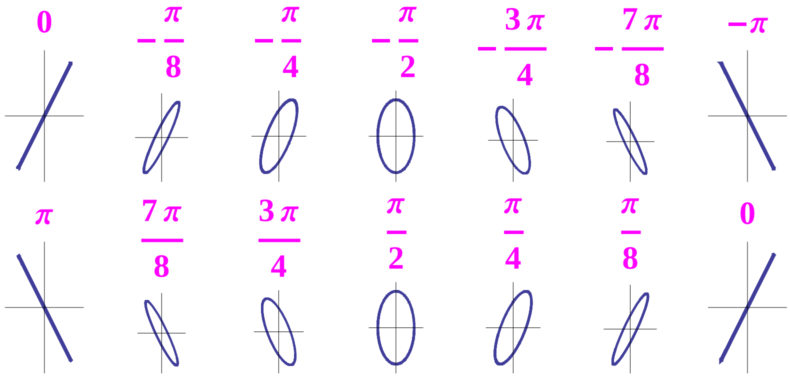
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Composizione di moti armonici

Marcello Colozzo



Indice

1 Moto circolare uniforme. Velocità angolare

Un caso particolare di moto piano è il **moto circolare uniforme**, in cui la traiettoria γ è una circonferenza, e la velocità scalare è costante. Adottando un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) con l'origine nel centro della circonferenza, si ha la configurazione cinematica illustrata in fig. 1.

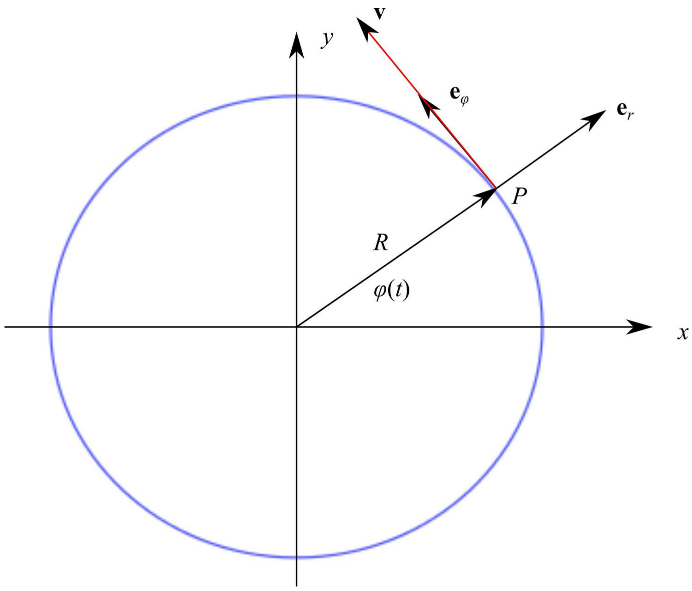


Figura 1: Nel moto circolare uniforme la velocità vettoriale è puramente trasversale.

Qui R è il raggio della circonferenza che coincide con il raggio di curvatura:

$$R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}$$

dove a è l'accelerazione, che è puramente normale giacché l'accelerazione tangenziale è nulla:

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

In questo caso è immediata la determinazione del versore normale. Dalla predetta figura:

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \underset{|\mathbf{r}|=R}{=} -\frac{1}{R}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Segue

$$\mathbf{n} \cdot \tau = 0 \Longrightarrow \tau = \frac{1}{R}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

È preferibile studiare il moto in coordinate polari. Introducendo i versori e_r ed e_φ, vediamo che la velocità vettoriale è puramente trasversale:

$$v_r = \dot{r} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \text{ con } v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

Quindi

$$v = r\dot{\varphi} = \text{costante} \Longleftrightarrow \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Dove ω è una costante. Senza perdita di generalità, assumiamo $\omega > 0$, mentre φ_0 è l'anomalia nell'istante iniziale $t = 0$. Ponendo $\varphi_0 = 0$ e osservando che $r(t) = R$, si ha

$$v = \omega R \tag{2}$$

Definizione 1 *La grandezza*

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{3}$$

si chiama **velocità angolare***, e si misura in* rad/s. *La grandezza*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{4}$$

è il **periodo** *del moto circolare uniforme con velocità angolare ω, e rappresenta il tempo impiegato dal punto materiale per percorrere l'intera circonferenza.*

