

Circuito caotico

Marcello Colozzo - <http://www.extrabyte.info>

Siano R_1 , L_1 , D_1 rispettivamente una resistenza, un'induttanza e un diodo collegati in serie. Indichiamo con V_{in} la differenza di potenziale applicata al circuito. Si consideri un andamento sinusoidale:

$$V_{in}(t) = V_0 \sin(2\pi ft) \quad (1)$$

Come è noto, il diodo ha un comportamento anomalo, che per "piccoli" valori della tensione applicata, può essere linearizzato e sostituito da un circuito equivalente. Senza entrare in dettagli, si ottiene:

$$L_1 \frac{di(t)}{dt} = -R_1 i(t) - \left[\frac{C_2 - C_1}{2C_1 C_2} |q(t)| + \frac{C_1 + C_2}{2C_1 C_2} q(t) + E_0 \right] + V_{in}(t), \quad (2)$$

essendo C_1, C_2 costanti con le dimensioni di una capacità. $q(t)$ e $i(t)$ sono rispettivamente la carica nel diodo e l'intensità di corrente che circola nel circuito. E_0 ha le dimensioni di una differenza di potenziale. Tenendo conto del legame tra carica e corrente, si ottiene il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di(t)}{dt} &= -R_1 i(t) - \left[\frac{C_2 - C_1}{2C_1 C_2} |q(t)| + \frac{C_1 + C_2}{2C_1 C_2} q(t) + E_0 \right] + V_{in}(t) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

Assumiamo V_0 come parametro e come condizione iniziale:

$$q(0) = 0, i(0) = 0 \quad (4)$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali segue che per un assegnato valore di V_0 e per un'assegnata condizione iniziale del tipo (4), il sistema (3) ammette una ed una sola soluzione. Tale soluzione è la coppia di grandezze $(i(t), q(t))$ che individua lo stato fisico del sistema. In altre parole, la ricerca delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali (3) ci permette di conoscere l'evoluzione futura del sistema dinamico rappresentato dal circuito in esame. Integriamo quindi il sistema (3). Tale sistema non può essere risolto analiticamente, ma numericamente, ad esempio con l'uso di un CAS (computer algebra system).

Esempio numerico:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.1 \times 10^{-6} \text{ F}, C_2 = 400 \times 10^{-12} \text{ F} \\ R_1 &= 60 \Omega, L_1 = 100 \times 10^{-6} \text{ H}, f = 7 \times 10^5 \text{ s}^{-1}, E_0 = 0.1 \text{ V} \end{aligned}$$

Restano da fissare i valori del parametro V_0 . Assumiamo l'insieme di valori:

$$V_0 = 0.1, 0.2, 0.3 \text{ V} \quad (5)$$

Per quanto detto, per ogni V_0 definito dalla (5) otteniamo una ed una sola soluzione $(q(t), i(t))$. Per $V_0 = 0.1$, grafichiamo la soluzione in funzione del tempo (figg. 1-2).

Dalle figure vediamo che la risposta del diodo è sinusoidale. Vediamo ora cosa succede aumentando di poco la V_0 . Precisamente, passiamo a $V_0 = 0.2 \text{ V}$. Otteniamo i grafici di figg. 3-4.

