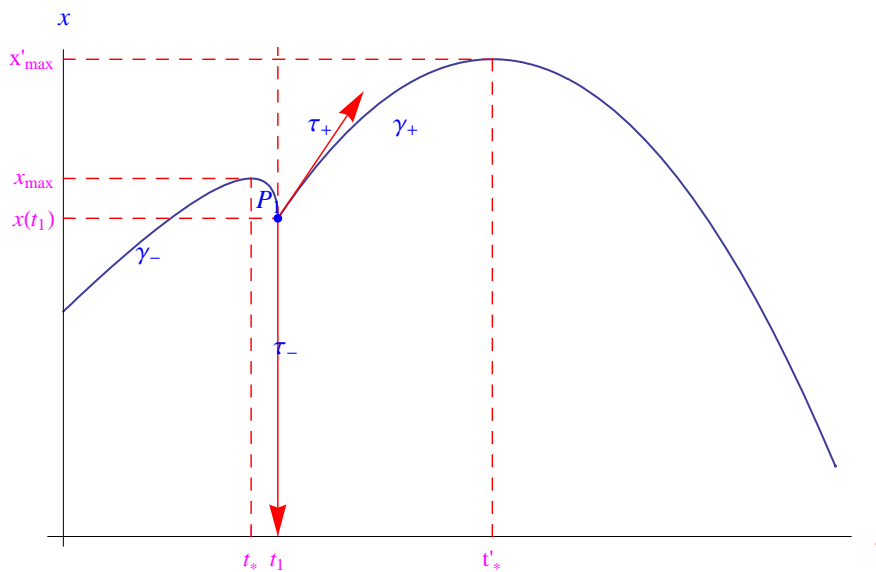


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Applicazioni del Calcolo differenziale alla cinematica monodimensionale

Marcello Colozzo



Indice

1	Moto asintoticamente uniforme	2
2	Estremi relativi della funzione $v(t)$	8
3	Istanti di arresto	11
4	Punti di flesso a tangente obliqua	18
5	Punti di flesso a tangente verticale	21
6	Punti angolosi	25
7	Punti cuspidali	29
8	Esercizi svolti	33

1 Moto asintoticamente uniforme

Consideriamo un punto materiale che si muove sull'asse x , con velocità scalare rappresentata da una funzione $v(t)$ convergente per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (1)$$

escludendo il caso banale

$$v(t) = v_\infty, \quad \forall t$$

che rappresenta un moto rettilineo ed uniforme. È chiaro che il diagramma della funzione $v(t)$ presenta un asintoto orizzontale, come mostrato in fig. 1 dove – senza perdita di generalità – abbiamo assunto $v_\infty > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty^-$.

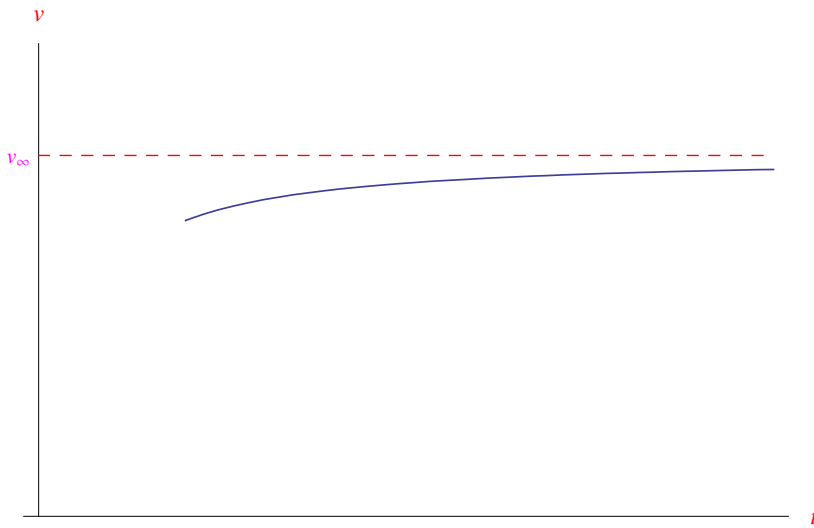


Figura 1: Andamento della funzione $v(t)$ che verifica l'operazione di passaggio al limite (1).

A sua volta la (1) implica che il diagramma orario i.e. il grafico della funzione $x(t)$ essendo x l'ascissa del punto materiale, *potrebbe avere* un asintoto obliquo. Infatti, dal Calcolo sappiamo che il coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo del grafico di $x(t)$ è

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t}$$

Per il teorema della permanenza del segno la funzione $v(t)$ è definitivamente positiva intorno a $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty > 0 \implies \exists I_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty) \mid t \in (\delta, +\infty) \implies v(t) > 0,$$

e dal momento che $v(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, si ha che la funzione $x(t)$ è strettamente crescente intorno a $+\infty$, onde è divergente positivamente per $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty$$

Tuttavia affinché ci sia un asintoto obliquo deve essere verificata la condizione ulteriore:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - mt] = n \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

che definisce l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo. In entrambi i casi $|n| < +\infty$ e $|n| = +\infty$, la (1) è condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia *asintoticamente uniforme*. Più precisamente, se $|n| = +\infty$ il diagramma orario è comunque *linearizzato* in un intorno di $+\infty$ nel senso che per $t \gg 1$ la $x(t)$ è approssimata da una funzione lineare, come mostrato in fig. 2.

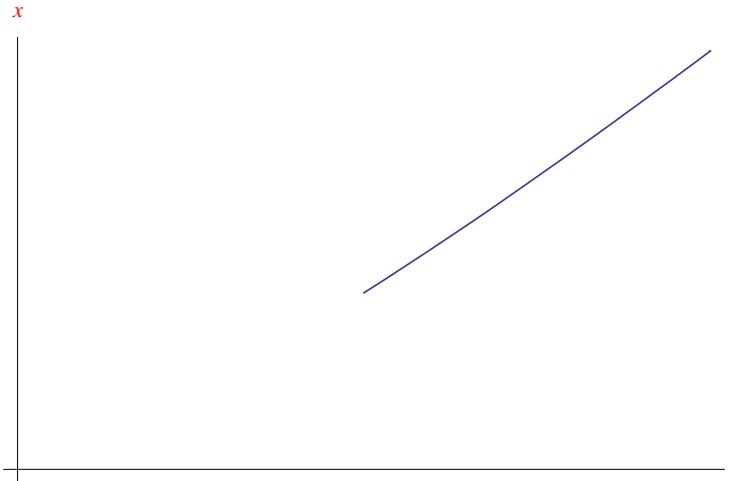


Figura 2: Andamento della funzione $x(t)$ (in un intorno di $+\infty$) la cui derivata (velocità) restituisce una funzione convergente all'infinito. Il diagramma è privo di asintoto obliquo, ma è comunque linearizzato.

Per rendere più chiari i concetti appena esposti, consideriamo la funzione velocità:

$$v(t) = v_0 \left[1 + \arctan \left(\frac{t}{\tau} \right) \right], \quad (3)$$

dove $v_0 > 0$ è una costante con le dimensioni di una velocità, mentre $\tau > 0$ è un'altra costante con le dimensioni di un tempo. Il suo scopo è quello di rendere adimensionale l'argomento dell'arcotangente. Osserviamo innanzitutto che $v(0) = v_0$, cioè la costante v_0 è la velocità iniziale del punto materiale.

Studiamo il comportamento all'infinito, calcolando il limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_0 \left[1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{t}{\tau} \right) \right]$$

Ma

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{t}{\tau} \right) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^-,$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_\infty^-,$$

avendo definito

$$v_\infty = v_0 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

Studiamo la monotonia della funzione, calcolando la derivata prima i.e. l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{v_0\tau}{t^2 + \tau^2} \quad (5)$$

Segue

$$a(t) > 0, \quad \forall t \quad (6)$$

Quindi $v(t)$ è strettamente crescente. In fig. 3 riportiamo il suo grafico, mentre la fig. 4 illustra l'andamento dell'accelerazione in funzione del tempo.

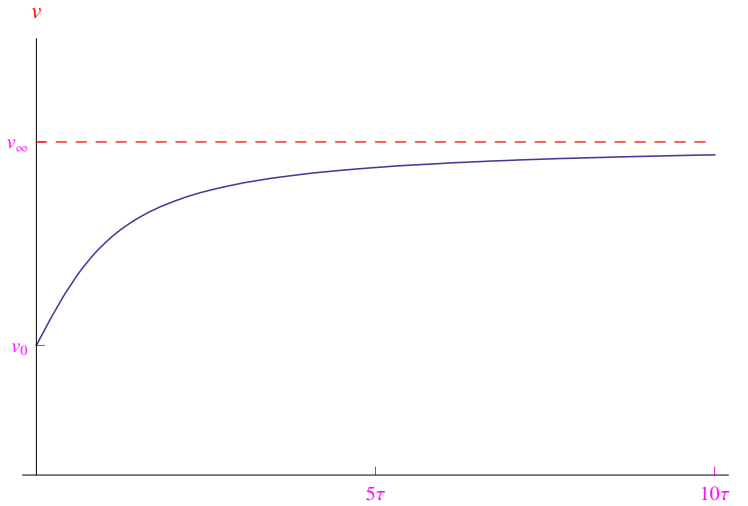


Figura 3: Andamento della funzione $v(t)$ data dalla (3).

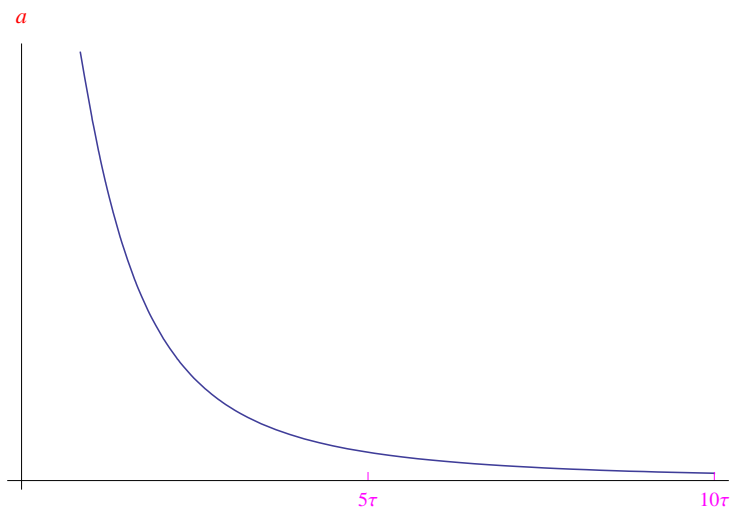


Figura 4: Andamento della funzione $a(t)$ data dalla (5).

Determiniamo l'equazione oraria dalla

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \implies x(t) = \int v(t) dt$$

Cioè

$$x(t) = v_0 \int \left[1 + \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] dt = v_0 \left[1 + \int \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) dt \right] \quad (7)$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = t \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) - \int t \cdot \frac{1}{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \frac{dt}{\tau} \\
 &= t \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) - \tau \int \frac{t dt}{\tau^2 + t^2} \\
 &= t \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) - \frac{\tau}{2} \int \frac{d(\tau^2 + t^2)}{\tau^2 + t^2} \\
 &= t \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) - \frac{\tau}{2} \ln(\tau^2 + t^2) + C,
 \end{aligned}$$

essendo C una costante di integrazione. D'altra parte

$$\ln(\tau^2 + t^2) = \ln \left\{ \tau^2 \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] \right\} = 2 \ln \tau + \ln \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right],$$

per cui possiamo incorporare nella costante di integrazione il termine $2 \ln \tau$:

$$I(t) = t \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) - \frac{\tau}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] + C_1, \tag{8}$$

con $C_1 = C - \tau \ln \tau$ nuova costante di integrazione. Sostituendo la (8) nella (7):

$$x(t) = v_0 t \left[1 + \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] - \frac{v_0 \tau}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] + C_2,$$

essendo $C_2 = v_0 C_1$, il cui valore è determinato dalla condizione iniziale $x(0)$. Supponiamo

$$x(0) = 0,$$

si ha $C_2 = 0$, onde l'equazione oraria è

$$x(t) = v_0 t \left[1 + \arctan\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] - \frac{v_0 \tau}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \right] \tag{9}$$

Per completare lo studio di funzione conviene adimensionalizzare le variabili. Iniziamo con la variabile indipendente, ponendo

$$\xi = \frac{t}{\tau},$$

per cui

$$x[t(\xi)] = v_0 \tau \xi (1 + \arctan \xi) - \frac{v_0 \tau}{2} \ln(1 + \xi^2)$$

La variabile dipendente, ovvero la $x(t)$ si adimensionalizza definendo

$$f(\xi) \stackrel{def}{=} \frac{x[t(\xi)]}{v_0 \tau} = \xi (1 + \arctan \xi) - \frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2) \tag{10}$$

Studiamo tale funzione nell'intervallo illimitato $[0, +\infty)$, iniziando dal comportamento all'infinito:

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = \infty - \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, scriviamo

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left\{ \xi (1 + \arctan \xi) \left[1 - \frac{\ln(1 + \xi^2)}{2\xi(1 + \arctan \xi)} \right] \right\},$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \xi^2)}{2\xi(1 + \arctan \xi)} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \xi^2)}{\xi}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \arctan \xi}}_{=\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2+\pi}} = 0,$$

per cui

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty \quad (11)$$

Ricerchiamo un eventuale asintoto obliquo:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[1 + \arctan \xi - \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + \xi^2)}{\xi} \right] = \\ &= 1 + \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \arctan \xi}_{=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \xi^2)}{\xi}}_{=0}, \end{aligned}$$

onde

$$m = 1 + \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

Calcoliamo l'ordinata all'origine dell'asintoto:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} [f(\xi) - m\xi] = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[\xi \left(\arctan \xi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + \xi^2) \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi \left(\arctan \xi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \ln(1 + \xi^2) \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi \left(\arctan \xi - \frac{\pi}{2} \right) &= 0 \cdot \infty = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \xi - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\xi}} \\ &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} - \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} = -1 \end{aligned}$$

L'altro limite è manifestamente $+\infty$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \ln(1 + \xi^2) = +\infty,$$

per cui

$$n = -1 - \frac{1}{2} (+\infty) = -\infty$$

Ne consegue che non esiste asintoto obliquo. La funzione $x(t)$ e quindi, la $f(\xi)$, è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ in quanto è $v(t) > 0, \forall t \in [0, +\infty)$. Inoltre, dalla (6) segue che il grafico è concavo verso l'alto. L'andamento completo è riportato in fig. 5.

Concludiamo riportando i tre grafici (posizione, velocità, accelerazione) in fig. 6



Figura 5: Andamento dell'ascissa x normalizzata su $v_0\tau$ in funzione della variabile adimensionale $\xi = t/\tau$.

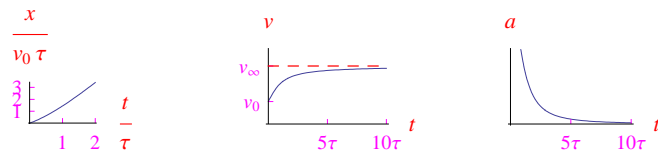


Figura 6: Andamento dell'ascissa $x(t)$, della sua derivata prima ($v(t)$) e della derivata seconda ($a(t)$).

2 Estremi relativi della funzione $v(t)$

Nel numero precedente la funzione $v(t)$ è priva di punti estremali, risultando strettamente crescente. Consideriamo ora il caso in cui $v(t)$ presenta un massimo relativo. Più specificatamente:

$$\exists t_{\max} \in (0, +\infty) \mid t_{\max} \text{ è punto di massimo relativo proprio} \quad (13)$$

Ciò implica:

$$\exists I_{\delta}(t_{\max}) = (t_{\max} - \delta, t_{\max} + \delta) \mid \begin{cases} v(t) \text{ è strettamente crescente in } (t_{\max} - \delta, t_{\max}) \\ v(t) \text{ è strettamente decrescente in } (t_{\max}, t_{\max} + \delta) \end{cases} \quad (14)$$

La fig. 7 mostra un esempio tipico.

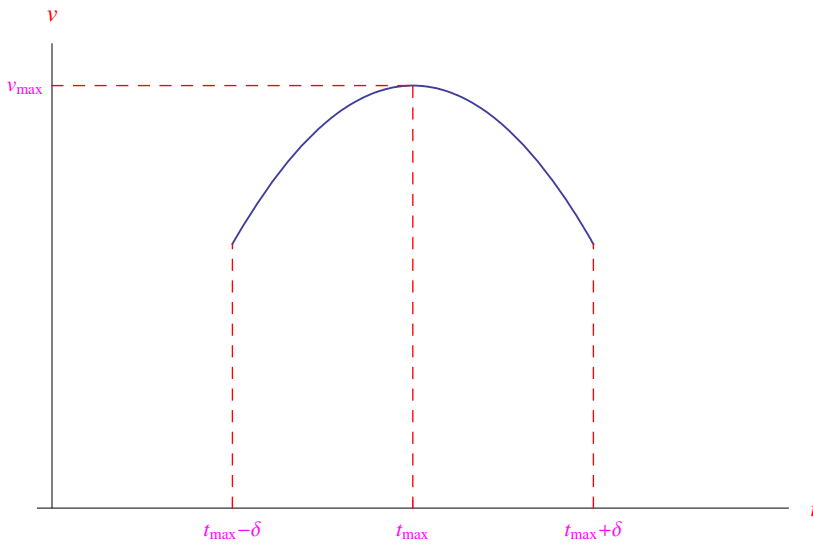


Figura 7: L'istante $t_{\max} \in (0, +\infty)$ è punto di massimo relativo proprio per la funzione $v(t)$.

La monotonia (locale) della funzione $v(t)$ espressa dalla (14) si traduce nel seguente andamento del segno dell'accelerazione $a(t)$, giacchè $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &> 0, \quad \forall t \in (t_{\max} - \delta, t_{\max}) \\ a(t) &< 0, \quad \forall t \in (t_{\max}, t_{\max} + \delta), \end{aligned}$$

avendosi

$$a(t_{\max}) = 0$$

Cinematicamente, il moto risulta essere accelerato in $(t_{\max} - \delta, t_{\max})$ e ritardato, i.e. decelerato in $(t_{\max}, t_{\max} + \delta)$. Un possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ è riportato in fig. 8. Si noti che non è detto che $a(t)$ sia lineare: il grafico della predetta figura mostra esclusivamente l'andamento qualitativo.