Con l'introduzione della velocità angolare, l'accelerazione scalare si riscrive:

$$a = \omega^2 R \tag{5}$$

È consuetudine assegnare un carattere vettoriale alla velocità angolare, defininendo un vettore $\boldsymbol{\omega}$ avente modulo $\omega = \frac{v}{R}$, direzione ortogonale al piano del moto e verso tale che guardando dove punta il vettore, il moto appaia antiorario. Con tale convenzione, vengono contemplati anche i valori negativi della velocità angolare, esclusi in precedenza. Più precisamente, riesce sempre $\omega > 0$, ma il verso positivo (antioriario) o negativo determina orientazioni opposte del vettore $\boldsymbol{\omega}$. Un'ultima osservazione riguarda il carattere intrinseco della grandezza ω. Infatti, mentre per un qualunque moto piano la derivata di $\varphi(t)$ è legata al riferimento polare scelto, la velocità angolare ω dipende esclusivamente dalla traiettoria (in particolare dal raggio) e dal modulo della velocità.

2 Composizione di moti armonici

Nel numero precedente abbiamo stabilito la seguente espressione per la velocità vettoriale di un punto che compie un moto circolare uniforme

$$\mathbf{v} = \frac{v}{R}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \tag{6}$$

esendo v il modulo (costante) del vettore $\mathbf{v}$, mentre R è il raggio della circonferenza. Rammentando la relazione $v = \omega R$ la precedente diviene

$$\mathbf{v} = \omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} \tag{7}$$

D'altra parte

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

per cui

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \tag{8}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di equazioni differenziali accoppiate (del primo ordine e di forma normale) nelle incognite $x(t), y(t)$. È facile verificare che una soluzione è

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad y(t) = R\sin\omega t \tag{9}$$

La prima delle (9) può essere riscritta

$$x = R\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{10}$$

che è l'equazione oraria di un punto materiale che compie un **moto armonico**. Si tratta di un particolare moto unidimensionale, la cui equazione oraria è espressa da una funzione sinusoidale di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e fase φ. Nel caso in esame la fase è $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2 *Determinare gli istanti di arresto per il moto armonico (10). In quali istanti la velocità è massima?*

Allo stesso modo vediamo dalla seconda delle (9) che il moto componente lungo l'asse x è a sua volta un moto armonico di periodo T e fase $\varphi = 0$.

Seguono le definizioni:

Definizione 3 *La velocità angolare ω del moto circolare uniforme, si chiama* **pulsazione** *o* **frequenza angolare** *dei singoli moti armonici (9). La grandezza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ è la* **frequenza** *dei predetti moti. Il raggio R della circonferenza del moto risultante, è l'***ampiezza** *dei singoli moti armonici componenti.*

Ne concludiamo che un moto circolare uniforme di velocità angolare ω e raggio R (della circonferenza), è la composizione di due moti armonici in quadratura (differenza tra le fasi pari a $\pi/2$), di ampiezza R e pulsazione ω. Ci proponiamo di generalizzare tale conclusione, studiando la composizione di due moti armonici con la medesima pulsazione, ma di ampiezza e fasi arbitrarie. Precisamente:

$$x = A_x\cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y\cos(\omega t + \varphi_y) \tag{11}$$

Si noti che le (11) costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria del moto risultante. Per ottenere la sua rappresentazione parametrica, eliminiamo il parametro t tra le predette equazioni. A tale scopo sviluppiamo $\cos(\omega t + \varphi_x)$ e $\cos(\omega t + \varphi_y)$ con le note formule di addizioni degli archi:

$$\begin{aligned} x &= A_x\cos\omega t\cos\varphi_x - A_x\sin\omega t\sin\varphi_x \\ y &= A_y\cos\omega t\cos\varphi_y - A_y\sin\omega t\sin\varphi_y \end{aligned}$$

Definiamo le seguenti variabili ausiliarie

$$\xi = \cos\omega t, \quad \eta = \sin\omega t$$

Segue

$$\begin{cases} (A_x\cos\varphi_x)\,\xi - (A_x\sin\varphi_x)\,\eta = x \\ (A_y\cos\varphi_y)\,\xi - (A_y\sin\varphi_y)\,\eta = y \end{cases}, \tag{12}$$

che è un sistema di due equazioni lineari nelle incognite ξ, η. La matrice dei coefficienti (o matrice incompleta) è

$$M = \begin{pmatrix} A_x\cos\varphi_x & -A_x\sin\varphi_x \\ A_y\cos\varphi_y & -A_y\sin\varphi_y \end{pmatrix}$$

Di seguito la matrice completa

$$M' = \begin{pmatrix} A_x \cos\varphi_x & -A_x \sin\varphi_x & x \\ A_y \cos\varphi_y & -A_y \sin\varphi_y & y \end{pmatrix}$$