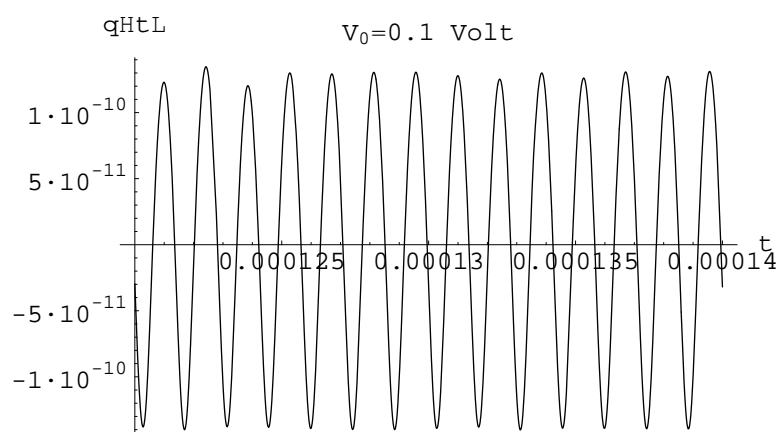


Figure 1: Carica elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.1$

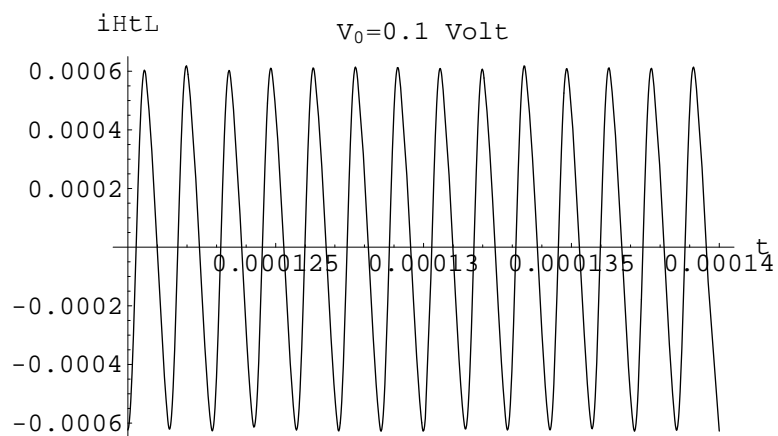


Figure 2: Corrente elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.1$

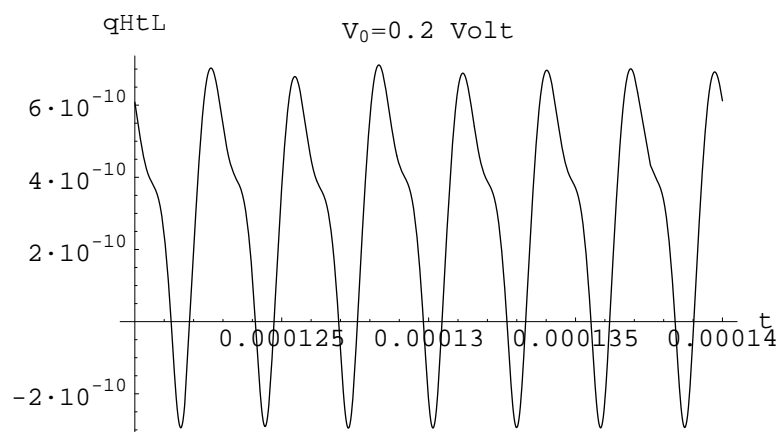


Figure 3: Carica elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.2$

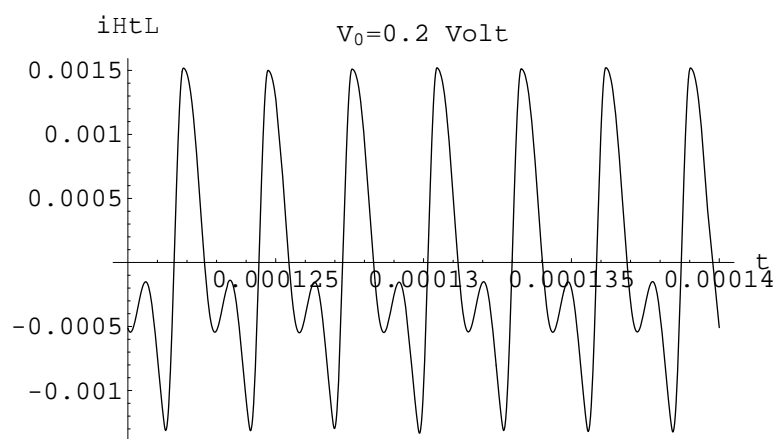


Figure 4: Corrente elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.2$

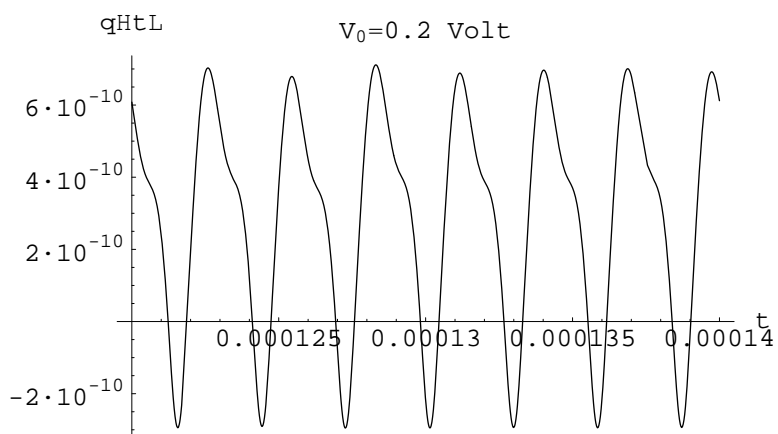


Figure 5: Carica elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.3$

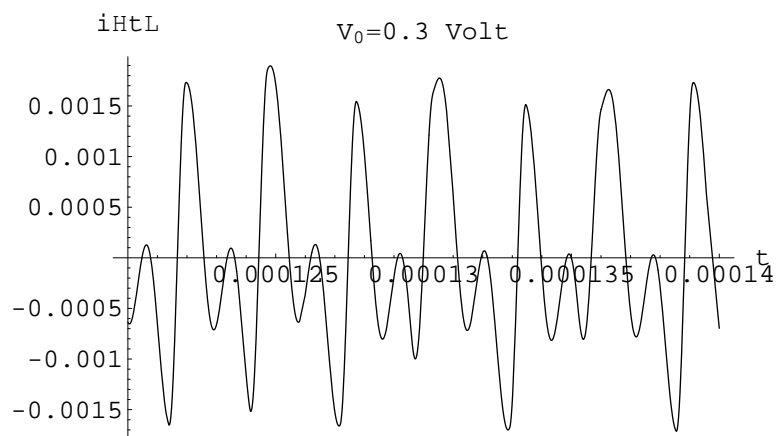


Figure 6: Corrente elettrica nel diodo in funzione del tempo per $V_0 = 0.3$