Per quanto riguarda il diagramma orario, dobbiamo tener conto del fatto che il moto è accelerato nell'intervallo di tempo $(t_{\max} - \delta, t_{\max})$, e decelerato in $(t_{\max}, t_{\max} + \delta)$. Tuttavia l'informazione più importante proviene dal segno (locale) della funzione $v(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) > 0, \quad \forall t \in I_{\delta}(t_{\max}) = (t_{\max} - \delta, t_{\max} + \delta),$$

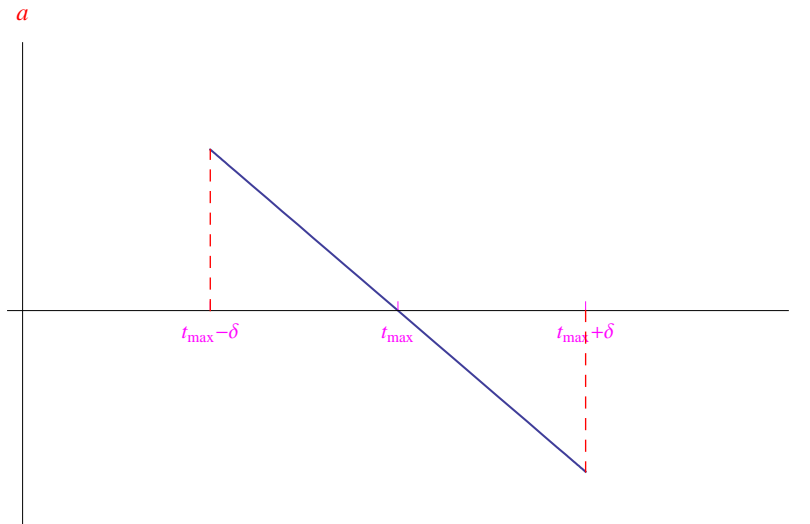


Figura 8: Possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ che esprime l'accelerazione in funzione del tempo, corrispondente a una velocità del tipo di fig. 7 .

per cui $x(t)$ è strettamente crescente in $I_\delta(t)$. Inoltre

$$\begin{cases} a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ a(t_{\max}) = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

onde t_{\max} è un punto di flesso per il diagramma orario. Più precisamente, un punto di flesso a tratto (ascendente), giacchè

$$v(t_{\max}) = \left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=t_{\max}} > 0 \quad (16)$$

Un possibile andamento è illustrato in fig. 9.

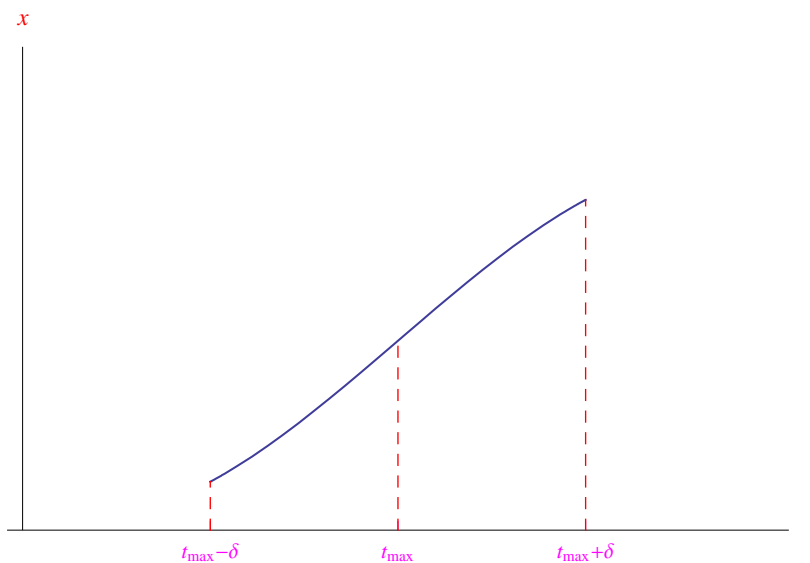


Figura 9: Possibile andamento (locale) del diagramma orario corrispondente a una velocità del tipo di fig. 7 .

Osservazione 1 Abbiamo considerato il caso di $v(t)$ dotata di un punto di massimo relativo proprio in t_{\max} . Tuttavia, come è noto dal Calcolo, esistono punti di estremo relativo in senso improprio. Nel caso di un massimo relativo improprio, si ha:

$$\exists I_\delta(t) \mid t \in I_\delta(t) - \{t_{\max}\} \implies v(t) \leq v(t_{\max}) \quad (17)$$

Ciò si verifica ad esempio, se il grafico della funzione ha un andamento oscillante in ogni intorno di t_{\max} .

A conclusioni analoghe si perviene nel caso di un punto di minimo relativo (in senso proprio). Più precisamente:

$$\exists t_{\min} \in (0, +\infty) \mid t_{\min} \text{ è punto di minimo relativo proprio} \quad (18)$$

Ciò implica:

$$\exists I_\delta(t_{\min}) = (t_{\min} - \delta, t_{\min} + \delta) \mid \begin{cases} v(t) \text{ è strettamente decrescente in } (t_{\min} - \delta, t_{\min}) \\ v(t) \text{ è strettamente crescente in } (t_{\min}, t_{\min} + \delta) \end{cases} \quad (19)$$

La fig. 10 mostra un esempio tipico.

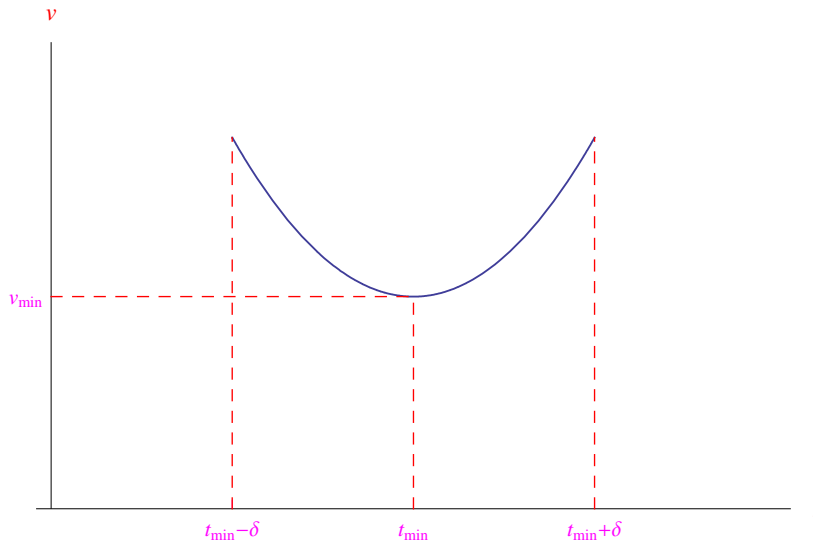


Figura 10: L'istante $t_{\min} \in (0, +\infty)$ è punto di minimo relativo proprio per la funzione $v(t)$.

La monotonia (locale) della funzione $v(t)$ espressa dalla (19) si traduce nel seguente andamento del segno dell'accelerazione $a(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &< 0, \quad \forall t \in (t_{\min} - \delta, t_{\min}) \\ a(t) &> 0, \quad \forall t \in (t_{\min}, t_{\min} + \delta), \end{aligned}$$

avendosi

$$a(t_{\min}) = 0$$

Cinematicamente, il moto risulta essere decelerato in $(t_{\min} - \delta, t_{\min})$ e accelerato in $(t_{\min}, t_{\min} + \delta)$. Un possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ è riportato in fig. 11. Si noti che non è detto che $a(t)$ sia lineare: il grafico della predetta figura mostra esclusivamente l'andamento qualitativo.

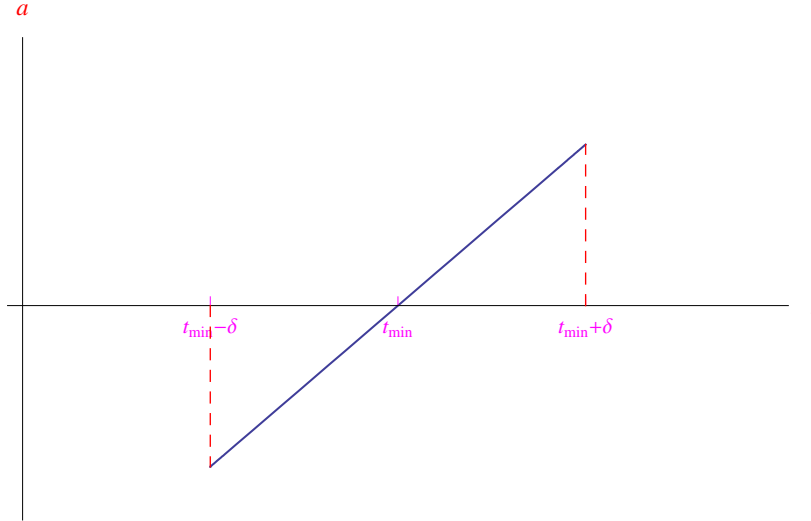


Figura 11: Possibile andamento (locale) della funzione $a(t)$ che esprime l'accelerazione in funzione del tempo, corrispondente a una velocità del tipo di fig. 10 .

Per quanto riguarda il diagramma orario, dobbiamo tener conto del fatto che il moto è decelerato nell'intervallo di tempo $(t_{\min} - \delta, t_{\min})$, e accelerato in $(t_{\min}, t_{\min} + \delta)$. Tuttavia l'informazione più importante proviene dal segno (locale) della funzione $v(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) > 0, \quad \forall t \in I_\delta(t_{\min}) = (t_{\min} - \delta, t_{\min} + \delta),$$

per cui $x(t)$ è strettamente crescente in $I_\delta(t)$. Inoltre

$$\begin{cases} a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ a(t_{\min}) = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

onde t_{\min} è un punto di flesso per il diagramma orario. Più precisamente, un punto di flesso a tratto (ascendente), giacché

$$v(t_{\min}) = \left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=t_{\min}} > 0 \quad (21)$$

Un possibile andamento è illustrato in fig. 12. Rileviamo un comportamento simile del diagramma orario al caso in cui si ha un punto di massimo relativo per la velocità. La differenza risiede nel diverso andamento della concavità del diagramma orario, giacché le due fasi, accelerata e decelerata, sono invertite.

3 Istanti di arresto

Esaminiamo ora il caso in cui la velocità $v(t)$ si annulla in un dato istante:

$$\exists t_* \in (0, +\infty) \mid v(t_*) = 0 \quad (22)$$

Dal momento che $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, si ha che gli zeri di $v(t)$ sono i punti critici (o *estremali*) della funzione $x(t)$ che esprime l'equazione oraria del moto.

Consideriamo l'esempio seguente:

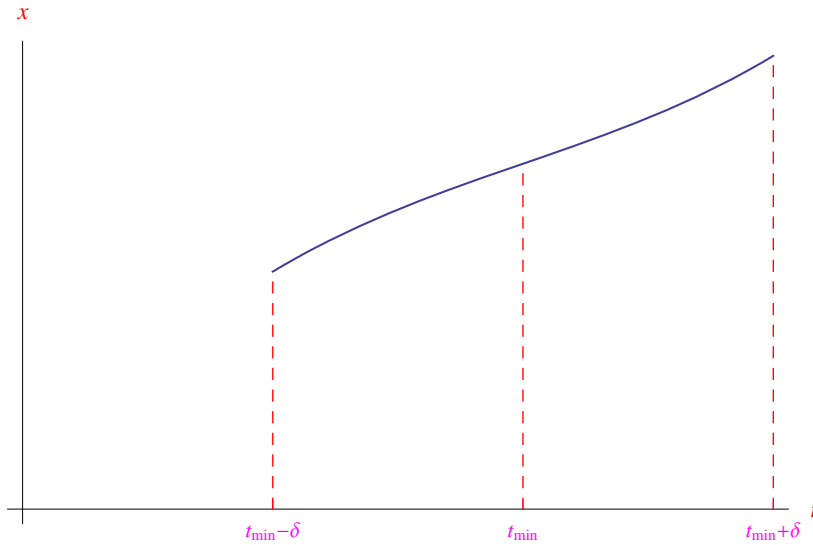


Figura 12: Possibile andamento (locale) del diagramma orario corrispondente a una velocità del tipo di fig. 10 .

Esempio 2 La velocità scalare di una particella che si muove lungo l'asse x è (in unità adimensionali)

$$v(t) = -t^3 + 3t - 2 \quad (23)$$

Studiamo gli eventuali istanti di arresto in $[0, +\infty)$ assumendo $x(0) = 0$. Riducendo in fattori il secondo membro della (23):

$$v(t) = -(t+2)(t-1),$$

da cui $t = -2$ e $t = 1$. Ma siamo interessati a $t \in [0, +\infty)$, per cui l'unico istante di arresto è

$$t_* = 1 \quad (24)$$

La più generale primitiva della (23) è

$$x(t) = \int v(t) dt = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^3 - 2t + C,$$

ove C è una costante di integrazione. L'esercizio dice che deve essere $x(0) = 0$, per cui $C = 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^3 - 2t, \quad (25)$$

la cui derivata seconda, cioè l'accelerazione è

$$a(t) = -3(t^2 - 1), \quad (26)$$

che si annulla in $t = \pm 1$, e scartando la radice negativa si ha $t = 1$. Ne consegue che l'istante di arresto t_* è un punto di flesso per il diagramma orario. Riguardo alla sua concavità, rileviamo che

$$\begin{aligned} t \in (0, 1) &\implies a(t) > 0 \\ t \in (1, +\infty) &\implies a(t) < 0 \end{aligned}$$

Cioè il diagramma orario volge la concavità verso l'alto per $t \in (0, 1)$, mentre per $t \in (1, +\infty)$ volge la concavità verso il basso. Studiamo ora il segno di $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) = -(t+2)(t-1)^2 > 0 &\iff t \neq 1, \quad -(t+2) > 0 \\ &\iff t \neq 1, \quad t < -2 \end{aligned}$$

Ma è $t \geq 0$ per cui escludendo lo zero $t = 1$ riesce $v(t) < 0$. Ciò implica che $x(t)$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$. Cinematicamente, $v(t) < 0$ significa che la particella si muove nel verso negativo dell'asse x . Studiamo ora il segno della funzione $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) \geq 0 &\iff -t^4 + 6t^2 - 8t \geq 0 \\ &\iff t^4 - 6t^2 + 8t \leq 0 \\ &\iff t(t^3 - 6t + 8) \leq 0 \end{aligned}$$

Il trinomio $t^3 - 6t + 8$ non si scompone in fattori. Con Mathematica vediamo che riesce

$$t^3 - 6t + 8 > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

per cui

$$\nexists t \in (0, +\infty) \mid t(t^3 - 6t + 8) \leq 0,$$

onde

$$t \in [0, +\infty) \implies x(t) \geq 0 \tag{27}$$

Precisamente

$$x(0) = 0, \quad x(t) > 0, \quad \forall t \in (0, +\infty) \tag{28}$$

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma orario (fig. 13). Notiamo che $\dot{x}(0) = -2$, cioè il diagramma “parte” da $(0, 0)$ con tangente di coefficiente angolare -2 .

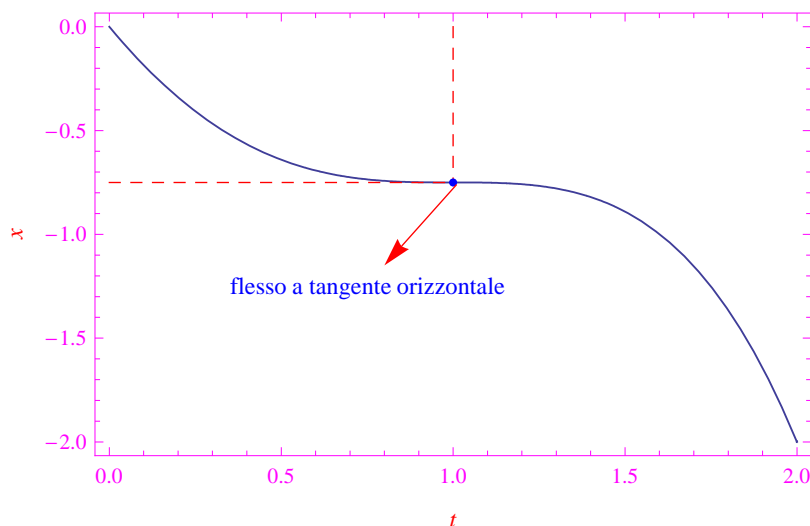


Figura 13: Diagramma orario della particella dell'esempio 2.

L'interpretazione cinematica del punto di flesso a tangente orizzontale è la seguente: l'istante $t_* = 1$ è un istante di arresto senza inversione del moto.

Concludiamo l'esercizio riportando nelle figg. 14-15 i grafici della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo.

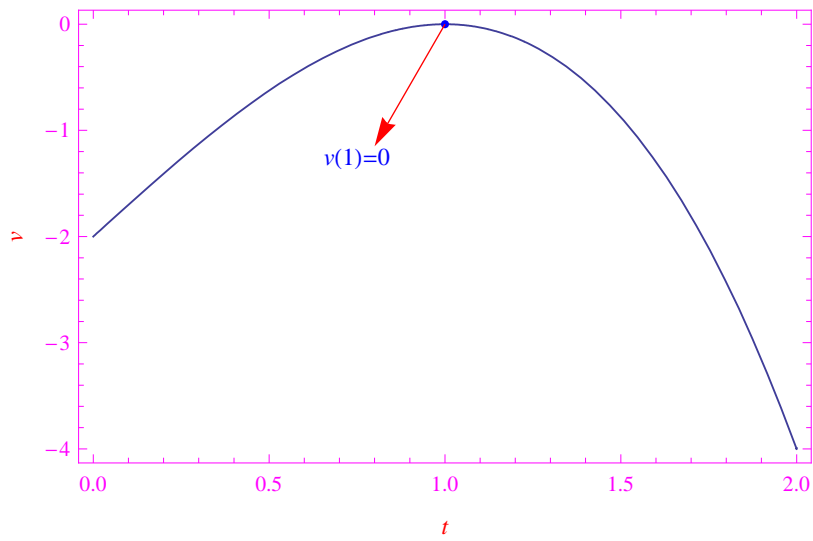


Figura 14: Velocità della particella dell'esempio 2.

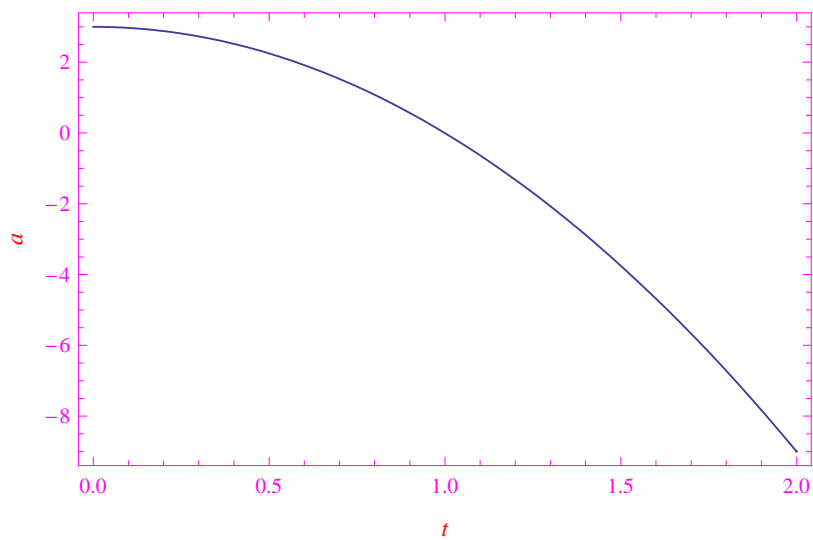


Figura 15: Accelerazione della particella dell'esempio 2.

