insieme al più infinito numerabile, di sistemi istantaneamente autonomi, ciascuno dei quali è una generalizzazione della *mappa logistica*.

2 Sistema non autonomo

Il nostro punto di partenza è una *popolazione a tre componenti*:

1. **Attualmente positivi**.
2. **Guariti**.
3. **Deceduti**.

Se $A(t)$, $G(t)$ e $D(t)$ sono le funzioni che contaggiano gli individui di singola popolazione, si ha che il numero di *contagiati totali* al tempo t, è dato da:

$$N(t) = A(t) + G(t) + D(t) \tag{1}$$

Assumiamo che $N(t)$ sia l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy[1]:

$$\begin{cases} \dot{N} = f(t, N) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}, \tag{2}$$

essendo $t_0 = 0\,\mathrm{d} \equiv 24/02/2020$. Nel paradigma dei sistemi dinamici, la (2) definisce un *sistema non autonomo*, in quanto la funzione f a secondo membro della (2) dipende esplicitamente dal tempo. Inoltre, la maggior parte dei modelli di crescita di una popolazione prevedono una proporzionalità tra la velocità di diffusione $\dot{N}$ ed N. Incidentalmente nel caso speciale:

$$\dot{N} = \alpha_0 N, \quad \text{con } \alpha_0 = \text{costante},$$

si ha una crescita esponenziale. Ciò suggerisce che nel caso generale la funzione $f(t, N)$ si fattorizza come:

$$f(t, N) = f_1(t) f_2(N),$$

dove $f_2(N)$ è tale che $f_2(0) = 0$. Sviluppando $f_2(N)$ in serie di Taylor in un intorno di $N = 0$:

$$f(t, N) = f_1(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_2^{(k)}(0)}{k!} N^k$$

[1] Per la derivata rispetto alla variabile t utilizziamo la notazione puntata, anzichè quella apicale.

Troncando la serie al primo ordine:

$$f(t, N) = f_1(t) f_2'(0) N,$$

per cui

$$\dot{N} = \alpha(t) N, \tag{3}$$

avendo definito $\alpha(t) = f_1(t) f_2'(0)$. In tal modo, il problema (2) ammette l'unica soluzione:

$$N(t) = N_0 e^{\mathcal{A}(t)}, \tag{4}$$

essendo

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t \alpha(t') \, dt' \tag{5}$$

Sfortunatamente non conosciamo la funzione $\alpha(t)$ se non attraverso i dati giornalieri forniti dal sito web della Protezione civile. Per poter inserire questi dati in un'equazione differenziale del tipo (3) dobbiamo necessariamente eseguire un campionamento della variabile t con ampiezza di campionamento pari a 1 d, in modo da poter scrivere la (3) nella forma:

$$N_{k+1} - N_k = \alpha_k N_k, \quad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{6}$$

Per quanto precede, i dati N_k, N_{k+1} sono forniti dal sito della Protezione civile, per cui possiamo calcolare giornalmente

$$\alpha_k = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n,$$

dove l'intero naturale n identifica l'*istante giornaliero* t_n. Ad esempio, in data odierna (22/03, i dati sono aggiornati al giorno precedente) abbiamo l'andamento graficato in fig. 1.

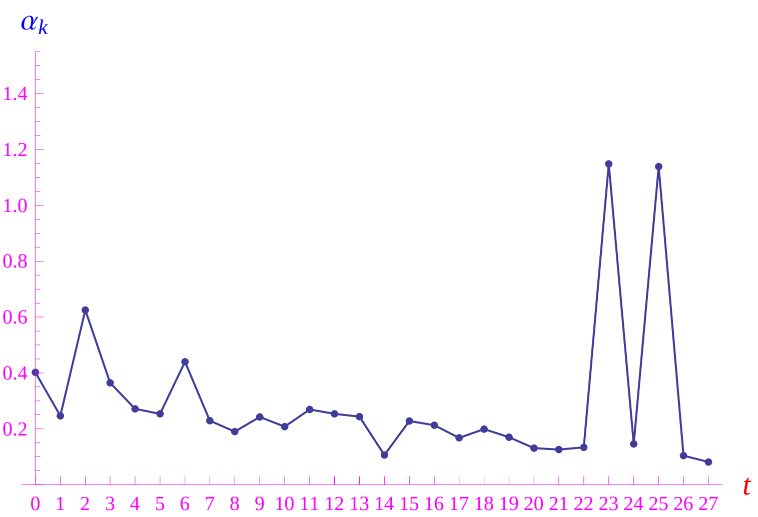

Figura 1: Andamento di α_k.

3 Sistema autonomo

Proviamo ad approssimare l'evoluzione virale con un sistema autonomo. Più precisamente, in approssimazione *logistica* e per un assegnato n, abbiamo il seguente sistema autonomo nonlineare:

$$\dot{N} = \mu_n N - \beta_n N^{\lambda_n}, \tag{7}$$

dove

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n\geq 1}\alpha_k \tag{8}$$

Alcuni esempi (tenendo conto che l'istante iniziale è $t_0 = 0\,\mathrm{d} \equiv 24$ febbraio):

$$\begin{aligned} n = 1 \Longrightarrow t_1 = 1\,\mathrm{d} \equiv 25 \text{ febbraio}, \quad N_0 = 221, \;\; N_1 = 309 \\ \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{N_1 - N_0}{N_0} = 0.401\,\mathrm{d}^{-1} \end{aligned}$$

Se $n = 2$

$$\begin{aligned} n = 2 \Longrightarrow t_2 = 2\,\mathrm{d} \equiv 26 \text{ febbraio}, \quad N_0 = 221, \;\; N_1 = 309, \;\; N_2 = 385 \\ \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{N_1 - N_0}{N_0} = 0.401\,\mathrm{d}^{-1}, \;\; \alpha_1 = \frac{N_2 - N_1}{N_1} = 0.246\,\mathrm{d}^{-1} \end{aligned}$$

Gli altri parametri sono $\beta_n > 0$ e l'esponente $\lambda_n > 0$. Il primo dipende da μ_n, mentre il secondo sembra esibire una dipendenza sensibile da n. Nel grafico di fig. (aggiornato al 23/03) riportiamo la soluzione della (7) con

$$\mu_{28} = 0.297, \;\; \beta_{28} = 7 \times 10^{-5}, \;\; \lambda_n = 1.735$$

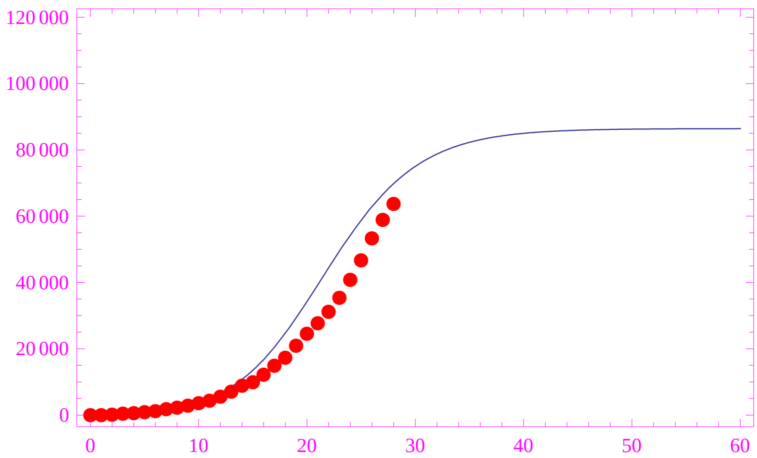

Figura 2: Andamento di $N(t)$ (ottenuto per integrazione numerica) confrontato con N_k.