Per noti teoremi si ha che il sistema è compatibile e determinato se e solo se $\rho(M) = \rho(M')$, ove ρ denota il rango di una matrice. Segue

$$\begin{aligned} \text{Il sistema 12 è compatibile e determinato} &\iff \rho(M) = 2 \\ &\iff \Delta = \det M \neq 0 \end{aligned}$$

Cioè se e solo se

$$\Delta = -A_x A_y \sin\Delta\varphi \neq 0, \tag{13}$$

avendo introdotto la differenza di fase $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Dal momento che A_x, A_y sono ovviamente non nulli, si ha

$$\Delta \neq 0 \iff \Delta\varphi \neq k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

Cioè per $\Delta\varphi = k\pi$ il predetto sistema non ammette soluzioni, e l'equazione cartesiana della traiettoria va determinata in altro modo. Precisamente, se ad esempio $\Delta\varphi = 0$ (moti armonici componenti in fase):

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_x)$$

Eliminando il termine $\cos(\omega t + \varphi_x)$

$$y = \frac{A_y}{A_x} x \tag{15}$$

Pertanto se i moti componenti sono in fase, la traiettoria del moto risultante è un segmento appartenente alla retta di equazione (15), come illustrato in fig. 2. Alla medesima conclusione si giunge per $\Delta\varphi = k\pi$, per ogni $|k|$ pari.

Se $\Delta\varphi = \pi$ (moti armonici in opposizione di fase):

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = -A_y \cos(\omega t + \varphi_x),$$

onde l'equazione cartesiana della traiettoria

$$y = -\frac{A_y}{A_x} x \tag{16}$$

Abbiamo quindi una configurazione cinematica per così dire, speculare a quella precedente (fig. 2)

Alla stessa conclusione per $\Delta\varphi = k\pi$, per ogni $|k|$ dispari. Per $\Delta\varphi \neq k\pi$, il sistema 12 è compatibile e determinato. Risolvendo con la nota regola di Cramer, otteniamo (dopo aver ripristinato le vecchie variabili)

$$\begin{cases} \cos\omega t = \frac{yA_x \sin\varphi_x - xA_y \sin\varphi_y}{A_x A_y \sin\Delta\varphi} \\ \sin\omega t = \frac{xA_y \cos\varphi_x - yA_x \cos\varphi_y}{A_x A_y \sin\Delta\varphi} \end{cases} \tag{17}$$

Quadrando e sommando

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi, \tag{18}$$

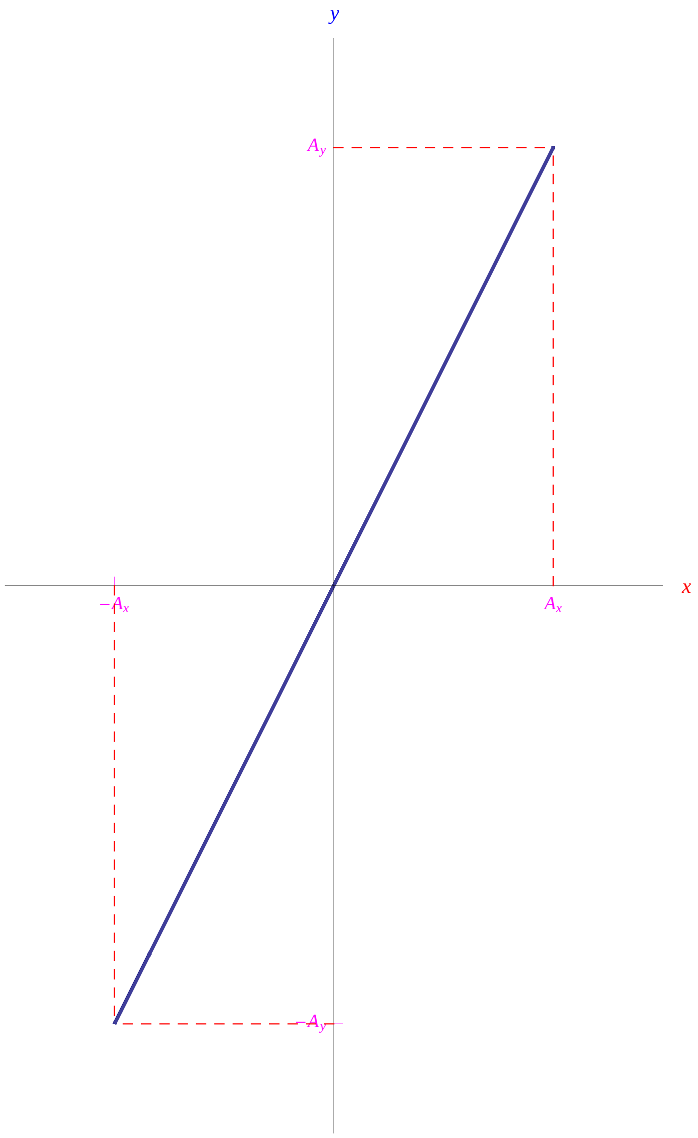


Figura 2: Se i moti armonici componenti sono in fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = \frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, -A_y), (-A_x, -A_y)$.