Gli istanti di arresto con inversione del moto sono i punti di estremo relativo della funzione $x(t)$. Cioè se t_* è un tale istante, dovrà aversi:

$$v(t_*) = 0, \quad a(t_*) \neq 0$$

Più precisamente:

$$v(t_*) = 0, \quad a(t_*) < 0 \quad \text{oppure} \quad v(t_*) = 0, \quad a(t_*) > 0 \quad (29)$$

Nel primo caso t_* è un punto di massimo relativo: la particella raggiunge l'ascissa $x_{\max} = x(t_*)$ e ivi si arresta per invertire il proprio moto che da progressivo (i.e. verso delle x crescenti) diviene regressivo (o *retrogrado*, i.e. verso delle x decrescenti). Il seguente esercizio svolto illustra il caso di punto di massimo relativo:

Esercizio 3 *La velocità scalare di una particella che si muove lungo l'asse x è (in unità adimensionali)*

$$v(t) = 1 - t^3 \quad (30)$$

Studiare gli eventuali istanti di arresto in $[0, +\infty)$ assumendo $x(0) = 0$.

Soluzione

Abbiamo

$$x(t) = \int (1 - t^3) dt = t - \frac{1}{4}t^4 + C,$$

essendo C una costante di integrazione. Il testo dell'esercizio dice che deve essere $x(0) = 0$:

$$x(0) = 0 \implies C = 0$$

Quindi

$$x(t) = t - \frac{1}{4}t^4 \quad (31)$$

Gli zeri della funzione $v(t)$ sono:

$$v(t) = 0 \iff 1 - t^3 = 0 \iff t = 1 \equiv t_*,$$

cioè un unico zero $t_* = 1$. Lo studio del segno di $v(t)$ è immediato:

$$\begin{aligned} t \in [0, 1) &\implies v(t) > 0 \\ t \in (1, +\infty) &\implies v(t) < 0, \end{aligned}$$

cosicché la funzione $x(t)$ è strettamente crescente in $[0, 1)$ e strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Ne consegue che $t_* = 1$ è punto di massimo relativo per $x(t)$. Quindi la particella parte a $t = 0$ dall'origine delle ascisse ($x(0) = 0$), raggiunge la massima ascissa $x(1) = 3/4$ per invertire il moto. Ci aspettiamo, perciò, uno zero non banale della funzione $x(t)$. Infatti:

$$t - \frac{1}{4}t^4 = 0 \iff t = 0, \quad t = \sqrt[3]{4}$$

Scartando la radice $t = 0$, abbiamo lo zero di $x(t)$:

$$t_1 = \sqrt[3]{4} \quad (32)$$

Risulta manifestamente:

$$t \in [0, \sqrt[3]{4}) \implies x(t) > 0$$

$$t \in (\sqrt[3]{4}, +\infty) \implies x(t) < 0$$

L'accelerazione della particella, ovvero la derivata seconda della $x(t)$ è:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -3t^2 < 0, \quad \forall t,$$

per cui il diagramma orario volge sempre la concavità verso il basso. Ciò implica ovviamente l'assenza di punti di flesso. Siamo ora in grado di tracciare il diagramma orario (fig. 16). Ne concludiamo che la particella parte all'istante iniziale $t = 0$ da $x = 0$ alla velocità $v(0) = 1$, decelerando per fermarsi al punto di ascissa $x_{\max} = 3/4$ al tempo $t_* = 1$, in cui inverte il moto transitando per l'origine nell'istante $t_1 = \sqrt[3]{4}$ e quindi proseguire verso $-\infty$, come mostrato in fig. 17.

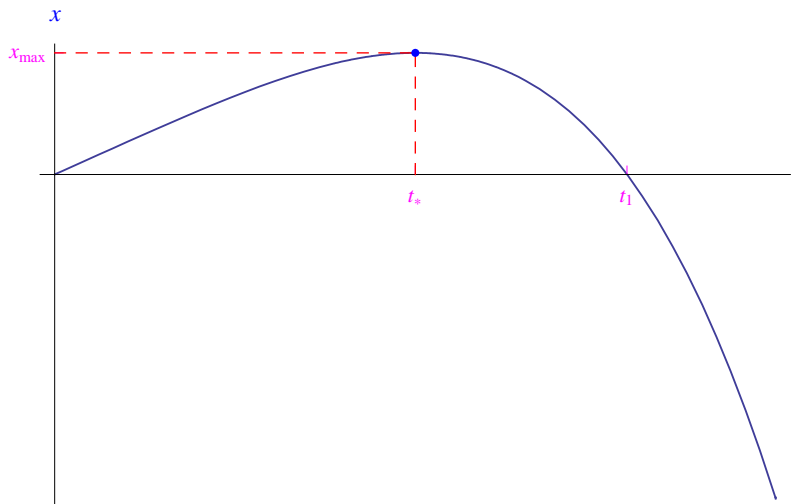


Figura 16: Diagramma orario della particella dell'esercizio 3.

L'esercizio seguente illustra il caso opposto a quello dell'esercizio appena svolto, cioè l'esistenza di un punto di minimo relativo della funzione $x(t)$:

Esercizio 4 *La velocità scalare di una particella che si muove lungo l'asse x è (in unità adimensionali)*

$$v(t) = t^3 - 1 \tag{33}$$

Studiare gli eventuali istanti di arresto in $[0, +\infty)$ assumendo $x(0) = 0$.

Soluzione

Abbiamo

$$x(t) = \int (t^3 - 1) dt = \frac{1}{4}t^4 - t + C,$$

essendo C una costante di integrazione. Il testo dell'esercizio dice che deve essere $x(0) = 0$:

$$x(0) = 0 \implies C = 0$$

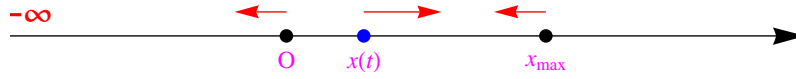


Figura 17: Esercizio 3. La particella parte all'istante iniziale $t = 0$ da $x = 0$, decelerando per fermarsi al punto di ascissa $x_{\max} = 3/4$ al tempo $t_* = 1$, in cui inverte il moto transitando per l'origine nell'istante $t_1 = \sqrt[3]{4}$ e quindi prosegue verso $-\infty$.

Quindi

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - t \quad (34)$$

Gli zeri della funzione $v(t)$ sono:

$$v(t) = 0 \iff t^3 - 1 = 0 \iff t = 1 \equiv t_*,$$

cioè un unico zero $t_* = 1$. Lo studio del segno di $v(t)$ è immediato:

$$\begin{aligned} t \in [0, 1) &\implies v(t) < 0 \\ t \in (1, +\infty) &\implies v(t) > 0, \end{aligned}$$

cosicchè la funzione $x(t)$ è strettamente decrescente in $[0, 1)$ e strettamente crescente in $(1, +\infty)$. Ne consegue che $t_* = 1$ è punto di minimo relativo per $x(t)$. Quindi la particella parte a $t = 0$ dall'origine delle ascisse ($x(0) = 0$), raggiunge la massima ascissa $x(1) = -3/4$ per invertire il moto. Ci aspettiamo, perciò, uno zero non banale della funzione $x(t)$. Infatti:

$$\frac{1}{4}t^4 - t = 0 \iff t = 0, t = \sqrt[3]{4}$$

Scartando la radice $t = 0$, abbiamo lo zero di $x(t)$:

$$t_1 = \sqrt[3]{4} \quad (35)$$

Risulta manifestamente:

$$\begin{aligned} t \in [0, \sqrt[3]{4}) &\implies x(t) < 0 \\ t \in (\sqrt[3]{4}, +\infty) &\implies x(t) > 0 \end{aligned}$$

L'accelerazione della particella, ovvero la derivata seconda della $x(t)$ è:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = 3t^2 > 0, \quad \forall t,$$

per cui il diagramma orario volge sempre la concavità verso l'alto. Ciò implica ovviamente l'assenza di punti di flesso. Siamo ora in grado di tracciare il diagramma orario (fig. ??). Ne concludiamo che la particella parte all'istante iniziale $t = 0$ da $x = 0$ alla velocità $v(0) = -1$, per fermarsi al punto di ascissa $x_{\min} = -3/4$ al tempo $t_* = 1$, in cui inverte il moto transitando per l'origine nell'istante $t_1 = \sqrt[3]{4}$ e quindi proseguire verso $+\infty$.

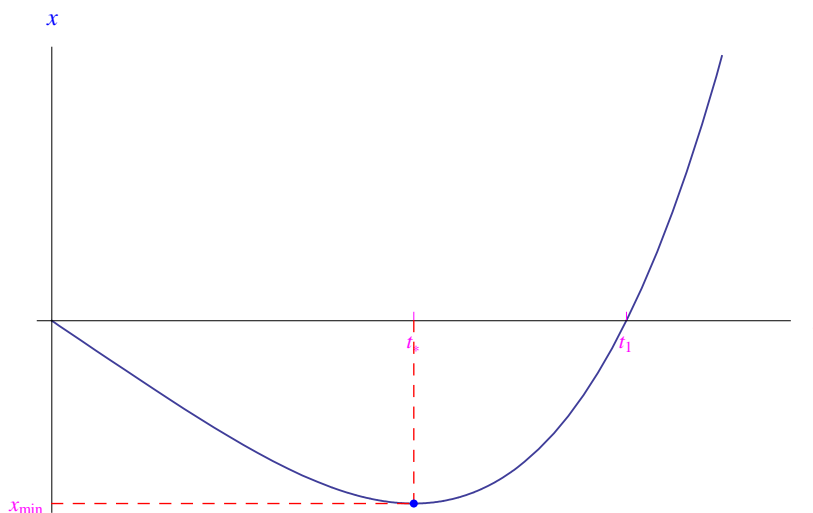


Figura 18: Diagramma orario della particella dell'esercizio 4.

4 Punti di flesso a tangente obliqua

Esaminiamo ora gli istanti di tempo che sono punti di flesso a tangente obliqua per il diagramma orario. Come è noto dal Calcolo¹:

$$\exists t_* \in (0, +\infty) \mid \left. \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right|_{t=t_*} = 0 \quad (36)$$

Quindi in t_* deve annullarsi l'accelerazione, mentre la velocità:

$$v(t_*) \neq 0, \quad (37)$$

giacché nel caso contrario abbiamo un flesso a tangente orizzontale (già esaminato nel paragrafo 3). Dalla (37) segue che i casi possibili sono:

$$\begin{aligned} v(t_*) > 0 & \quad (\text{flesso ascendente}) \\ v(t_*) < 0 & \quad (\text{flesso discendente}) \end{aligned} \quad (38)$$

Lo svolgimento del seguente esercizio illustra quanto appena asserito.

Esercizio 5 Studiare il moto unidimensionale di equazione oraria:

$$x(t) = -t^4 + 2t^3 + t^2 + t, \quad (t \geq 0) \quad (39)$$

¹Rammentiamo che la (36) esprime una condizione necessaria ma non sufficiente affinché t_* sia punto di flesso. Per la sufficienza occorre lo studio della derivata terza che qui omettiamo.

Soluzione**Zeri di $x(t)$**

Riesce

$$x(0) = 0,$$

cioè il diagramma orario passa per l'origine del sistema di assi tx . Cinematicamente, significa che la particella occupa a $t = 0$ la posizione $x = 0$. Risolviamo

$$x(t) = 0 \iff t(t^3 - 2t^2 - t - 1) = 0$$

Scartando la radice $t = 0$ già trovata in precedenza, determiniamo le radici dell'equazione

$$t^3 - 2t^2 - t - 1 = 0$$

Tale equazione ha una sola radice reale:

$$t_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{61 - 9\sqrt{29}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{61 + 9\sqrt{29}}{2}} \right) \simeq 2.55 \quad (40)$$

Ciò implica che la particella ripassa per l'origine al tempo t_1 .

Velocità scalare

Derivando la funzione (39):

$$v(t) = -4t^3 + 6t^2 + 2t + 1, \quad (41)$$

i cui zeri sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$4t^3 - 6t^2 - 2t - 1 = 0$$

Precisamente, abbiamo una sola radice reale:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \left(\sqrt[3]{648 - 24\sqrt{354}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{27 + \sqrt{354}}{9}} \right) \simeq 1.844, \quad (42)$$

che è un punto estremale per la funzione $x(t)$.

Monotonia di $v(t)$

Studiamo il segno della derivata prima, ossia della funzione (41):

$$v(t) > 0 \iff 4t^3 - 6t^2 - 2t - 1 < 0 \quad (43)$$

Con l'ausilio di *Mathematica*, otteniamo:

$$\begin{aligned} t \in [0, \tau_1) &\implies v(t) > 0 \\ t \in (\tau_1, +\infty) &\implies v(t) < 0 \end{aligned}$$

Cioè $x(t)$ è strettamente crescente in $[0, \tau_1)$ e strettamente decrescente in $(\tau_1, +\infty)$. Ne consegue che τ_1 è punto di massimo relativo per $x(t)$:

$$x_{\max} = x(\tau_1) \simeq 6.22 \quad (44)$$

Accelerazione scalare

Abbiamo

$$a(t) = \dot{v}(t) = -2(6t^2 - 6t - 1) \quad (45)$$

La ricerca degli zeri è immediata:

$$a(t) = 0 \iff 6t^2 - 6t - 1 = 0 \iff t = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{6}$$

Scartando la radice negativa

$$t_* = \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \simeq 1.14 \quad (46)$$

Il segno della funzione $a(t)$ è:

$$a(t) > 0 \iff 6t^2 - 6t - 1 < 0 \iff t \in \left(\frac{3 - \sqrt{15}}{6}, \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \right)$$

Dal momento che siamo interessati a istanti di tempo ≥ 0 :

$$t \in \left(0, \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \right) \implies a(t) > 0$$

$$t \in \left(\frac{3 + \sqrt{15}}{6}, +\infty \right) \implies a(t) < 0$$

Quindi il diagramma orario volge la concavità verso l'alto per $t \in \left(0, \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \right)$, mentre per $t \in \left(\frac{3 + \sqrt{15}}{6}, +\infty \right)$ volge la concavità verso il basso. Ne consegue che $P_*(t_*, x_*)$ con $x_* = x(t_*)$ è punto di flesso a tangente obliqua, ed è un flesso ascendente. Scriviamo l'equazione della retta tangente al diagramma orario nel punto di flesso. Il coefficiente angolare è

$$m_* = v(t_*) = 3 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}},$$

onde l'equazione si scrive:

$$x - x_* = m_*(t - t_*)$$

Sviluppando e semplificando:

$$x = \frac{1}{36} \left[4(27 + 5\sqrt{15})t - 39 - 10\sqrt{15} \right] \quad (47)$$

Velocità iniziale

Tale valore fornisce il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma orario nel punto $(0, 0)$. Risulta: $m_0 = v(0) = 1$.

Comportamento all'infinito

Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \infty - \infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 \left(-1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) = -\infty,$$

cioè la funzione diverge negativamente per $t \rightarrow +\infty$. Eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = -\infty,$$

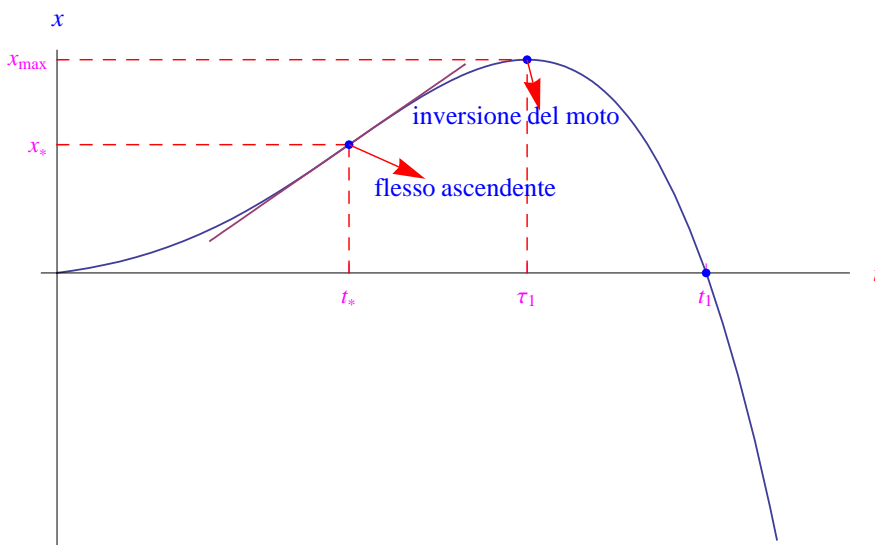


Figura 19: Diagramma orario della particella dell'esercizio 5.

per cui il diagramma orario è privo di asintoto obliquo per $t \rightarrow +\infty$.

Tracciamento del grafico

Ora abbiamo gli elementi per tracciare il diagramma orario (fig. 19).

Interpretazione cinematica

A $t = 0$ la particella parte da $x = 0$ con velocità $v(0) = 1$. Accelera fino a $t_* \simeq 1.14$, istante in cui l'accelerazione si annulla per invertire il proprio segno. Quindi, la particella decelera fino al raggiungimento della massima distanza $x_{\max} \simeq 6.22$ dall'origine. Tale ascissa è raggiunta all'istante $\tau_1 \simeq 1.844$ che risulta essere un istante di arresto con inversione del moto. Quindi la particella transita per l'origine a $t_1 \simeq 2.55$, proseguendo verso $-\infty$.

5 Punti di flesso a tangente verticale

Premettiamo che tali punti sono cinematicamente impossibili, poiché implicano una discontinuità di seconda specie della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$. Consideriamo, ad esempio, una particella che si muove lungo l'asse x secondo la legge oraria:

$$x(t) = \begin{cases} x_1 - \sqrt{t_1 - t}, & t \in [0, t_1] \\ x_1 + \sqrt{t - t_1}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases}, \quad (48)$$

per assegnati $x_1 \neq 0$, $t_1 > 0$.

Insieme di definizione

La funzione $x(t)$ è definita in $[0, +\infty)$ risultando ivi continua.

