Interpretazione cinematica dei punti angolosi

Marcello Colozzo
[http://www.extrabyte.info]

1 Moto piano in un campo di Heaviside

Una particella compie un moto piano con le seguenti equazioni orarie:

$$x = v_{1x}t, \quad y = y_0 + v_{1y} |t - t_0|, \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

dove $v_{1x}, v_{1y}, x_0 > 0$ sono costanti assegnate: v_{1x} e v_{1y} hanno le dimensioni di una velocità, mentre x_0 di una lunghezza. t_0 è un istante dato, da non confondere con l'istante iniziale $t = 0$. Dalle (1) otteniamo per derivazione, le componenti cartesiane della velocità. Per eseguire la derivazione conviene esplicitare il valore assoluto:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + v_{1y}(t_0 - t), & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ y_0 + v_{1y}(t - t_0), & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \tag{2}$$

Quindi:

$$\dot{x} = v_{1x}, \quad \dot{y} = \begin{cases} -v_{1y}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_{1y}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}, \tag{3}$$

da cui il vettore velocità

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v_{1x}\mathbf{i} - v_{1y}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \tag{4}$$

Dalla (4) vediamo che nell'intervallo di tempo $0 \leq t < t_0$ il moto è rettilineo ed uniforme con velocità:

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\mathbf{i} - v_{1y}\mathbf{j},$$

mentre per $t \geq t_0$ il moto è ancora rettilineo ed uniforme, ma con velocità:

$$\mathbf{v}_2 = v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} \neq \mathbf{v}_1$$

Più precisamente, per ogni istante t la velocità conserva la componente nella direzione dell'asse x, mentre la componente nella direzione dell'asse y passa istantaneamente (a t_0) da $-v_{1y}$ a v_{1y}. Eliminiamo il tempo t tra le (1) in modo da ottenere la rappresentazione ordinaria della traiettoria γ:

$$y = f(x),$$

dove

$$f(x) = y_0 + \eta_0 |x - x_0|, \tag{5}$$

avendo introdotto il parametro adimensionale

$$\eta_0 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} > 0$$

Esplicitando il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0(x_0 - x), & \text{se } 0 \leq x < x_0 \\ y_0 + \eta_0(x - x_0), & \text{se} x \geq x_0 \end{cases}, \tag{6}$$

onde $\gamma = r_1 \cup r_2$, dove r_1 è il segmento della retta

$$r : y = -\eta_0 x + (y_0 + \eta_0 x_0),$$

di estremi $(0, y_0 + \eta_0 x_0)$ e $(x_0, 0)$, ovvero il seguente insieme di punti del piano cartesiano:

$$r_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < x_0, \ \ y = -\eta_0 x + (y_0 + \eta_0 x_0) \right\} \tag{7}$$

Invece r_2 è la semiretta $y = y_0 + \eta_0 (x - x_0)$ di origine $(x_0, 0)$:

$$r_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x < +\infty, \ \ y = y_0 + \eta_0 (x - x_0) \right\} \tag{8}$$

Ne consegue che $P_0 (x_0, y_0)$ è un punto angoloso per la traiettoria γ della particella, come riportato in fig. 1.

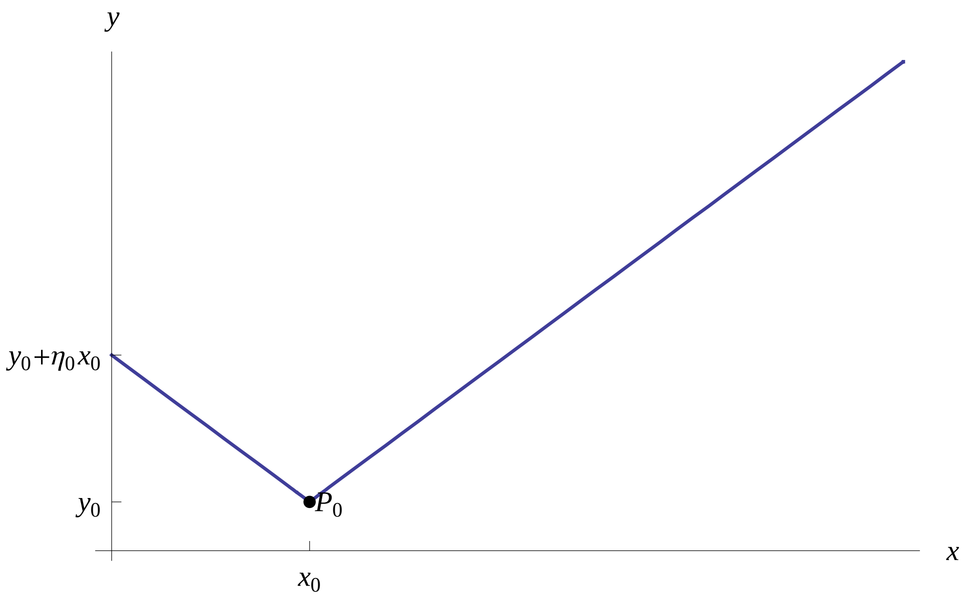

Figura 1: Traiettoria di una particella che compie un moto piano con equazioni orarie (1)

