Il biliardo di Barry

Marcello Colozzo

Sia dato un sistema quanto-meccanico S_q in regime nonrelativitico, costituito da una particella di massa m che si muove nel piano in una regione sede di un campo di forze di energia potenziale:

$$V(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}=(x,y)}{\equiv} \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) \in D \\ +\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{1}$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

essendo $a > b > 0$ costanti assegnate. Avendo una barriera di potenziale, lo spettro dell'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}) \tag{2}$$

è puramente discreto, con autovalori non negativi:

$$\sigma\left(\hat{H}\right) \equiv \sigma_d\left(\hat{H}\right) \subseteq [0, +\infty) \tag{3}$$

Scriviamo l'equazione agli autovalori, i.e. l'equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo:

$$\nabla^2 u + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x,y)\right] = 0 \tag{4}$$

Evidentemente

$$u(x,y) = 0, \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - D,$$

giacchè abbiamo una probabilità nulla di attraversamento della barriera di potenziale. Ciò implica che la (4) assume la forma seguente (con la giusta condizione al contorno):

$$\begin{gathered} \nabla^2 u + \frac{2mE}{\hbar^2} u = 0, \quad (x,y) \in \mathring{D} \\ u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in \partial D \end{gathered} \tag{5}$$

Segue

$$u(x,y) = N \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

dove $N > 0$ è una costante di normalizzazione, mentre il modulo del vettore $\mathbf{k}$ è $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$. Imponendo la condizione al contorno:

$$u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in \partial D$$

si perviene a una discretizzazione della variabile k, per cui riesce k_n, e dei corrispondenti autovalori:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \tag{6}$$

È stato dimostrata l'esistenza di una costante caratteristica $\Omega > 0$ con le dimensioni di una pulsazione, tale che

$$E_n = \hbar\Omega \operatorname{Im} \rho_n,$$

essendo ρ_n l'n-esimo zero della funzione zeta di Riemann. Se il sistema è inizialmente preparato in una sovrapposizione di autofunzioni dell'energia:

$$\psi(x,y,0) \overset{def}{=} \psi_0(x,y) = N \sum_n c_n^{(0)} \sin(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}), \tag{7}$$

si ha che lo stato quanto-meccanico a un tempo $t < t_c$, essendo quest'ultimo l'istante in cui l'onda di probabilità associata alla particella raggiunge il bordo del biliardo (cioè $(x, y) \in \partial D$), è l'evoluto temporale di (7):

$$\psi\left(x, y, t\right) = N \sum_n c_n^{(0)} e^{-i \operatorname{Im} \rho_n \Omega t} \sin\left(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}\right), \quad \forall t \in [0, t_c] \tag{8}$$

Il problema che si apre consiste nel determinare l'evoluzione temporale a $t > t_c$, in conseguenza della riflessione dell'onda di probabilità $\psi\left(x, y, t_c\right)$.