Intersezione con gli assi coordinati tx

Riesce:

$$x(0) = x_1 - \sqrt{t_1} \quad (49)$$

Ricerca degli zeri di $x(t)$:

$$t \in [0, t_1] \implies (x(t) = 0 \iff x_1 - \sqrt{t_1 - t} = 0$$

Cioè in $[0, t_1]$ abbiamo

$$t'_1 = t_1 - x_1^2 \quad (50)$$

Deve essere $t'_1 \in [0, t_1]$, onde

$$\begin{aligned} 0 \leq t'_1 \leq t_1 &\iff 0 \leq t_1 - x_1^2 \leq t_1 \iff -t_1 \leq -x_1^2 \leq t_1 \\ &\iff t_1 \geq x_1^2 \geq -t_1 \iff x_1^2 \leq t_1 \iff x_1 \in [-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}] \end{aligned}$$

Cioè

$$\exists t'_1 \in [0, t_1] \mid x(t'_1) = 0 \iff x_1 \in [-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}]$$

In altri termini, nella (48) x_1 e $t_1 > 0$ sono due parametri indipendenti. Tuttavia assegnato t_1 , la funzione $x(t)$ ha uno zero in $[0, t_1]$ se e solo se $x_1 \in [-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}]$.

Dalla (49) segue

$$x_1 \in [-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}] \implies x(0) \leq 0 \quad (51)$$

Esaminiamo ora l'eventuale presenza di zeri in $(t_1, +\infty)$. Deve essere

$$x_1 + \sqrt{t - t_1} = 0 \iff \sqrt{t - t_1} = -x_1,$$

che ha soluzioni se e solo se $x_1 < 0$:

$$t - t_1 = x_1^2,$$

da cui lo zero

$$t'_2 = t_1 + x_1^2, \quad (x_1 < 0) \quad (52)$$

Comportamento all'infinito

Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1 + \sqrt{t - t_1}) = +\infty$$

Cioè la funzione $x(t)$ diverge positivamente per $t \rightarrow +\infty$.

Velocità scalare

Deriviamo:

$$\begin{aligned} t \in [0, t_1] &\implies v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}} \frac{d}{dt}(t_1 - t) = \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}} \\ t \in (t_1, +\infty) &\implies v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}} \frac{d}{dt}(t - t_1) = \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}} \end{aligned}$$

Segue

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{|t - t_1|}} \quad (53)$$

Tale funzione non è definita in $t = t_1$. Precisamente:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} v(t) = +\infty, \quad (54)$$

cosicché t_1 è un punto di infinito per $v(t)$. Come è noto dal Calcolo differenziale, la (54) esprime la circostanza secondo cui la funzione $x(t)$ è dotata di derivata infinita in t_1 . Geometricamente, il punto $P_1(t_1, x(t_1) = x_1)$ è un *flesso a tangente verticale* per il diagramma orario. Infatti, la retta tangente al diagramma orario nel punto P_1 ha coefficiente angolare dato dalla (54).

Accelerazione scalare

Per derivare la (53) è preferibile svincolarsi dal valore assoluto:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}}, & t \in [0, t_1) \\ \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \quad (55)$$

Segue

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{(t_1-t)^3}}, & t \in [0, t_1) \\ \frac{-1}{4\sqrt{(t-t_1)^3}}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \quad (56)$$

Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} a(t) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^3}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} a(t) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow t_1^+} \frac{1}{\sqrt{(t-t_1)^3}} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{0^+} \right) = -\infty,$$

onde t_1 è un punto di infinito per la funzione $a(t)$.

Istanti di arresto

Riesce

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{|t-t_1|}} = 0 \quad \text{mai!} \implies \nexists \text{ istanti di arresto}$$

Inoltre

$$v(t) > 0, \quad \forall t \in A = [0, t_1) \cup (t_1, +\infty) \implies x(t) \text{ è strettamente crescente in } A \quad (57)$$

Osservazione 6 È facile persuadersi che la funzione $x(t)$ è strettamente crescente anche in t_1 . Nella (57) abbiamo escluso t_1 , in quanto $v(t)$ non è ivi definita.

Concavità

Dal momento che $P_1(t_1, x_1)$ è un punto di flesso ascendente e a tangente verticale, si ha che il diagramma orario volge la concavità verso l'alto per $t \in [0, t_1)$, mentre per $t \in (t_1, +\infty)$ la concavità è rivolta verso il basso. Ciò è confermato dallo studio del segno della funzione (56).

Asintoto obliquo a destra

Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0^+$$

D'altra parte, $x(t)$ è divergente positivamente per $t \rightarrow +\infty$, onde il suo diagramma cartesiano non può avere un asintoto con coefficiente angolare nullo, che sarebbe un asintoto orizzontale.

Velocità iniziale

Dalla 53

$$v(0) = \frac{1}{2\sqrt{t_1}} > 0$$

Quindi la particella parte da $x(0) = x_1 - \sqrt{t_1}$ alla velocità $v(0) = \frac{1}{2\sqrt{t_1}}$. Per quanto precede, se $x_1 < \sqrt{t_1}$ è $x(0) < 0$. Il moto è progressivo: la particella transita per l'origine al tempo $t'_1 = t_1 - x_1^2$, raggiungendo il punto x_1 al tempo t_1 , transitando a velocità infinita. Per $t > t_1$ la velocità decresce per annullarsi all'infinito.

Tracciamento dei grafici

Nelle figg. 20-21-22 riportiamo il diagramma orario seguito dai diagrammi delle funzioni $v(t)$ e $a(t)$.

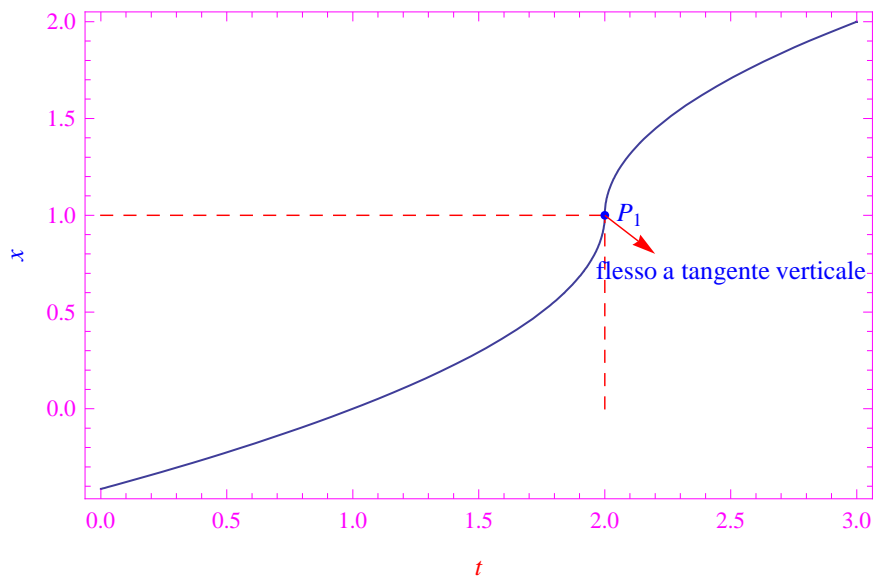


Figura 20: Diagramma orario della particella dell'esercizio 6.

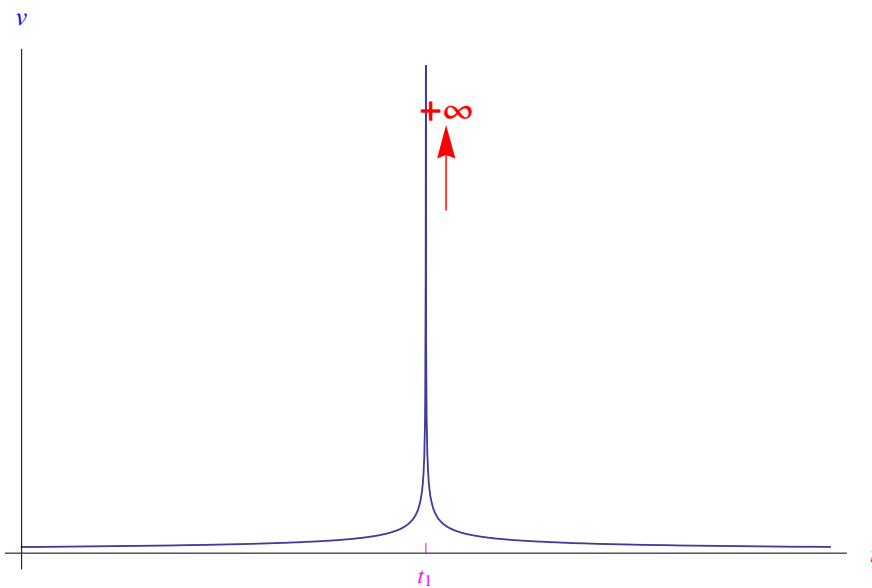


Figura 21: Velocità della particella in funzione del tempo (esercizio 5).

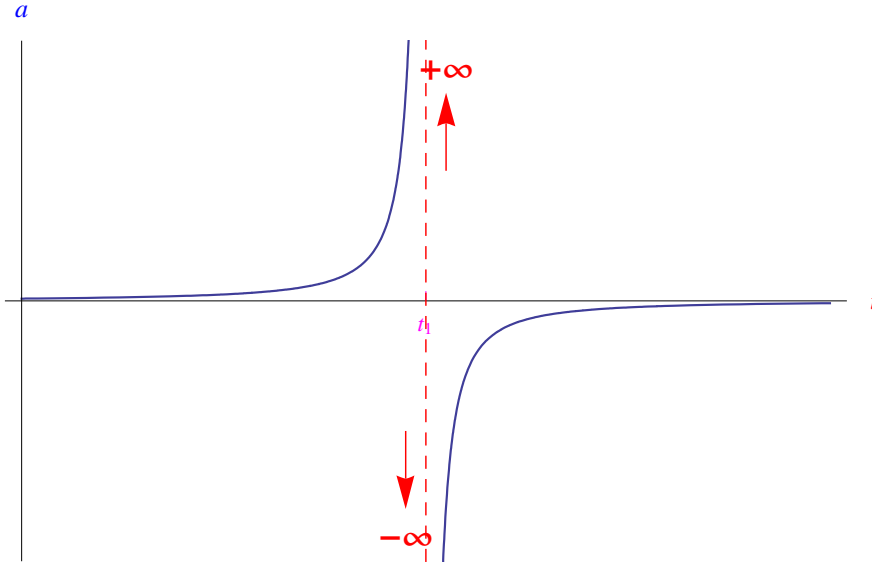


Figura 22: Accelerazione della particella in funzione del tempo (esercizio 5).

6 Punti angolosi

Assegnato il moto unidimensionale $x = x(t)$, supponiamo che la funzione $x(t)$ non sia derivabile in $t_1 > 0$. Più precisamente, assumiamo $x(t)$ derivabile a destra e a sinistra di t_1 :

$$\dot{x}_+(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} \dot{x}(t), \quad \dot{x}_-(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \dot{x}(t), \quad (58)$$

con $\dot{x}_\pm(t_1) \in \mathbb{R}$ e $\dot{x}_+(t_1) \neq \dot{x}_-(t_1)$. Ricordando che $v(t) \equiv \dot{x}(t)$, dove $v(t)$ è la velocità scalare della particella, si ha:

$$v_+(t_1) \neq v_-(t_1), \quad (59)$$

con

$$v_\pm(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^\pm} v(t) \quad (60)$$

In altri termini, la funzione $v(t)$ presenta una discontinuità di prima specie nel punto t_1 , con salto

$$\sigma(t_1) = v_+(t_1) - v_-(t_1) \quad (61)$$

La fig. 23 illustra una situazione tipica. Nel punto $P_1(t_1, x(t_1))$ il diagramma orario γ è privo di retta tangente, ed è l'unione degli archi γ_- e γ_+ . L'arco γ_- è contenuto nel semipiano $t < t_1$, mentre l'arco γ_+ è contenuto nel semipiano $t > t_1$:

$$\begin{aligned} \gamma_- &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), 0 \leq t \leq t_1\} \\ \gamma^+ &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), t_1 < t < +\infty\} \\ \gamma &= \gamma_- \cup \gamma_+ \end{aligned} \quad (62)$$

L'arco γ_- è tangente in P_1 alla semiretta τ_- di coefficiente angolare $v_-(t_1)$:

$$\tau_- : x - x(t_1) = v_-(t_1)(t - t_1) \quad (63)$$

L'arco γ_+ è tangente in P_1 alla semiretta τ_+ di coefficiente angolare $v_+(t_1)$:

$$\tau_+ : x - x(t_1) = v_+(t_1)(t - t_1) \quad (64)$$

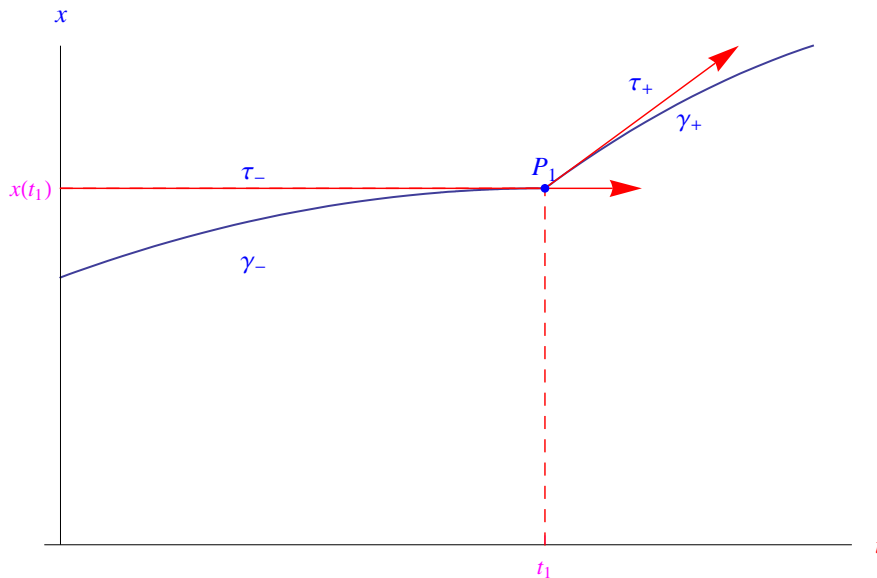


Figura 23: Qui è $\dot{x}_-(t_1) = 0$, $\dot{x}_+(t_1) > 0$.

Definizione 7 La semiretta τ_- si chiama **semitangente sinistra** a γ nel punto P_1 . La semiretta τ_+ si chiama **semitangente destra** a γ nel punto P_1 .

Definizione 8 Il punto P_1 dicesi **punto angoloso** di γ .

Tale definizione è suggerita dal fatto che nel punto P_1 l'angolo tra τ_- e τ_+ è non nullo. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo dire che una curva con punti angolosi non è liscia, ma *spigolosa*.

Esercizio 9 Determinare gli eventuali punti angolosi del diagramma orario di equazione:

$$x(t) = \begin{cases} 2t_1 - (t - t_1)^2, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2t - 2(t - t_1)^2, & t > t_1 \end{cases}, \quad (65)$$

ove t_1 è un parametro reale positivo.

Soluzione

Verifichiamo innanzitutto la continuità della funzione $x(t)$ nel punto t_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_1^-} x(t) &= \lim_{t \rightarrow t_1^-} [2t_1 - (t - t_1)^2] = 2t_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t) &= \lim_{t \rightarrow t_1^+} [2t - 2(t - t_1)^2] = 2t_1 \end{aligned} \quad (66)$$

Cioè

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = 2t_1 = x(t_1), \quad (67)$$

da cui la continuità di $x(t)$ nel punto t_1 . La derivata prima è

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -2(t - t_1), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2 - 4(t - t_1), & t > t_1 \end{cases} \quad (68)$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \dot{x}(t) = -2 \lim_{t \rightarrow t_1^-} (t - t_1) = 0 \implies \dot{x}_-(t_1) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} [2 - 4(t - t_1)] = 2t_1 \implies \dot{x}_+(t_1) = 2$$

Cioè

$$\dot{x}_+(t_1) \neq \dot{x}_-(t_1),$$

cioè $P_1(t_1, 2t_1)$ è un punto angoloso del diagramma orario. È facile scrivere le equazioni delle due semitangenti:

$$\begin{aligned} \tau_- : x &= 2t_1 = \text{costante} \\ \tau_+ : x &= 2t_1 t \end{aligned} \quad (69)$$

In fig. 24 riportiamo il diagramma della derivata i.e. della velocità scalare $v(t)$.

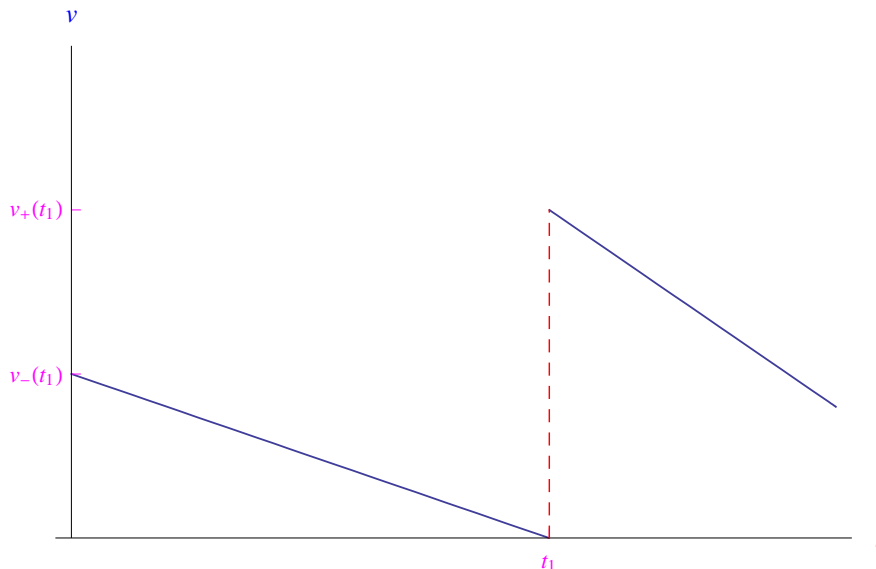


Figura 24: Diagramma cartesiano della velocità della particella (esercizio 9). Il punto t_1 è di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $\sigma = 2t_1$.

Abbiamo considerato $\dot{x}_\pm(t_1) \in \mathbb{R}$. Tuttavia, si ha ancora un punto angoloso quando una delle derivate destra e sinistra è infinita. Ad esempio:

$$\dot{x}_-(t_1) = -\infty, \quad \dot{x}_+(t_1) > 0 \quad (70)$$

In tal caso il diagramma orario si presenta come in fig. 25, mentre la velocità $v(t)$ presenta in t_1 una discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} v(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} v(t) = v_+(t_1) \equiv \dot{x}_+(t_1) > 0,$$

onde la retta verticale $t = t_1$ è asintoto verticale a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione $v(t)$.