Dalla (2) vediamo che in t_0 la funzione $y(t)$ non è derivabile, ma lo è a sinistra e a destra:

$$\dot{y}_- (t_0) = -v_{1y} < 0, \quad \dot{y}_+ (t_0) = v_{1y} > 0,$$

per cui (t_0, y_0) è un punto angoloso per $\Gamma_y : y = y(t)$, come mostrato in fig. 2.

L'accelerazione della particella è:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathbf{j} \underset{\ddot{x}=0}{=} \ddot{y}(t)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}, \ \ \forall t \in [0, +\infty) - \{t_0\}$$

Infatti, la funzione $\dot{y}(t)$ non è derivabile in t_0, giacchè non è ivi definita. Possiamo scrivere la sua espressione analitica in termini di funzione di Heaviside:

$$\dot{y}(t) = v_{1y} \left[\theta (t - t_0) - \theta (t_0 - t) \right], \tag{9}$$

grafica in fig. 3. Ricordando che

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x), \tag{10}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac, si ha:

$$\ddot{y}(t) = v_{1y} \left[\delta (t - t_0) - \delta (t_0 - t) \right] \tag{11}$$

Se m è la massa della particella, la forza agente è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = m v_{1y} \left[\delta (t - t_0) - \delta (t_0 - t) \right] \mathbf{j}$$

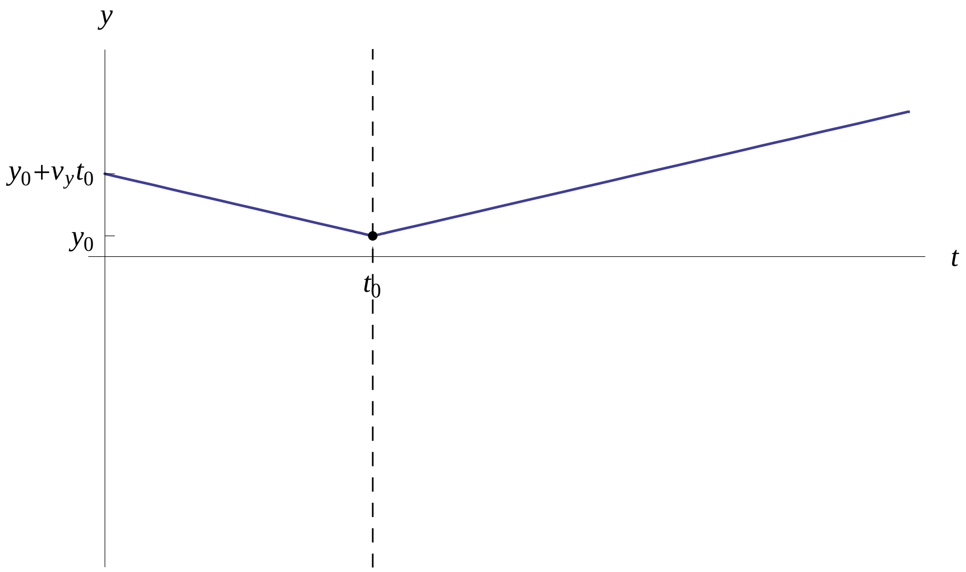

Figura 2: Grafico della funzione $y(t)$ (cfr. eq. 2)