Ci siamo allontanati dal carattere sinusoidale. Ciò è corroborato dai grafici di figg. 5-6, relativi a $V_0 = 0.3$.

Questi grafici ci stanno dicendo che: se aumentiamo di poco la differenza di potenziale V_0 otteniamo un comportamento non lineare. Tecnicamente si introduce lo **spazio delle fasi**: si tratta di uno spazio astratto in questo caso 2-dimensionale, sull'asse delle ascisse riportiamo la corrente i , mentre sull'asse delle ordinate la carica q . La curva ottenuta è la **traiettoria di fase del sistema**.

Per $V_0 = 0.1$, la traiettoria di fase è in figura 7

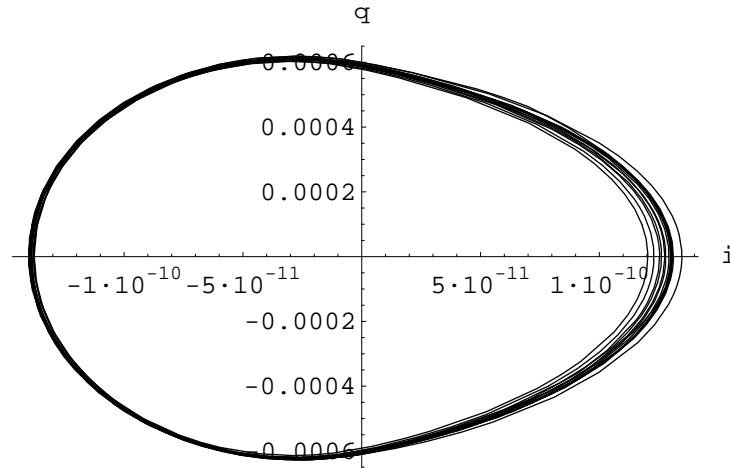


Figure 7: Traiettoria di fase per $V_0 = 0.1$.

