Una condizione per gli zeri della funzione zeta di Riemann

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Scriviamo

$$\zeta(x+it)=\varphi(x,t)+i\chi(x,t)$$

Per quanto visto in precedenza:

$$\varphi(x,t)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t$$
$$\chi(x,t)=-\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\omega_n}\sin\omega_n t,$$

ricordando che $\omega_n=\ln n$. Gli zeri non banali della funzione zeta sono individuati dalle coppie ordinate di numeri reali $(x,t\neq 0)$ tali che

$$\begin{cases}\varphi(x,t)=0\\ \chi(x,t)=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=-1\\ \sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\omega_n}\sin\omega_n t=0\end{cases}\tag{1}$$

Derivando rispetto a x primo e secondo membro della prima equazione:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)\,\omega_n e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=0$$

Derivando fino a un ordine p fissato ad arbitrio:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^p\,\omega_n^p e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=0,\quad\forall p\in\mathbb{N}-\{0\}$$

Procedendo in maniera analoga per la seconda delle (1):

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^q\,\omega_n^q e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=0,\quad\forall q\in\mathbb{N}$$

In definitiva gli zeri della funzione zeta devono verificare la condizione:

$$\zeta(x+it)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=-1\\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^p\,\omega_n^p e^{-x\omega_n}\cos\omega_n t=0\quad,\quad\forall p\in\mathbb{N}-\{0\},\ \forall q\in\mathbb{N}\\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^q\,\omega_n^q e^{-x\omega_n}\sin\omega_n t=0\end{cases}$$