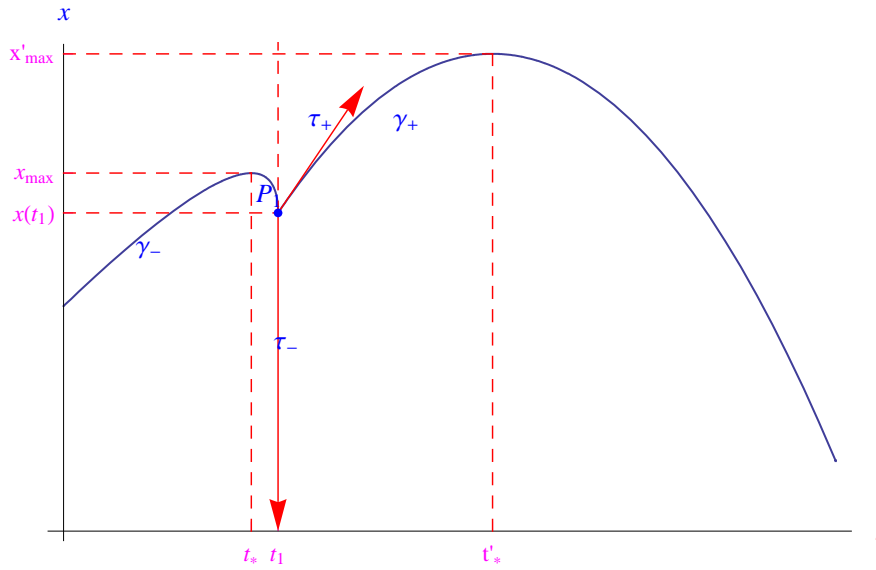


Figura 25: Qui è $\dot{x}_-(t_1) = -\infty$, $\dot{x}_+(t_1) > 0$.

Esercizio 10 Determinare gli eventuali punti angolosi del diagramma orario di equazione:

$$x(t) = \begin{cases} 2t + \sqrt{t_1 - t}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2t - 2(t - t_1)^2, & t > t_1 \end{cases}, \quad (71)$$

ove t_1 è un parametro reale positivo.

Soluzione

Verifichiamo innanzitutto la continuità della funzione $x(t)$ nel punto t_1 :

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} (2t + \sqrt{t_1 - t}) = 2t_1 \quad (72)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} [2t - 2(t - t_1)^2] = 2t_1$$

Cioè

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = 2t_1 = x(t_1), \quad (73)$$

da cui la continuità di $x(t)$ nel punto t_1 . La derivata prima è

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}}, & t \in [0, t_1) \\ 2 - 4(t - t_1), & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \quad (74)$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}} \right) = 2 - \frac{1}{0^+} = 2 - (+\infty) = -\infty \quad (75)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} [2 - 4(t - t_1)] = 2$$

È facile scrivere le equazioni delle due semitangenti:

$$\begin{aligned} \tau_- : t &= t_1 \\ \tau_+ : x &= 2t \end{aligned} \quad (76)$$

Studiamo la funzione $v(t) \equiv \dot{x}(t)$. Innanzitutto vediamo che è definita in $[0, t_1) \cup (t_1, +\infty)$, dove t_1 risulta essere un punto di discontinuità di seconda specie (eq. 74). Esaminiamo il segno di $v(t)$ nell'intervallo $[0, t_1)$, determinando dapprima gli eventuali zeri:

$$2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}} = 0 \iff t = t_1 - \frac{1}{16} \equiv t_*$$

Quindi

$$v(t) > 0 \iff_{t \in [0, t_1)} 2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}} > 0 \implies t \in [0, t_*),$$

per cui la funzione $x(t)$ è strettamente crescente in $[0, t_*)$ e strettamente decrescente in (t_*, t_1) . Ne consegue che t_* è punto di massimo relativo per $x(t)$:

$$x_{\max} = x(t_*) = 2t_1 + \frac{1}{8} \quad (77)$$

Nell'intervallo $(t_1, +\infty)$:

$$v(t) = 0 \iff_{t \in (t_1, +\infty)} 2 - 4(t - t_1) = 0 \iff t = \frac{1}{2} + t_1 \equiv t'_*$$

Quindi

$$v(t) > 0 \iff_{t \in (t_1, +\infty)} t \in (t'_*, +\infty),$$

onde t'_* è punto di massimo relativo per $x(t)$:

$$x'_{\max} = x(t'_*) = \frac{1}{2} + 2t_1$$

La derivata prima di $v(t)$, i.e. l'accelerazione della particella è:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{(t_1-t)^3}}, & t \in [0, t_1) \\ -4, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \quad (78)$$

Segue

$$a(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_1) \cup (t_1, +\infty), \quad (79)$$

per cui la funzione $v(t)$ è strettamente decrescente, mentre il diagramma orario volge la concavità verso il basso. Ciò implica che il moto è ritardato. In particolare, per $t \in (t_1, +\infty)$ è uniformemente ritardato con accelerazione $a = -4$ (in unità adimensionali). Il diagramma orario e i grafici di $v(t)$, $a(t)$ sono riportati nelle figg. 25-26-27

7 Punti cuspidali

Come ultimo caso consideriamo quello in cui la velocità scalare presenta il seguente comportamento in un intorno di t_1 :

$$\dot{x}_-(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} \dot{x}(t) = -\infty, \quad \dot{x}_+(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \dot{x}(t) = +\infty, \quad (80)$$

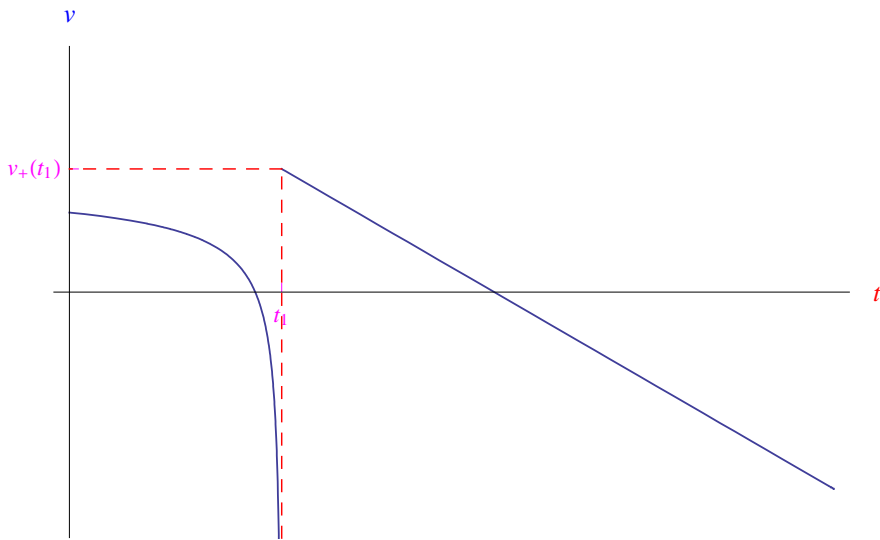


Figura 26: Esercizio 10. Velocità della particella.

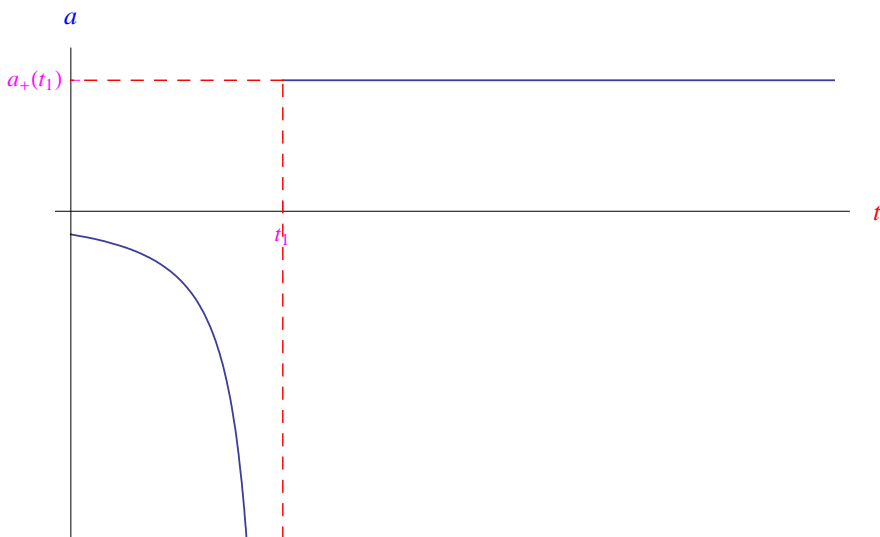


Figura 27: Esercizio 10. Accelerazione della particella.

o viceversa (cioè le derivate destra e sinistra sono entrambe infinite e di segno opposto²). In altri termini, la funzione $v(t) \equiv \dot{x}(t)$ presenta una discontinuità di seconda specie nel punto t_1 .

Assumendo continua la funzione $x(t)$ nel punto t_1 , si ha che il diagramma orario si compone di due archi γ_- e γ_+ raccordati in $P_1(t_1, x(t_1))$, il primo nel semipiano $t < t_1$ e l'altro nel semipiano $t > t_1$:

$$\begin{aligned}\gamma_- &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), 0 \leq t \leq t_1\} \\ \gamma^+ &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t), t_1 < t < +\infty\} \\ \gamma &= \gamma_- \cup \gamma_+\end{aligned}\tag{81}$$

Come nel caso dei punti angolosi, abbiamo le semitangenti sinistra e destra (τ_-, τ_+) che ora formano un angolo di π , poiché τ_- è la semiretta appartenente alla retta verticale $\tau : t = t_1$. Precisamente, τ_- ha origine in P_1 ed è orientata verso il basso:

$$\tau_- = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t = t_1, -\infty < x \leq x(t_1)\},\tag{82}$$

mentre τ_+ ha origine in P_1 ed è orientata verso l'alto:

$$\tau_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t = t_1, x(t_1) \leq x < +\infty\}\tag{83}$$

Definizione 11 Il punto P_1 si dice **cuspidale** o **punto cuspidale** o **punto di regresso**.

Per $t < t_1$ il moto è retrogrado, mentre per $t > t_1$ è progressivo. Ne consegue che l'istante t_1 pur non essendo un istante di arresto, è comunque un istante di inversione del moto.

Esercizio 12 Studiare il moto unidimensionale di equazione oraria:

$$x(t) = \begin{cases} 2t + \sqrt{t_1 - t}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2t + \sqrt{t - t_1}, & t > t_1 \end{cases},\tag{84}$$

essendo t_1 un parametro reale positivo.

Soluzione

Al solito, ci riferiamo all'intervallo $[0, +\infty)$, e la funzione è manifestamente continua in t_1 :

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = x(t_1) = 2t_1\tag{85}$$

Intersezione con gli assi

Asse dei tempi per $t \in (0, t_1]$:

$$x(t) = 0 \iff_{t \in (0, t_1]} 2t + \sqrt{t_1 - t} = 0 \iff \sqrt{t_1 - t} = -2t < 0 \text{ mai!}$$

Per $t \in (t_1, +\infty)$

$$x(t) = 0 \iff_{t \in (t_1, +\infty)} 2t + \sqrt{t - t_1} = 0 \iff \sqrt{t - t_1} = -2t < 0 \text{ mai!}$$

Ne consegue che il diagramma orario non interseca l'asse dei tempi.

²Se sono entrambe infinite e con lo stesso segno, si ha un punto di flesso a tangente verticale, già esaminato in un numero precedente.

Per $t = 0$

$$x(0) = \sqrt{t_1} > 0 \quad (86)$$

Derivata prima

Riesce:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1-t}}, & 0 \leq t < t_1 \\ 2 + \frac{1}{2\sqrt{t-t_1}}, & t > t_1 \end{cases}, \quad (87)$$

da cui vediamo che non è definita in t_1 :

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \dot{x}(t) = 2 - (+\infty) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} \dot{x}(t) = 2 + (+\infty) = +\infty,$$

onde $P_1(t_1, x(t_1) = 2t_1)$ è un punto cuspidale per il diagramma orario.

Zeri della derivata in $[0, t_1)$

$$\dot{x}(t) = 0 \iff_{t \in [0, t_1)} 2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1-t}} = 0 \iff t = t_* \equiv t_1 - \frac{1}{16}$$

Segno in $[0, t_1)$:

$$\dot{x}(t) > 0 \iff_{t \in [0, t_1)} 2 - \frac{1}{2\sqrt{t_1-t}} > 0 \iff t \in [0, t_*),$$

per cui $x(t)$ è strettamente crescente in $[0, t_*)$ e strettamente decrescente in (t_*, t_1) . Cioè t_* è punto di massimo relativo, i.e. un istante di arresto con inversione del moto:

$$x_{\max} = x(t_*) = 2t_1 + \frac{1}{8} \quad (88)$$

Ripetendo i calcoli in $(t_1, +\infty)$ si perviene a

$$\dot{x}(t) > 0, \quad \forall t \in (t_1, +\infty),$$

onde $x(t)$ è strettamente crescente in $(t_1, +\infty)$.

Derivata seconda

Riesce

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{(t_1-t)^3}}, & 0 \leq t < t_1 \\ -\frac{1}{4\sqrt{(t-t_1)^3}}, & t > t_1 \end{cases} \quad (89)$$

Quindi

$$\ddot{x}(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_1) \cup (t_1, +\infty),$$

per cui il diagramma orario è concavo. Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \ddot{x}(t) = -\infty$$

Ne consegue che il moto è ritardato con accelerazione divergente negativamente in t_1 .

Asintoto obliquo

Abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - 2t] = +\infty,$$

per cui non esiste asintoto obliquo. Il diagramma orario è riportato in fig. 28

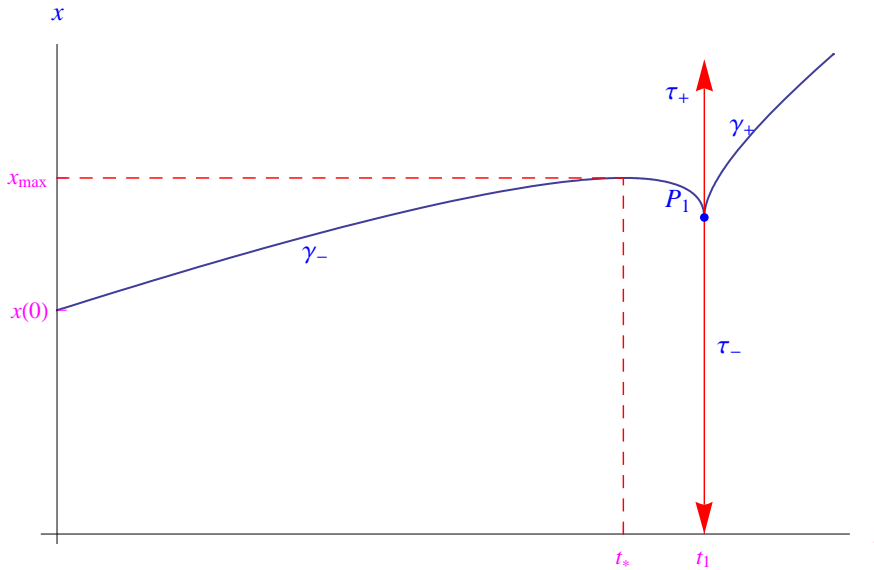


Figura 28: Esercizio 12. Diagramma orario.

8 Esercizi svolti

Esercizio 13 *Un punto materiale compie un moto unidimensionale. Assumendo un asse x orientato nella direzione del moto, si ha che la velocità scalare all'istante t_1 è $v_1 = 18 \text{ m/s}$, e il punto si muove nel verso positivo del predetto asse.*

All'istante $t_2 = t_1 + \Delta t$ con $\Delta t = 2.4 \text{ s}$, la velocità scalare è $v_2 = 30 \text{ m/s}$ e il punto si muove nel verso negativo dell'asse x . Si determini l'accelerazione media nell'intervallo Δt .

È possibile tracciare il diagramma orario?

Soluzione

Analisi qualitativa del moto

Fissiamo l'origine O dell'asse x nella posizione occupata dal punto materiale all'istante t_1 (fig. 29). All'istante $t_2 = t_1 + \Delta t > t_1$, il punto occupa la posizione $A(x_2)$ e il vettore velocità \mathbf{v}_2 è parallelo e discorde all'asse x . Ne consegue che il moto è decelerato, per cui c'è stato un istante di arresto $t_* \in (t_1, t_2)$ nel punto $A_*(x_*)$ con $x_* > x_2$. Più precisamente, t_* è un istante di arresto con inversione del moto.

In altri termini, il punto materiale giunto in A_* si ferma, invertendo il moto (cioè avvicinandosi all'origine), transitando per il punto $A(x_2)$ all'istante $t_2 > t_*$ con velocità $v_2 = 30 \text{ m/s}$ orientata nel verso negativo dell'asse x .

Calcolo dell'accelerazione media

L'accelerazione media è

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (90)$$

essendo Δv la variazione di velocità del punto materiale nell'intervallo di tempo Δt , il cui calcolo richiede la dovuta attenzione per ciò che riguarda i segni. Infatti, il testo dell'esercizio fornisce i moduli dei vettori velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 che per definizione, sono sempre positivi. Qui invece, dobbiamo tener conto dei segni: (+) se il vettore velocità è concorde all'asse x ; viceversa, il segno sarà (-). Ne consegue

$$\Delta v = [-30 - (18)] \text{ m/s} = -48 \text{ m/s}$$

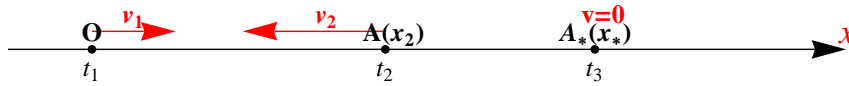


Figura 29: Esercizio 13.

Sostituendo nella (90):

$$\bar{a} = -20 \text{ m/s}^2 \quad (91)$$

Diagramma orario

Non è possibile tracciare il diagramma orario, in quanto l'esercizio non fornisce ulteriori dati. Vediamo comunque che a $t_1 \equiv 0$ è $v(t_1) > 0$, onde la funzione $x(t)$ è strettamente crescente in un intorno destro di t_1 . Inoltre, dal momento che t_* è un istante di arresto con inversione del moto, si ha che t_* è punto di massimo relativo per la funzione. In fig. 30 riportiamo un possibile andamento del diagramma orario.