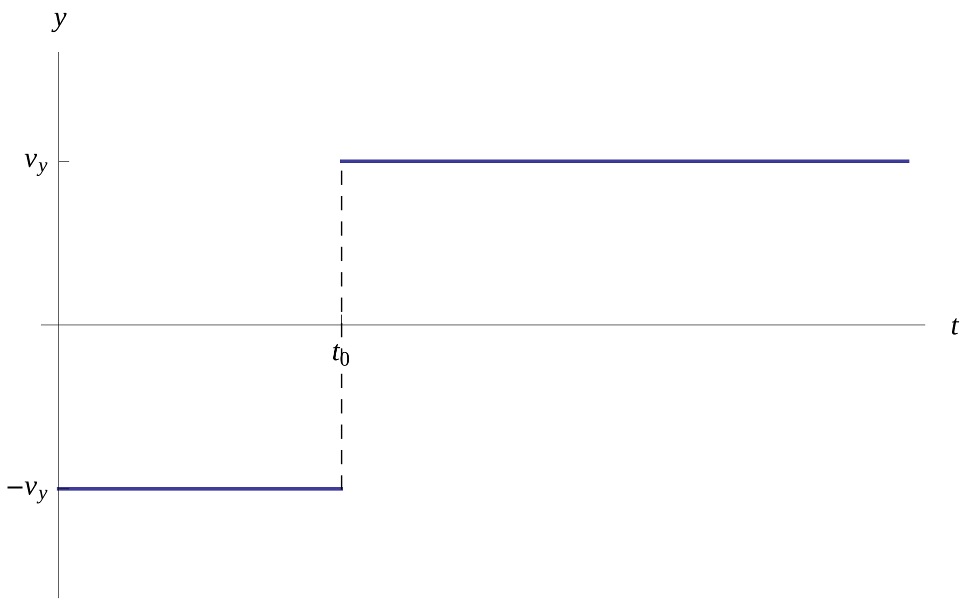

Figura 3: Grafico della funzione $\dot{y}(t)$ (cfr. eq. 9)

Ma $t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{1x}}$, onde:

$$\mathbf{F}\left(y\right) = m v_{1x} v_{1y} \left[\delta\left(y - y_0\right) - \delta\left(y_0 - y\right)\right] \mathbf{j} \tag{12}$$

Qui abbiamo utilizzato una nota proprietà della delta di Dirac:

$$\delta\left(ax\right) = \frac{1}{a}\delta\left(x\right)$$

La (12) è un'espressione formale che tuttavia ci dice che la forza $\mathbf{F}\left(y\right)$ agente sulla particella è posizionale e come tale, derivante da un'energia potenziale tale che:

$$\mathbf{F}\left(y\right) = -\frac{dV\left(y\right)}{dy}\mathbf{j}$$

da cui:

$$\frac{dV\left(y\right)}{dy} = -m v_{1x} v_{1y} \left[\delta\left(y - y_0\right) - \delta\left(y_0 - y\right)\right]$$

In forza della (10):

$$V\left(y\right) = V_0 \left[\theta\left(y_0 - y\right) - \theta\left(y - y_0\right)\right], \tag{13}$$

dove $V_0 > 0$ è una costante con le dimensioni di un'energia. Ne concludiamo che la particella si muove in una regione in cui è definito un campo di forze di energia potenziale (13). Il campo scalare (13) è denominato *campo di Heaviside*, il cui grafico è riportato in fig. 4.

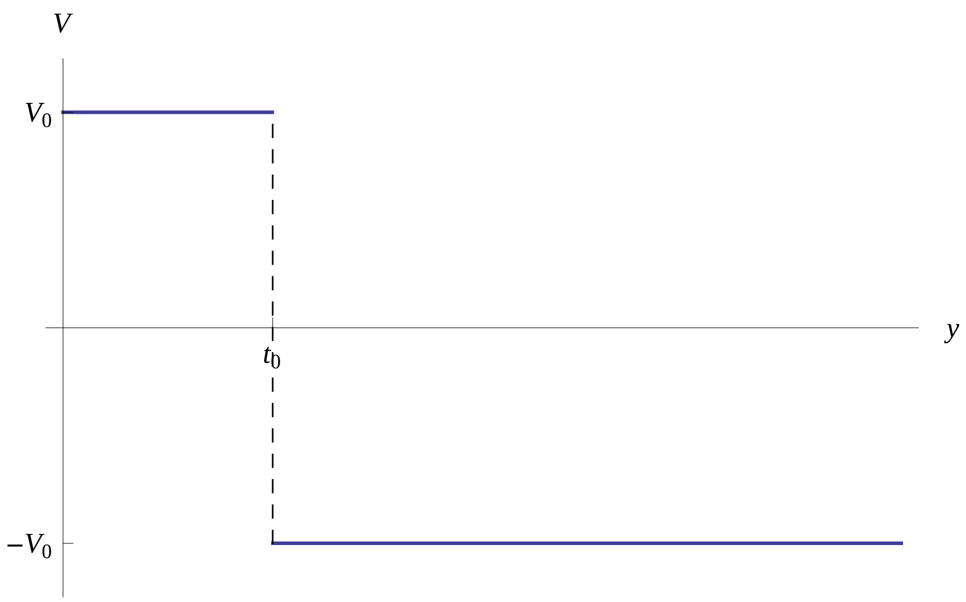

Figura 4: Grafico del potenziale di Heaviside.