Per $V_0 = 0.2$, la traiettoria di fase si complica (figura 8)

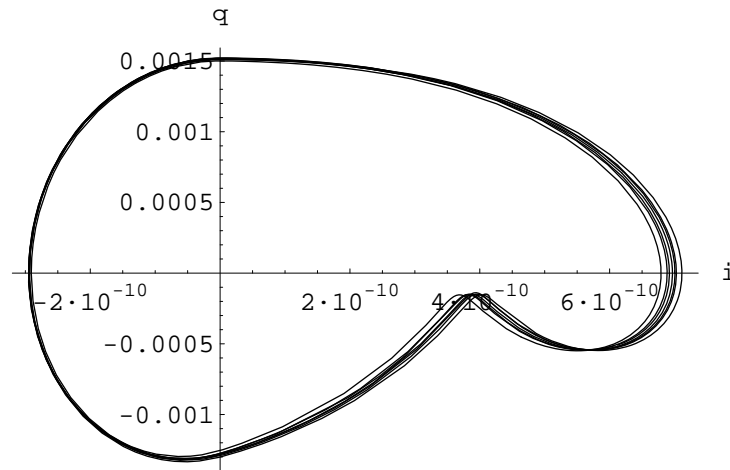


Figure 8: Traiettoria di fase per $V_0 = 0.2$.

Per $V_0 = 0.3$, la traiettoria di fase è ancora più complessa (figura 9)

Si conclude quindi che a piccole variazioni di V_0 corrispondono traiettorie di fase divergenti. Ciò è corroborato dalla presenza di punti di biforcazione (fig: 10)

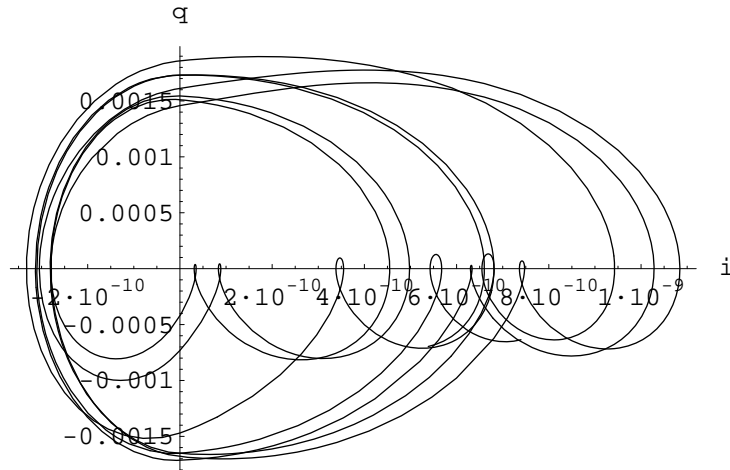


Figure 9: Traiettoria di fase per $V_0 = 0.3$

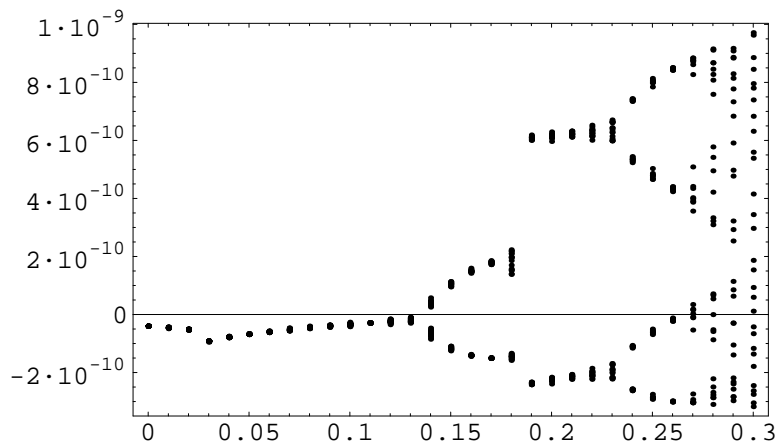


Figure 10: Grafico di q in funzione di V_0 . Si osservi la presenza di punti di biforcazione.