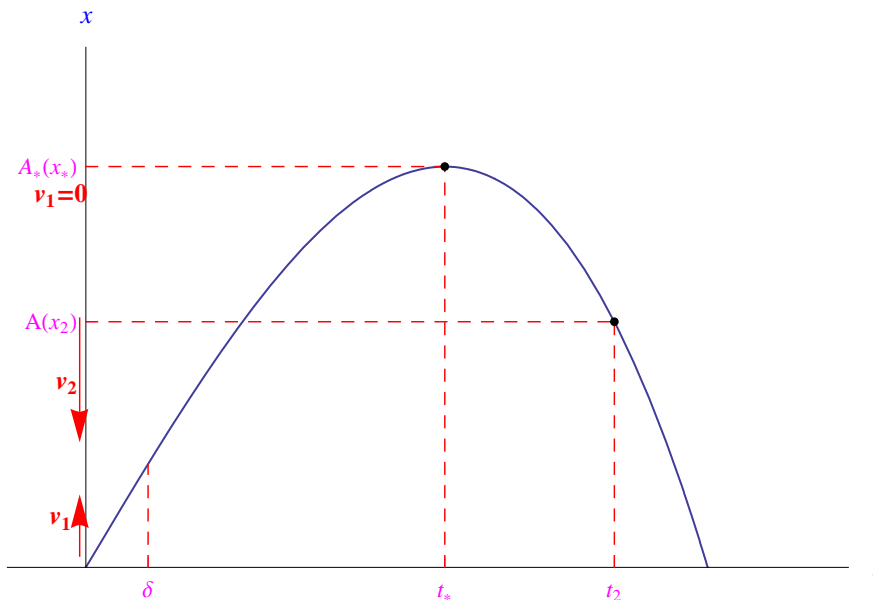


Figura 30: Esercizio 13. Andamento qualitativo del diagramma orario.

Esercizio 14 Il diagramma cartesiano della funzione $v(t)$ che esprime la velocità in funzione del tempo, di un punto materiale in moto unidimensionale, è riportato in fig. 31.

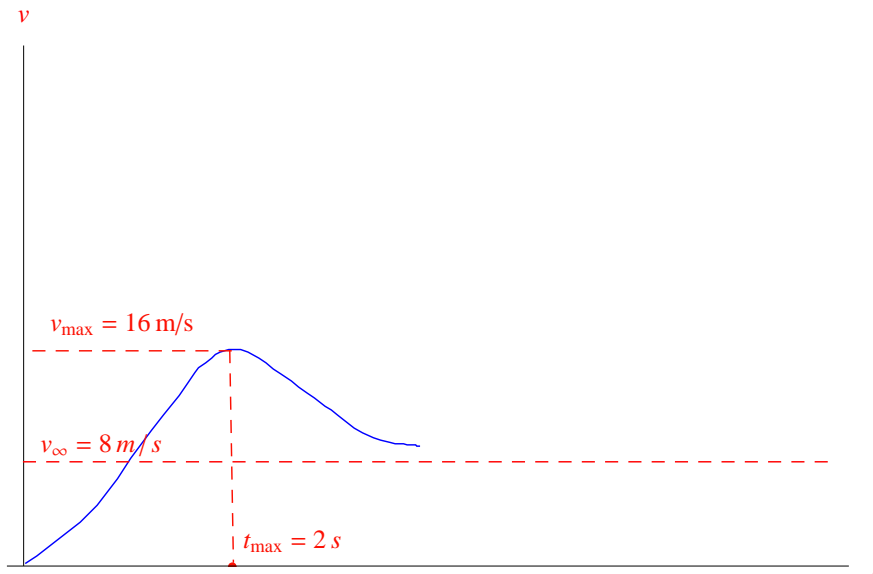


Figura 31: Esercizio 14. Dati numerici: $t_{\max} = 2 \text{ s}$, $v_{\infty} = 8 \text{ m/s}$, $v_{\max} = 16 \text{ m/s}$.

Tacciare il diagramma orario e il diagramma cartesiano della funzione $a(t)$ che esprime l'accelerazione in funzione del tempo.

Soluzione

Diagramma orario

Ricordiamo innanzitutto che la velocità scalare è la derivata prima della funzione $x(t)$:

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Dal diagramma di fig. 31 segue

$$v(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) \implies x(t) \text{ è strettamente crescente in } [0, +\infty) \quad (92)$$

Inoltre

$$v(t) = 0 \iff t = 0,$$

per cui il diagramma orario “parte” da $O(0,0)$ con tangente orizzontale. Dal momento che per $t > 0$, la funzione $v(t)$ è priva di zeri, si ha che la funzione $x(t)$ non ha punti critici. Si noti che a tale conclusione si perviene anche dalla (92), anche se potrebbero esserci punti di flesso a tangente orizzontale, giacché la (92) non ci dice per quali valori di t si annulla $v(t)$.

Il diagramma orario non è una retta, giacché in tal caso la $v(t)$ sarebbe stata una funzione costante. Da queste prime informazioni, possiamo tracciare una prima bozza del diagramma orario (fig. 32).

Nel diagramma della velocità, rileviamo un asintoto orizzontale, giacché:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_{\infty}^+ \quad (93)$$

Da ciò segue che il moto è asintoticamente uniforme. Matematicamente, tale circostanza si traduce nella presenza di un asintoto obliquo per il diagramma orario (fig.). Infatti, come è ben noto dal Calcolo, il coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo è

$$m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = v_{\infty}^+, \quad (94)$$

dove “H” denota l'applicazione della regola di De L'Hospital.

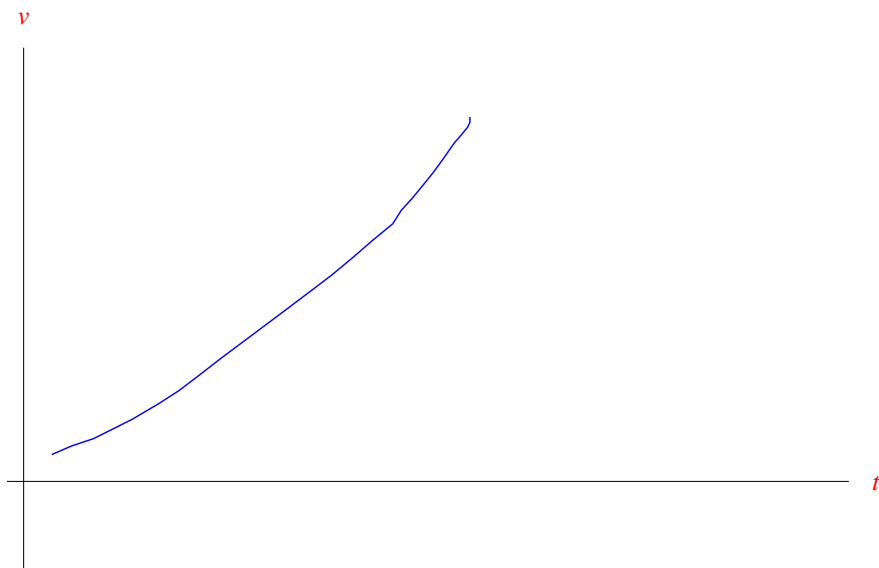


Figura 32: Esercizio 14. Prima bozza del diagramma orario.

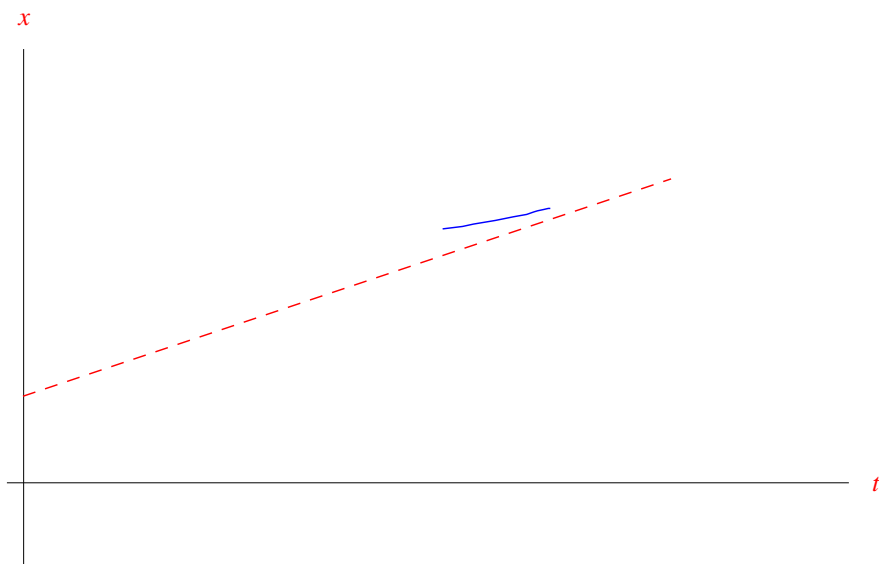


Figura 33: Esercizio 14. La retta in tratteggio ha coefficiente angolare $m = v_{\infty} = 8 \text{ m/s}$, ed è un asintoto obliquo per il diagramma orario.

Esercizio 15 La fig. 34 riporta il grafico della velocità in funzione del tempo mantenuta da un corridore nei primi 8 secondi di una corsa campestre. Graficare l'andamento dell'ascissa x e dell'accelerazione in funzione del tempo. Quale è la distanza percorsa nel predetto intervallo di tempo?

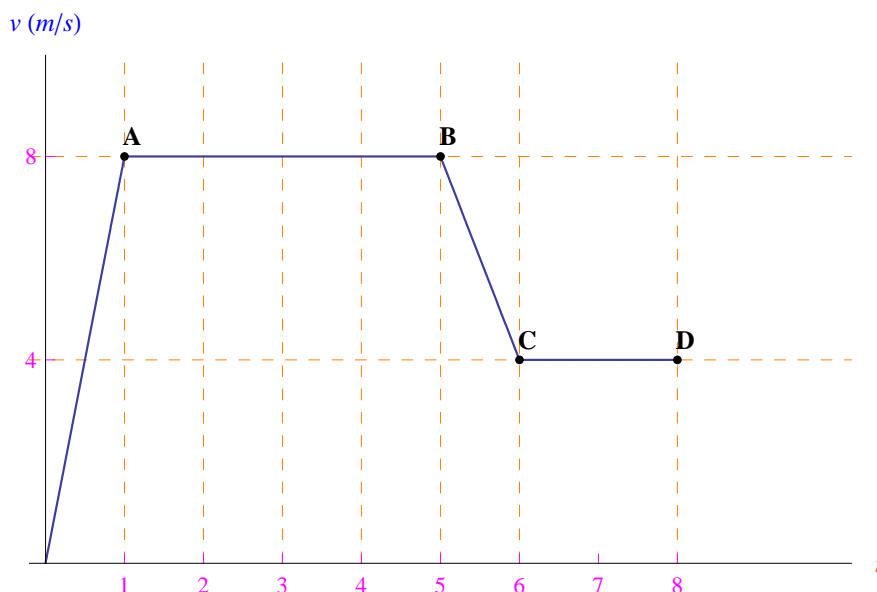


Figura 34: Esercizio 15

Soluzione

Scriviamo l'espressione analitica della funzione $v(t)$:

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t, & t \in [0, 1] \\ 8, & t \in [1, 5], \\ a_2 t + b, & t \in [5, 6] \\ 4, & t \in [6, 8] \end{cases}, \quad (95)$$

dove $a_1 > 0$ è l'accelerazione del corridore per $t \in [0, 1]$, ed è anche il coefficiente angolare della retta per $O(0, 0)$ e $A(1, 8)$. Quindi

$$a_1 = 8 \text{ m/s}^2 \quad (96)$$

$a_2 < 0$ è la decelerazione per $t \in [5, 6]$ e quindi, il coefficiente angolare della retta per $B(5, 8)$ e $C(6, 4)$:

$$a_2 = \frac{4 - 8}{6 - 5} \text{ m/s}^2 = -4 \text{ m/s}^2, \quad (97)$$

mentre $b > 0$ è l'ordinata all'origine della predetta retta:

$$v = -4t + b$$

Imponendo il passaggio per B :

$$8 = -4 \cdot 5 + b \implies b = 28$$

Per maggiore chiarezza, riscriviamo la (95):

$$v(t) = \begin{cases} 8t, & t \in [0, 1] \\ 8, & t \in [1, 5], \\ 28 - 4t, & t \in [5, 6] \\ 4, & t \in [6, 8] \end{cases}, \quad (98)$$

Si noti che la (98) definisce una funzione continua, e i punti A, B, C sono punti di raccordo per il suo diagramma cartesiano:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} v(t) \end{aligned} \quad (99)$$

Per ricavare l'equazione oraria, dobbiamo integrare la (98) e ciò è possibile grazie alla continuità di tale funzione. Quindi

$$x(t) = \int v(t) dt = \begin{cases} 4t^2 + c_1 & t \in [0, 1] \\ 8t + c_2, & t \in [1, 5], \\ 28t - 2t^2 + c_3, & t \in [5, 6] \\ 4t + c_4, & t \in [6, 8] \end{cases}, \quad (100)$$

essendo c_1, \dots, c_4 costanti di integrazione da determinare attraverso le condizioni di raccordo. Rileviamo innanzitutto che la retta tangente al diagramma orario $x = x(t)$ varia con continuità in virtù della continuità della derivata $\dot{x}(t) \equiv v(t)$. In altri termini, il diagramma orario è privo di punti angolosi. Verificheremo ciò manualmente.

Assumendo $x(0) = 0$, si ha dalla prima delle (100):

$$c_1 = 0$$

Quindi

$$x(t) = 4t^2, \quad t \in [0, 1], \quad (101)$$

cioè un arco di parabola di estremi $(0, 0)$ e $(1, 4)$. Raccordando le soluzioni in $[0, 1] \cup [1, 5]$:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t)$$

Dalla (101)

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = 4,$$

onde

$$4 = \lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} (8t + c_2) = 8 + c_2 \implies c_2 = -4 \quad (102)$$

Quindi

$$x(t) = 8t - 4, \quad t \in [1, 5] \quad (103)$$

Si noti che il diagramma orario nell'intervallo $[1, 5]$ è il segmento della retta tangente all'arco di parabola (101) nel punto $(1, 4)$. Ciò garantisce la continuità della derivata prima, i.e. della velocità $v(t)$, nell'intervallo $[0, 5]$, come possiamo vedere dal grafico di fig. 35.

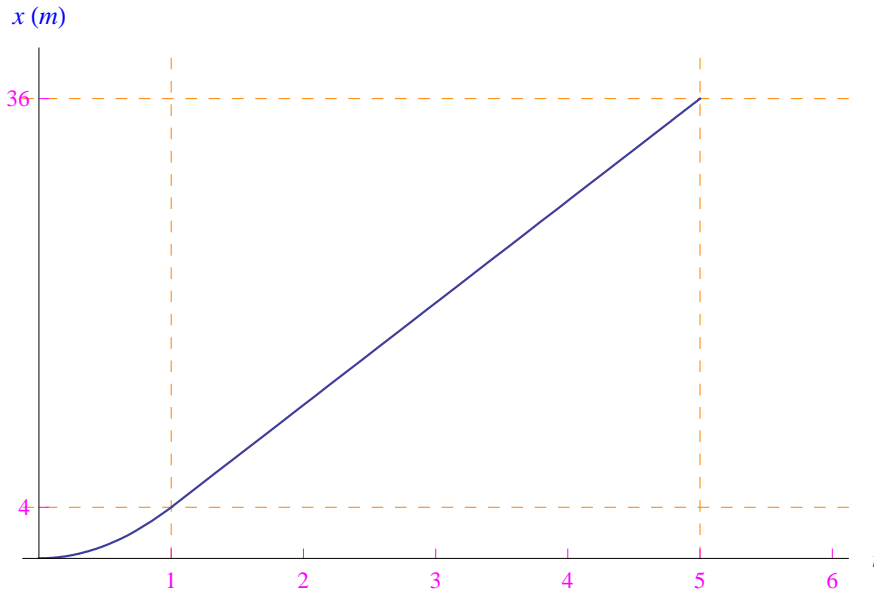


Figura 35: Esercizio 15. Andamento dell'ascissa x in funzione del tempo, nell'intervallo $[0, 5]$.

Per $t \in [5, 6]$ è $x(t) = 28t - 2t^2 + c_3$, per cui imponendo la condizione di raccordo:

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} x(t)$$

Dalla (103)

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} x(t) = 36,$$

onde

$$36 = \lim_{t \rightarrow 5^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (28t - 2t^2 + c_3) = 140 - 50 + c_3 \implies c_3 = -54 \quad (104)$$

Quindi

$$x(t) = -2t^2 + 28t - 54, \quad t \in [5, 6], \quad (105)$$

cioè un arco di parabola concavo. Anche questa volta c'è continuità della derivata prima in $t = 5$, come mostrato nel grafico di fig. 36, giacché

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} 8, & t \in [1, 5] \\ -4t + 28, & t \in [5, 6] \end{cases},$$

per cui

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} \dot{x}(t) = 8, \quad \lim_{t \rightarrow 5^+} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (-4t + 28) = 8$$

Raccordiamo ora gli ultimi due archi del diagramma orario. Deve essere:

$$\lim_{t \rightarrow 6^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} x(t)$$

Dalla (105):

$$\lim_{t \rightarrow 6^-} x(t) = 42,$$

onde

$$42 = \lim_{t \rightarrow 6^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} (4t + c_4) = 24 + c_4 \implies c_4 = 18 \quad (106)$$

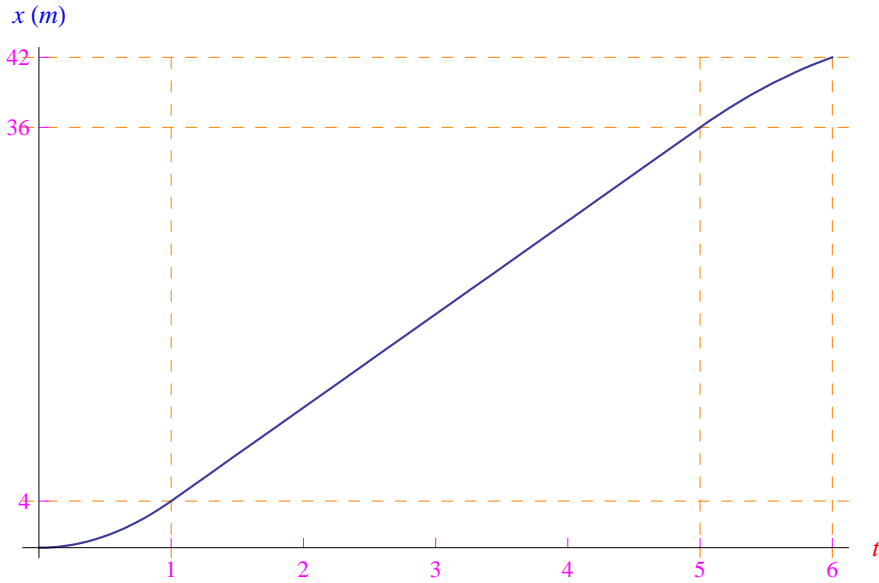


Figura 36: Esercizio 15. Andamento dell'ascissa x in funzione del tempo, nell'intervallo $[0, 6]$.

Finalmente:

$$x(t) = \begin{cases} 4t^2 & t \in [0, 1] \\ 8t - 4, & t \in [1, 5], \\ 28t - 2t^2 - 54, & t \in [5, 6] \\ 4t + 18, & t \in [6, 8] \end{cases} \quad (107)$$

Il diagramma orario completo è riportato in fig. 37, mentre la distanza totale percorsa è $x(8) = 50$ m.