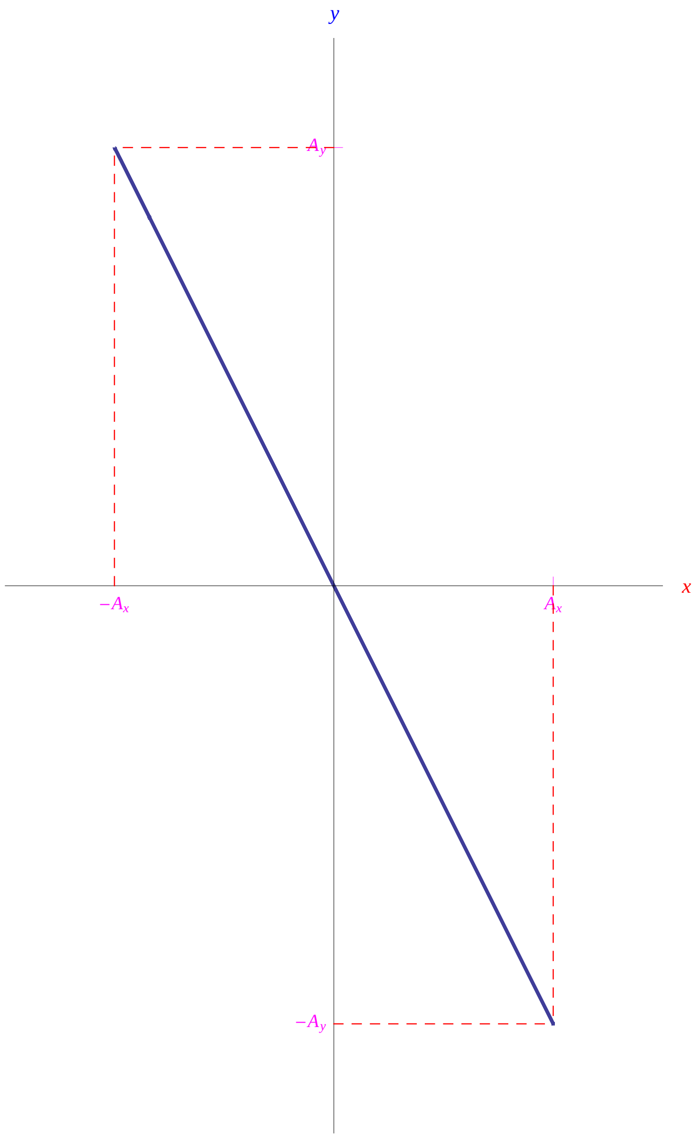


Figura 3: Se i moti armonici componenti sono in opposizione di fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = -\frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, A_y), (A_x, -A_y)$.

che l'equazione di una conica centrata nell'origine. Per $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

Cioè l'ellisse ha per assi gli assi coordinati x, y. In fig. riportiamo l'andamento della traiettoria per valori notevoli della differenza di fase.

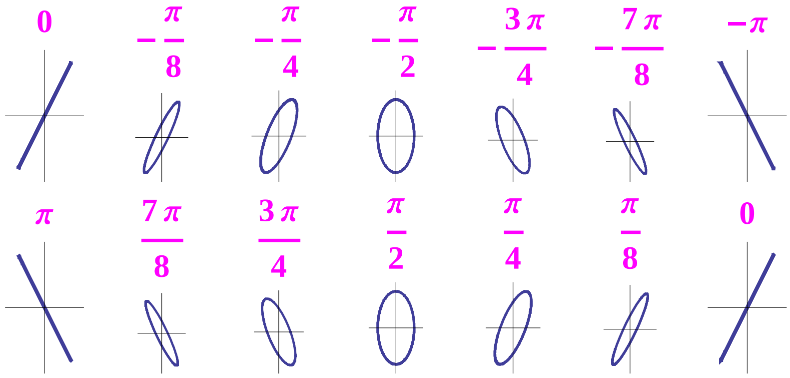


Figura 4: Se i moti armonici componenti sono in opposizione di fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = -\frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, A_y), (A_x, -A_y)$.

Riferimenti bibliografici

[1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1.* Ambrosiana, 2011.

[2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.

[3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967