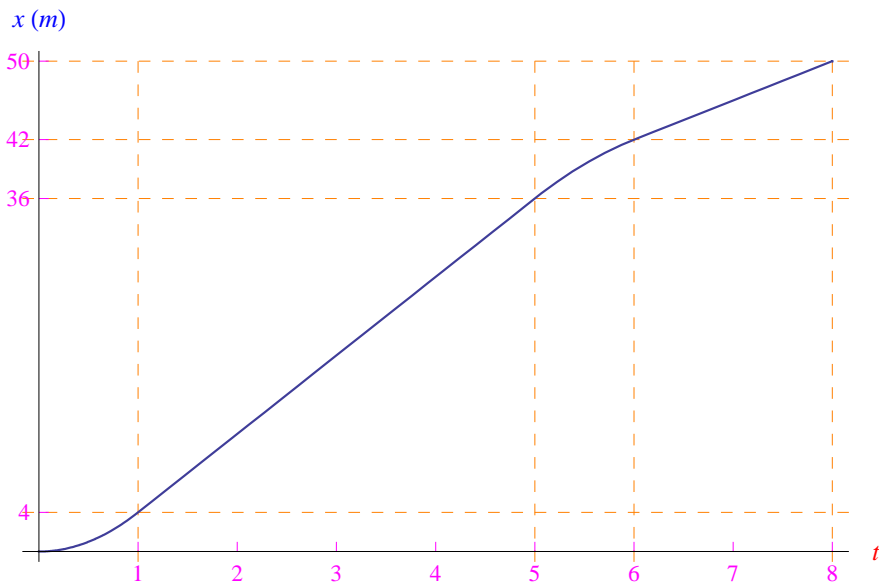


Figura 37: Esercizio 15. Diagramma orario del corridore.

Per la determinazione dell'accelerazione $a(t)$, osserviamo innanzitutto che i punti $A(1, 8)$, $B(5, 8)$, $C(6, 4)$ del grafico della velocità $v(t)$ sono punti angolosi, e quindi gli istanti $t = 1$, $t = 5$, $t = 6$

sono punti di discontinuità di prima specie per la funzione $a(t)$. Abbiamo

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \begin{cases} 8, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in [1, 5], \\ -4, & t \in [5, 6] \\ 0, & t \in [6, 8] \end{cases}, \quad (108)$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} a(t) &= 8, & \lim_{t \rightarrow 1^+} a(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} a(t) &= 0, & \lim_{t \rightarrow 5^+} a(t) &= -4 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} a(t) &= -4, & \lim_{t \rightarrow 6^+} a(t) &= 0 \end{aligned} \quad (109)$$

Il diagramma cartesiano della funzione $a(t)$ è riportato in fig. ??.

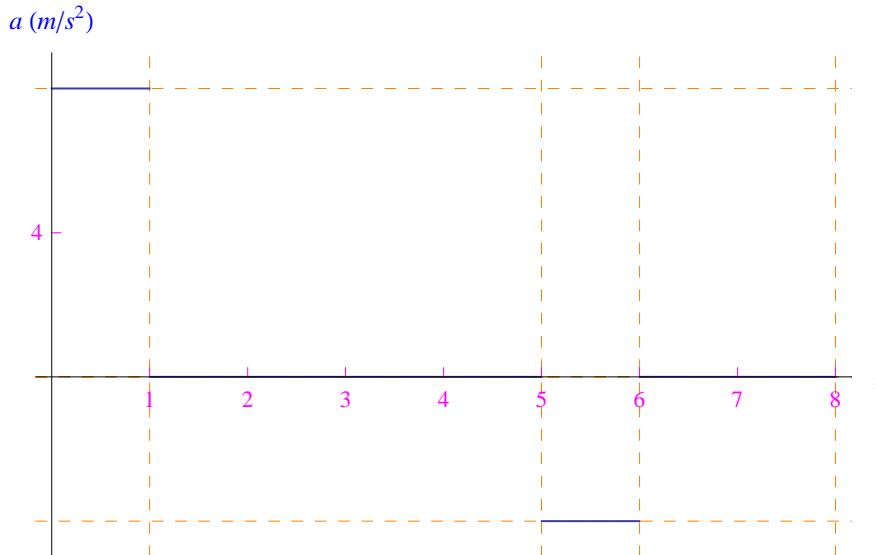


Figura 38: Esercizio 15. Accelerazione del corridore.

Esercizio 16 Tracciare localmente il diagramma orario di una particella che si muove lungo l'asse x , nei seguenti casi:

1. $v(t_1) = 0$, $a(t_1) > 0$, dove v e a sono rispettivamente la velocità scalare e l'accelerazione scalare, mentre t_1 è un istante assegnato.
2. $v(t_1) = 0$, $a(t_1) < 0$.
3. $v(t_1) < 0$, $a(t_1) > 0$.
4. $v(t_1) < 0$, $a(t_1) < 0$.
5. $v(t_1) = 0$, $a(t_1) = 0$.

Soluzione

Osserviamo innanzitutto che come preannunciato nel testo del problema, è possibile tracciare il diagramma orario solo localmente, ovvero in un intorno del punto $P(t_1, x(t_1))$.

Ciò premesso, nel **caso 1** risulta

$$\dot{x}(t_1) = v(t_1) = 0, \quad (110)$$

per cui t_1 è un punto estremo per $\gamma : x = x(t)$, ovvero per il diagramma orario. Inoltre

$$\ddot{x}(t_1) = a(t_1) < 0$$

implica che $P(t_1, x(t_1))$ è punto di curvatura. Più precisamente, γ volge la concavità verso l'alto in un intorno di P , come mostrato in fig. 39. Dal punto di vista dell'analisi matematica, si ha che t_1 è punto di massimo relativo per la funzione $x(t)$. Cinematicamente, significa che t_1 è un istante di arresto con inversione del moto. Più precisamente, se $I_\delta(t_1) = (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ è un opportuno intorno di t_1 , si ha che la funzione $x(t)$ è strettamente crescente per $t \in (t_1 - \delta, t_1)$, ed è strettamente decrescente per $t \in (t_1, t_1 + \delta)$.

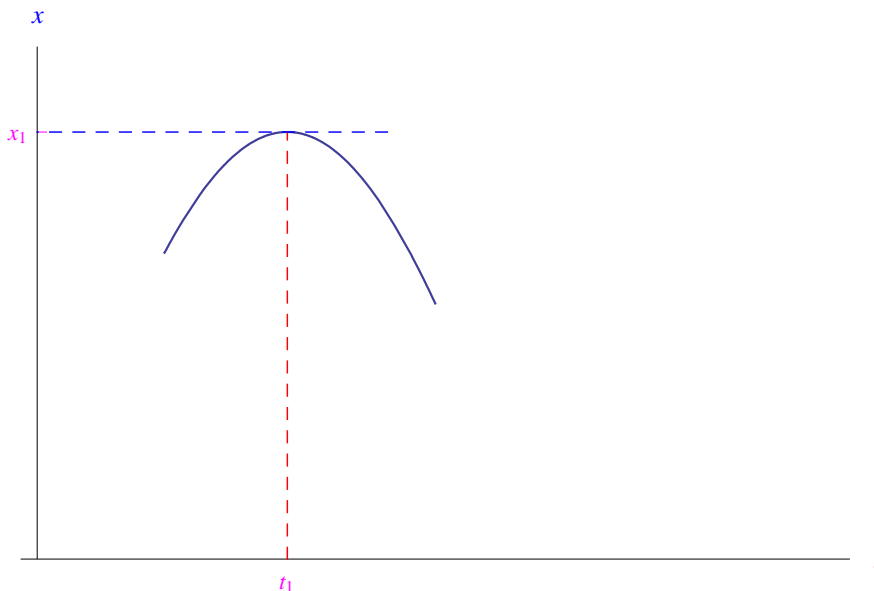


Figura 39: Esercizio 16. Andamento qualitativo e locale, del diagramma orario di una particella che compie un moto lungo l'asse x con $v(t_1) = 0$, $a(t_1) > 0$.

Nel **caso 2** è ancora

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad (111)$$

per cui t_1 è un punto estremo per il diagramma orario. Ora però

$$\ddot{x}(t_1) = a(t_1) > 0,$$

onde in un intorno di $P(t_1, x(t_1))$ il diagramma orario volge la concavità verso l'alto, come mostrato in fig. 40. Il punto t_1 è pertanto punto di minimo relativo per la funzione $x(t)$. Si tratta di un istante di arresto con inversione del moto, giacché l'ascissa $x(t)$ è una funzione strettamente decrescente in $(t_1 - \delta, t_1)$ e strettamente crescente in $(t_1, t_1 + \delta)$.

Passiamo al **caso 3**:

$$\dot{x}(t_1) < 0 \underset{x(t) \text{ è continua}}{\implies} \exists I_\delta(t_1) = (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \mid t \in I_\delta(t_1) \implies \dot{x}(t) < 0$$

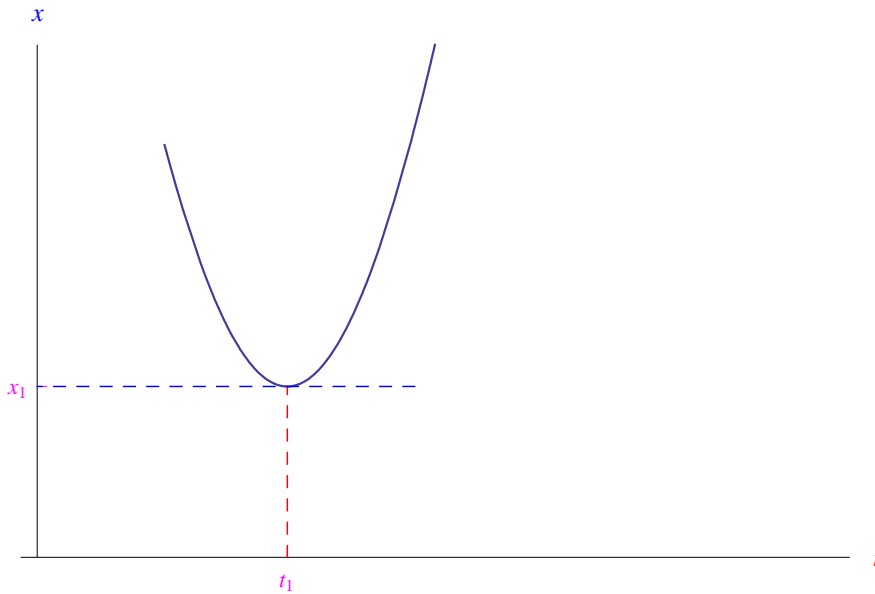


Figura 40: Esercizio 16. Andamento qualitativo e locale, del diagramma orario di una particella che compie un moto lungo l'asse x con $v(t_1) = 0$, $a(t_1) < 0$.

Ne consegue che $x(t)$ è strettamente decrescente in $I_\delta(t_1)$. Pertanto t_1 non è un istante di arresto. Nel predetto intorno, il diagramma orario volge la concavità verso l'alto, giacché è $\ddot{x}(t_1) > 0$. Il grafico è riportato in fig. 41

Il **caso 4** è simile al precedente per ciò che riguarda l'andamento della velocità, con la differenza che ora il diagramma è (localmente) concavo verso il basso.

Nel **caso 5** t_1 è un istante di arresto senza inversione del moto. Il diagramma orario presenta in $(t_1, x(t_1))$ un punto di flesso a tangente orizzontale, ascendente o discendente a seconda del segno della derivata prima (quindi, della velocità scalare) $\dot{x}(t)$ intorno a t_1 .

Esercizio 17 Una particella si muove lungo l'asse x , percorrendo una distanza d_1 a velocità costante v_1 e impiegando un tempo τ_1 . In tale istante cambia velocità proseguendo nello stesso verso per una distanza d_2 a una velocità v_2 impiegando un tempo τ_2 .

(a) Tracciare il diagramma orario del moto nell'intervallo $\tau_1 + \tau_2$.

(b) Dimostrare

$$\frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} \geq \frac{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \forall v_1, v_2 \quad (112)$$

$$d_1 = d_2 \implies \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \forall v_1, v_2$$

Per quale altra condizione vale il segno di uguaglianza?

Soluzione

Quesito (a)

Assumiamo un sistema di ascisse tale che per $t = 0$ la particella si trova nell'origine $x = 0$, come mostrato in fig. 42. Quindi

$$x(t) = v_1 t, \quad 0 \leq t \leq \tau_1 \quad (113)$$

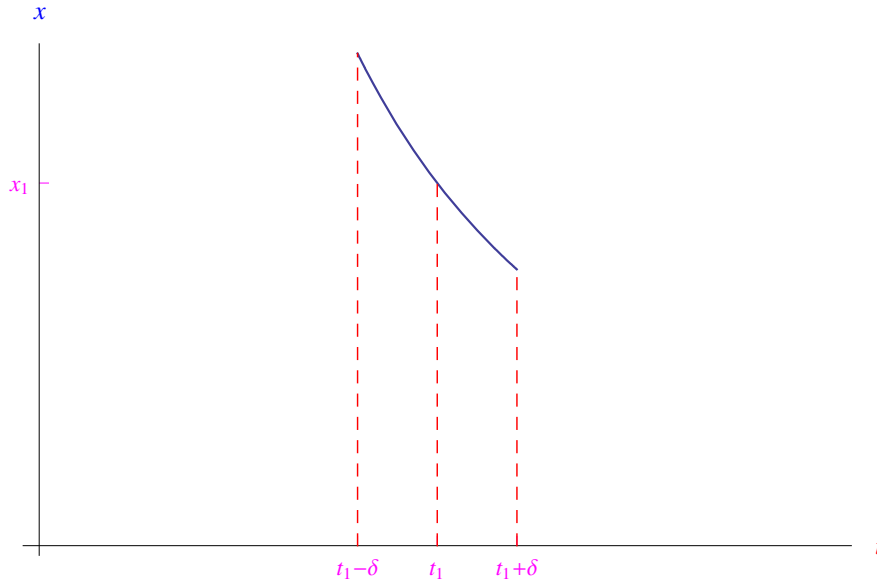


Figura 41: Esercizio 16. Andamento qualitativo e locale, del diagramma orario di una particella che compie un moto lungo l'asse x con $v(t_1) < 0$, $a(t_1) > 0$.

Deve essere

$$d_1 = x(\tau_1) \implies v_1 \tau_1 = d_1 \quad (114)$$

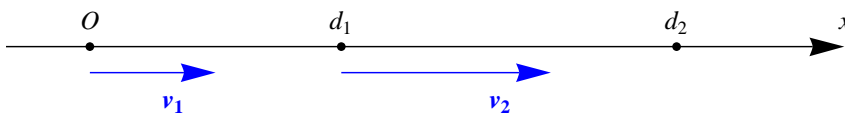


Figura 42: Configurazione cinematica esercizio 17.

Nell'istante $t = \tau_2$ la particella cambia velocità:

$$x(t) = d_1 + v_2(t - \tau_2), \quad 0 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 \quad (115)$$

Ne consegue l'equazione oraria nell'intervallo di tempo $\tau_1 + \tau_2$:

$$x(t) = \begin{cases} v_1 t, & 0 \leq t \leq \tau_1 \\ v_1 \tau_1 + v_2(t - \tau_2), & 0 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \quad (116)$$

Il diagramma orario è il grafico della funzione (116), che è l'unione di due segmenti raccordati nel punto $A(\tau_1, d_1)$ come mostrato in fig. 43.

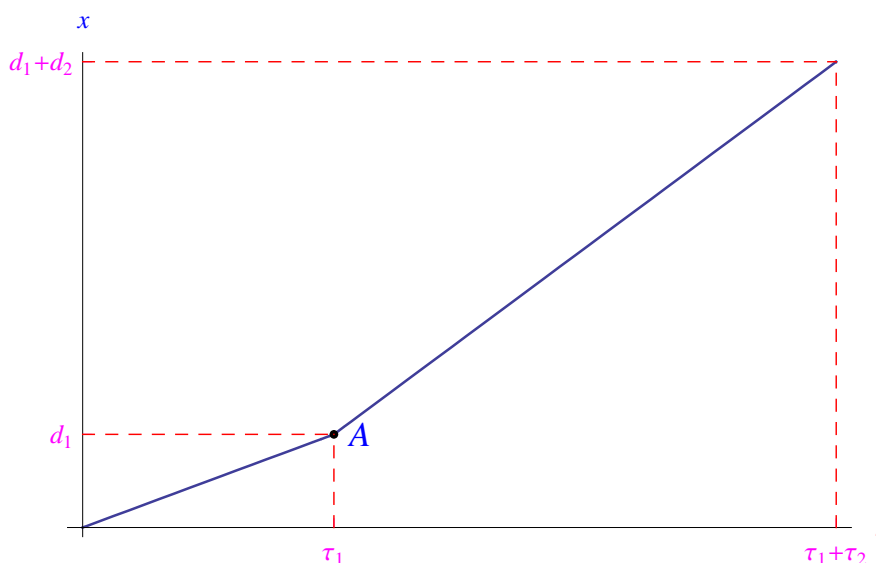


Figura 43: Grafico della funzione (116).

Il raccordo nel punto A dei predetti segmenti garantisce la continuità della funzione (116) in $t = \tau_1$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \tau_1^-} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \tau_1^-} v_1 t = (v_1 t_1)^- = d_1^- \\ \lim_{t \rightarrow \tau_1^+} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \tau_1^+} v_1 t = (v_1 t_1)^+ = d_1^+\end{aligned}\quad (117)$$

come mostrato in fig. 44. Cioè

$$\lim_{t \rightarrow \tau_1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow \tau_1^+} x(t) = d_1 = x(\tau_1),$$

da cui la continuità di $x(t)$ in $t = \tau_1$.

Osservazione 18 *La continuità di $x(t)$ è vitale per poter definire univocamente per ogni istante, la posizione della particella.*

Passiamo allo studio della derivata prima ovvero della velocità (scalare)

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) \equiv \dot{x}(t) \quad (118)$$

La funzione $x(t)$ è manifestamente derivabile nell'insieme $[0, \tau_1 + \tau_2] - \{\tau_1\}$. Studiamo il comportamento nel punto $t = \tau_1$. Derivata sinistra:

$$\dot{x}_-(\tau_1) = \left. \frac{d}{dt} (v_1 t) \right|_{t=\tau_1} = v_1 \quad (119)$$

Derivata destra

$$\dot{x}_+(\tau_1) = \left. \frac{d}{dt} [v_1 \tau_1 + v_2 (t - \tau_2)] \right|_{t=\tau_1} = v_2 \quad (120)$$

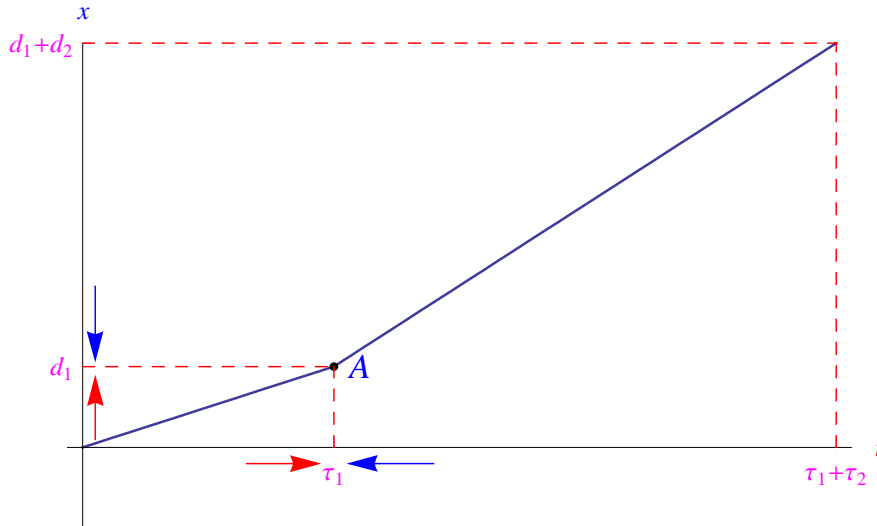


Figura 44: Comportamento della funzione (116) in un intorno del punto $t = \tau_1$.

Dal momento che $v_1 \neq v_2$ si ha

$$\dot{x}_-(\tau_1) \neq \dot{x}_+(\tau_1),$$

onde non derivabilità della funzione nel punto $t = \tau_1$. Tuttavia la funzione è derivabile a destra e a sinistra di τ_1 , giacché \dot{x}_- e \dot{x}_+ sono finite. Come è noto dal Calcolo l'interpretazione geometrica è quella di punto angoloso. In altri termini, il punto $A(\tau_1, d_1)$ è un punto angoloso per il diagramma orario $\Gamma : x = x(t)$.

Possiamo graficare la velocità in funzione del tempo, ottenendo il diagramma di fig. 45.

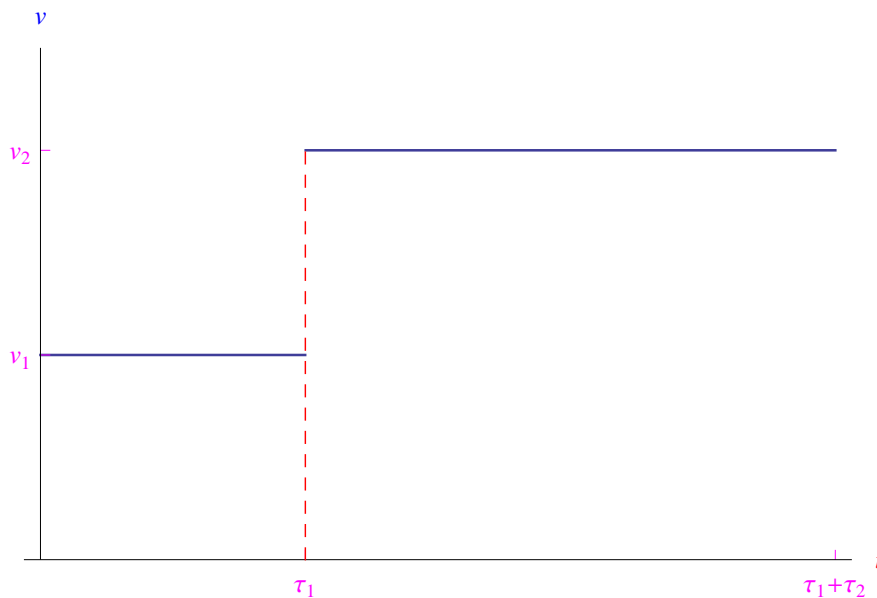


Figura 45: Andamento della velocità in funzione del tempo per la particella dell'esercizio (17)

Cioè

$$v(t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leq t < \tau_1 \\ v_2, & \tau_1 < t \leq \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \quad (121)$$

La funzione $v(t)$ non è definita in $t = \tau_1$, riuscendo

$$\lim_{t \rightarrow \tau_1^-} v(t) = v_1, \quad \lim_{t \rightarrow \tau_1^+} v(t) = v_2, \quad (122)$$

per cui la funzione $v(t)$ ha una **discontinuità di prima specie** in $t = \tau_1$. Il salto di discontinuità è

$$\sigma(\tau_1) = \lim_{t \rightarrow \tau_1^+} v(t) - \lim_{t \rightarrow \tau_1^-} v(t) = v_2 - v_1$$

Tutto questo ci sta dicendo che nell'istante $t = \tau_1$ la velocità cambia *bruscamente* (come richiesto dal problema). Osserviamo che tale circostanza è di difficile interpretazione cinematica, giacché impedisce la definizione di accelerazione nell'istante $t = \tau_1$. Infatti:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \equiv \dot{v}(t) \quad (123)$$

e dal momento che $v(t)$ non è definita in $t = \tau_1$, si ha che nemmeno $a(t)$ è ivi definita. Tuttavia, siccome abbiamo una variazione istantanea di velocità, siamo tentati di porre:

$$\lim_{t \rightarrow \tau_1} a(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } v_2 > v_1 \\ -\infty, & \text{se } v_2 < v_1 \end{cases} \quad (124)$$

Tale operazione di passaggio al limite è suggerita dalla **definizione di derivata**:

$$a(\tau_1) = \lim_{t \rightarrow \tau_1} \frac{v(t) - v(\tau_1)}{t - \tau_1} \quad (125)$$

Quesito (b)

Doabbiamo dimostrare

$$\frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} \geq \frac{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \forall v_1, v_2 \quad (126)$$

Per quanto visto nello svolgimento precedente, è $d_1 = v_1 \tau_1$, per cui

$$\frac{v_1^2 \tau_1 + v_2^2 \tau_2}{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2} \geq \frac{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad (127)$$

Esplicitiamo il secondo membro

$$\frac{v_1 \tau_1 + v_2 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{d_1 + d_2}{\tau_1 + \tau_2} = \bar{v}, \quad (128)$$

dove \bar{v} denota la velocità media nell'intervallo $\tau_1 + \tau_2$:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad (129)$$

Quindi la disuguaglianza (126) si scrive:

$$\frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} \geq \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Risulta

$$d_1 = d_2 \implies \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2),$$

che risolve la seconda parte del quesito b. Siccome $v_1\tau_1 + v_2\tau_2 > 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$, la (127) diventa

$$(v_1^2\tau_1 + v_2^2\tau_2)(\tau_1 + \tau_2) \geq (v_1\tau_1 + v_2\tau_2)^2$$

Segue

$$v_1^2 + v_2^2 \geq 2v_1v_2, \quad \forall v_1, v_2$$

In particolare

$$v_1 = v_2 \implies 2v_1^2 = 2v_1^2$$

Abbiamo quindi l'ulteriore condizione $v_1 = v_2$ per la quale la prima delle (112) si presenta nel segno di uguaglianza.

Esercizio 19 *L'equazione oraria del moto di una particella vincolata all'asse x , è*

$$x(t) = 9.75 + 1.50t^3, \quad (130)$$

dove i coefficienti hanno le appropriate unità di misura in modo che t si misuri in secondi e x in centimetri. Calcolare

- (a) la velocità vettoriale media durante l'intervallo di tempo da $t = 2.00$ s e $t = 3.00$ s;
- (b) la velocità vettoriale istantanea all'istante $t = 2.00$ s;
- (c) la velocità vettoriale istantanea all'istante $t = 3.00$ s;
- (e) la velocità vettoriale istantanea quando la particella è a metà strada tra la posizione a $t = 2.00$ s e la posizione a $t = 3.00$ s;
- (f) l'istante in cui la velocità istantanea uguaglia la velocità media nell'intervallo di tempo da $t = 2.00$ s e $t = 3.00$ s.

Soluzione

Quesito (a)

Poniamo $t_1 = 2.00$ s, $t_2 = 3.00$ s. La velocità scalare media nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = 28.50 \text{ cm/s} \quad (131)$$

La velocità vettoriale media nello stesso intervallo è ovviamente

$$\bar{\mathbf{v}} = (28.50 \text{ cm/s}) \mathbf{i}, \quad (132)$$

essendo \mathbf{i} il versore dell'asse x .

Quesito (b)

La velocità scalare istantanea è

$$v(t) = \dot{x}(t) = 4.5t^2 \quad (133)$$

Tale espressione ci consente di calcolare la velocità scalare istantanea a t_1

$$v_1 = v(t_1) = 18.80 \text{ cm/s}$$

e la corrispondente velocità vettoriale istantanea

$$\mathbf{v}_1 = (18.80 \text{ cm/s}) \mathbf{i} \quad (134)$$

Quesito (c)

La velocità scalare istantanea a $t = t_2$ è

$$v_2 = v(t_2) = 40.5 \text{ cm/s},$$

onde

$$\mathbf{v}_2 = (40.5 \text{ cm/s}) \mathbf{i} \quad (135)$$

Quesito (d)

La velocità scalare istantanea a $t_3 = 2.50 \text{ s}$ è:

$$v_3 = v(t_3) = 28.125 \text{ cm/s},$$

per cui

$$\mathbf{v}_3 = (28.125 \text{ cm/s}) \mathbf{i} \quad (136)$$

Quesito (e)

La partcella è a metà strada tra la posizione

$$x_1 = x(t_1) = 9.75 + 1.50t_1^3$$

e la posizione

$$x_2 = x(t_2) = 9.75 + 1.50t_2^3$$

nell'istante t_x in cui la sua ascissa è

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (137)$$

Cioè

$$\bar{x} = \frac{1}{2} [2 \cdot 9.75 + 1.50(t_1^3 + t_2^3)] = 36.00 \text{ cm}$$

L'istante t_x si ricava dall'equazione oraria (130):

$$\bar{x} = 9.75 + 1.50t_x^3 \implies t_x = \sqrt[3]{\frac{\bar{x} - 9.50}{1.50}} \simeq 2.60 \text{ s}$$

In tale istante la velocità è

$$v_x = v(t_x) = 4.5t_x^2 = 30.42 \text{ cm/s} \quad (138)$$

Quesito (f)

Per il teorema di Lagrange

$$\exists \tau \in (t_1, t_2) \mid \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_2 - t_1} = \dot{x}(\tau)$$

Cioè

$$28.5 = 4.5\tau^2 \implies \tau = 2.51 \text{ s}$$

ovvero un pò prima del metà percorso. Tale risultato è graficato in fig. 46 dove è tracciata la retta tangente al diagramma orario $\gamma : x = x(t)$ nel punto $(\tau, x(\tau))$, ossia la retta di equazione

$$x = 28.50t - 38.06 \quad (139)$$

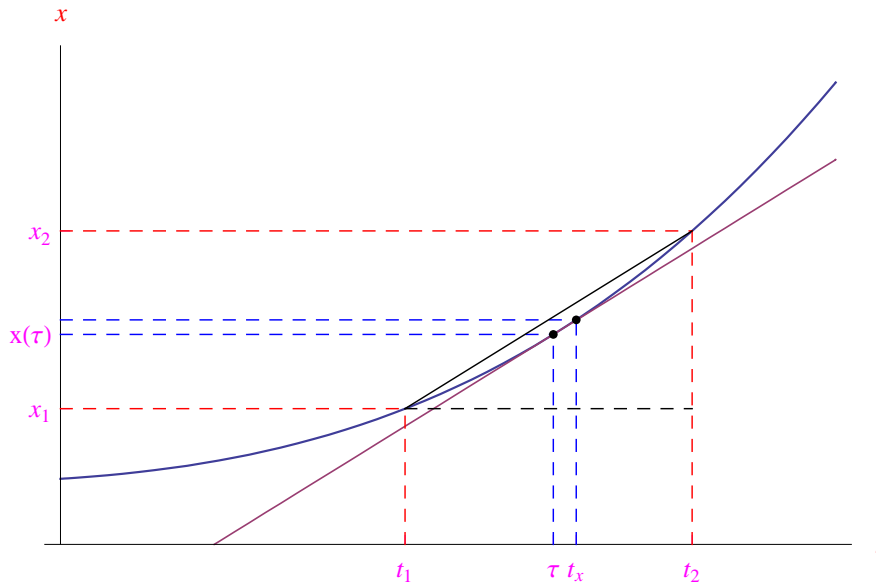


Figura 46: Nell'istante τ la velocità istantanea è pari alla velocità media nell'intervallo $[\tau_1, \tau_2]$.

Esercizio 20 Studiare il moto di una particella vincolata a muoversi lungo l'asse x , secondo la legge oraria:

$$x(t) = 2e^{-3t} + \ln(t+1), \quad (140)$$

dove i coefficienti hanno le appropriate unità di misura.

Soluzione

Studiare il moto (140) equivale ad eseguire uno **studio di funzione** (della $x(t)$).

Insieme di definizione

La funzione è definita per $t > -1$, ma a noi interessa la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$, poiché assumiamo tacitamente $t = 0$ come istante iniziale.

Intersezioni con gli assi

Asse delle ordinate:

$$x(0) = 2 + \ln 1 = 2$$

$A(0, 2)$ è, dunque, il punto di intersezione del diagramma orario $\gamma : x = x(t)$ con l'asse delle ordinate o ciò che è lo stesso, $x = 2$ è l'ascissa della particella a $t = 0$.

Asse delle ascisse:

$$x(t) = 0 \iff 2e^{-3t} + \ln(t+1) = 0 \quad (141)$$

La (141) è priva di radici, per cui

$$\nexists t \in [0, +\infty) \mid x(t) = 0$$

In particolare (con **Mathematica**):

$$x(t) > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (142)$$

Comportamento agli estremi

Il punto $t = 0$ è di continuità per la funzione. Calcoliamo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2 \cdot \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} + \ln(+\infty) = +\infty, \quad (143)$$

cioè la funzione diverge positivamente, i.e. la particella si allontana definitivamente dalla posizione iniziale.

Asintoti

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-3t} + \ln(t+1)}{t} \\ &= 2 \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3t}}{t}}_{= \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0^+}{+\infty} = 0} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{t}\end{aligned}$$

Il secondo limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{t} = 0,$$

si calcola per confronto tra **infiniti**. In definitiva:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = 0, \quad (144)$$

onde non esistono asintoti obliqui.

Studio della derivata prima

Derivando la funzione $x(t)$ otteniamo

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1 - 6(t+1)e^{-3t}}{t+1} \quad (145)$$

Gli zeri $\dot{x}(t)$ ovvero i punti estremali della funzione $x(t)$, sono le radici dell'equazione trascendente

$$1 - 6(t+1)e^{-3t} = 0, \quad (t \geq 0),$$

che si risolve numericamente, ottenendo l'unica radice

$$t_1 \simeq 0.79 \text{ s} \quad (146)$$

Inoltre

$$\begin{aligned}t > t_1 &\implies \dot{x}(t) > 0 \\ t < t_1 &\implies \dot{x}(t) < 0,\end{aligned}$$

onde la funzione è strettamente decrescente in $(0, t_1)$ e strettamente crescente in $(t_1, +\infty)$. Ciò implica che t_1 è punto di minimo relativo per $x(t)$. Riesce

$$x_{\min} = x(t_1) \simeq 0.77 \text{ s} \quad (147)$$

Cinematicamente, l'istante t_1 è di inversione del moto: la particella a $t = 0$ parte da $x = 2$, avvicinandosi all'origine (x decresce). Giunta in x_{\min} si arresta per invertire il moto, allontanandosi definitivamente in virtù della (143). A $t = 0$ la velocità scalare istantanea è

$$v(0) = \dot{x}(0) = -5 \text{ cm/s} \quad (148)$$

La velocità vettoriale istantanea nel medesimo istante è

$$v(0) = (-5 \text{ cm/s}) \mathbf{i},$$

ove \mathbf{i} è il versore dell'asse x .

Studio della derivata seconda

Abbiamo

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{18e^{-3t} - 1}{(t+1)^2},$$

i cui zeri sono le radici dell'equazione

$$8e^{-3t} - 1 = 0, \quad (t \geq 0)$$

Al solito, risolvendo numericamente

$$t \simeq 1.6 \text{ s} \stackrel{\text{def}}{=} t_2 > t_1$$

Il punto $F(t_1, x_{flex} = x(t_2))$ è un punto di flesso a tangente obliqua. Infatti, il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma orario nel punto B è

$$\dot{x}(t_2) \simeq 0.33 \text{ cm/s} \quad (149)$$

Ne consegue che F è un punto di flesso a tangente obliqua (ascendente). Segue

$$t < t_2 \implies \ddot{x}(t) > 0$$

$$t > t_2 \implies \ddot{x}(t) < 0$$

Cioè il diagramma orario è concavo verso l'alto per $t < t_2$, mentre per $t > t_2$ riesce concavo verso il basso. Cinematicamente, il moto è accelerato per $t < t_2$ e decelerato per $t > t_2$.

In fig. 47 riportiamo il diagramma orario, confrontato con quello della velocità e dell'accelerazione.

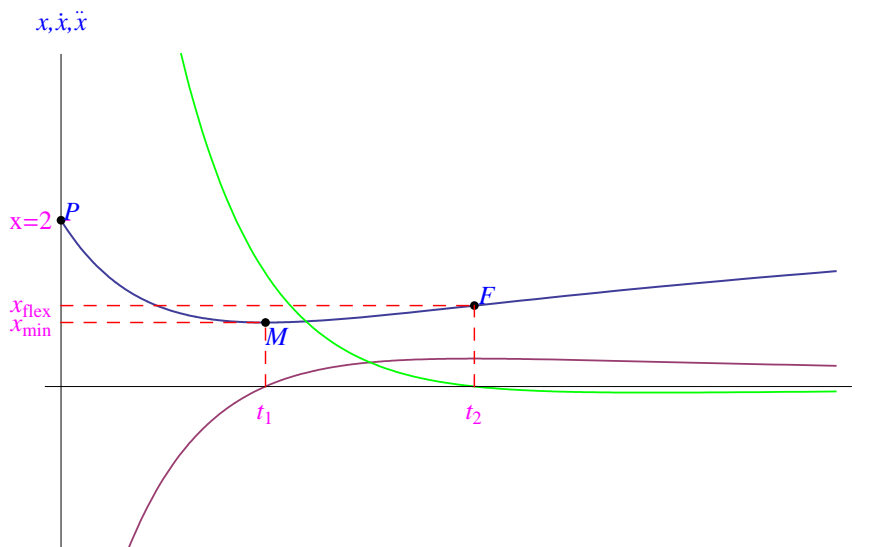


Figura 47: Diagramma orario del moto della particella (esercizio 20). La curva viola è il grafico della derivata prima, ovvero della velocità, mentre la curva verde è il grafico della derivata seconda (accelerazione).