Ancora sul Lemma di Coriolis

Marcello Colozzo

0.1 Il concetto di base ortonormale rotante

Riprendiamo l'equazione che lega la derivata assoluta di una funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ alla derivata relativa della medesima funzione, determinata in un sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ rotante rispetto al sistema $K(Oxyz)$ in cui è calcolata la predetta derivata assoluta:

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}, \tag{1}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare di K'. Tale grandezza soddisfa le equazioni di Poisson

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}' \end{cases} \tag{2}$$

ove $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono i versori degli assi coordinati di K'. Per un assegnato vettore $\boldsymbol{\omega}$ le (2) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali vettoriali (quindi sei equazioni differenziali ordinarie) nelle incognite $\mathbf{i}'(t), \mathbf{j}'(t), \mathbf{k}'(t)$. In sostanza, attraverso l'integrazione del predetto sistema, conosicmo la legge con cui i versori del sistema rotante variano in funzione del tempo. Si noti tuttavia, che nelle (2) il vettore $\boldsymbol{\omega}$ deve essere rappresentato nella base ortonormale $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ che possiamo chiamare *base rotante* e non nella base ortonormale del sistema fisso K, che possiamo denominare *base fissa*. D'altra parte, la (1) può essere scritta in una qualunque base ortonormale dello spazio euclideo tridimensionale. Ma se rappresentiamo il secondo membro della predetta equazione nella base rotante, tale dovrà essere il primo membro. Ad esempio, se $\mathbf{u}(t)$ è il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ di una particella, la (1) restituisce la ben nota legge di composizione delle velocità

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{3}$$

Per quanto precede, il vettore velocità assoluta risulterà rappresentato nella base rotante, mentre ciò che è fisicamente interessante, sono le sue componenti cartesiane nella base fissa. Un esempio numerico è dato dal problema (risolto) n. 6.5 del testo [1]. Tutto ciò è una conseguenza di come vengono scritte le varie grandezze cinematiche:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad (\text{in } K) \\ &\mathbf{r}(t) = x'(t)\,\mathbf{i}' + y'(t)\,\mathbf{j}' + z'(t)\,\mathbf{k}' \qquad (\text{in } K') \end{aligned}$$

La velocità assoluta è

$$\mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\left[x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\right] = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \equiv \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_a \tag{4}$$

La velocità relativa

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= \frac{d}{dt}\left[x'(t) \underset{\text{fisso}}{\underset{\downarrow}{\mathbf{i}'}} + y'(t) \underset{\text{fisso}}{\underset{\downarrow}{\mathbf{j}'}} + z'(t) \underset{\text{fisso}}{\underset{\downarrow}{\mathbf{k}'}}\right] \\ &= \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' \equiv \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_r \end{aligned} \tag{5}$$

Se invece consideriamo $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ funzioni del tempo a causa della rotazione di K', ovvero se stiamo osservando il moto della particella nel sistema di riferimento K:

$$\mathbf{r}\,(t) = x'\,(t)\,\mathbf{i}'\,(t) + y'\,(t)\,\mathbf{j}'\,(t) + z'\,(t)\,\mathbf{k}'\,\,(t) \tag{6}$$

L'applicazione dell'operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$ ad ambo i membri dell'equazione appena scritta, restituisce la derivata assoluta del vettore posizione, i.e. la velocità assoluta della particella

$$\mathbf{v}_a = \underbrace{\dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}'}_{=\mathbf{v}_r} + \underbrace{x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}}_{=\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}} \tag{7}$$

Abbiamo così ottenuto la rappresentazione cartesiana della velocità assoluta nella base rotante. Vediamo come si risolve con il formalismo delle matrici. Partiamo dal caso più semplice: una particella è ferma rispetto al sistema di coordinate $K\,(Oxyz)$ nel punto $(x_0, y_0, 0)$. Calcoliamo la sua velocità rispetto a un sistema di coordinate $K'\,(O'x'y'z')$ con $O' \equiv O$, $z' \equiv z$ e in rotazione uniforme rispetto a K attorno all'asse z in verso antiorario (relativamente a un osservatore fermo in K con i piedi in O' ed orientato nel verso delle z crescenti. Cfr. fig. 1).

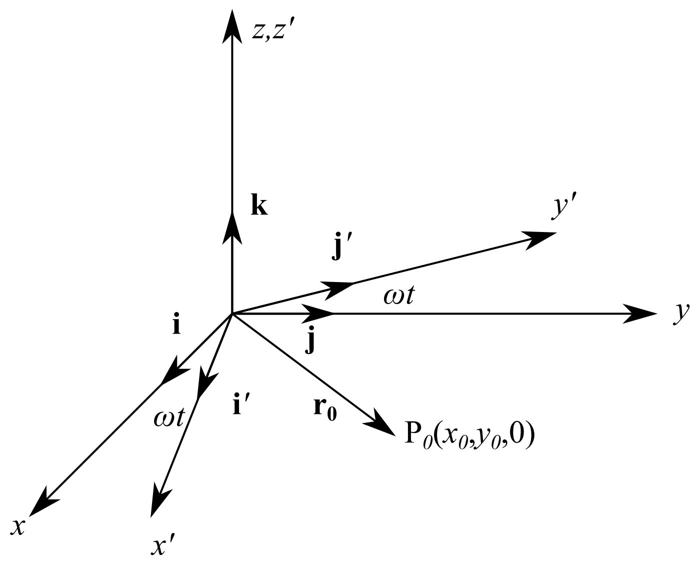

Figura 1: Rispetto all'osservatore K la particella è ferma nel piano xy (precisamente in P_0).

Mentre K vede la particella ferma in P_0, per l'osservatore K' la stessa particella compie un moto circolare uniforme nel piano coordinato $x'y'$ con velocità angolare (vettoriale) $-\omega$, ovvero in senso orario. Matematicamente:

$$\text{osservatore } K\text{: } \mathbf{r}\,(t) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} \equiv r_0 \Longrightarrow \mathbf{v}_a = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_a = \mathbf{0}$$

$$\text{osservatore } K'\text{: } \mathbf{r}\,(t) = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}';\;\; \mathbf{v}_r = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_r = \omega\wedge\mathbf{r}$$

Siamo tentati a scrivere

$$\omega\wedge\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega y_0\mathbf{i} + \omega x_0\mathbf{j} \quad \text{(ERRATO!)}$$

Lo sviluppo corretto è

$$\omega \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega' \\ x\prime & y\prime & 0 \end{vmatrix} = -\omega y' \mathbf{i}' + \omega x\prime \mathbf{j}'$$

Il problema è che non conosciamo come variano i versori della base rotante. Ma ciò si può ricavare, e a tale scopo applichiamo il formalismo delle matrici di rotazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\omega t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo

$$R(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue

$$x' = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \;\; y' = x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

In particolare, per $(x, y, z) = (x_0, y_0, 0)$

$$x' = x_0\cos\omega t - y_0\sin\omega t, \;\; y' = x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t$$

che sono le equazioni orarie del moto della particella rispetto a K'. È facile convincersi che è un moto circolare uniforme. Infatti, quadrando e sommando

$$x'^2 + y'^2 = r_0^2, \tag{8}$$

cioè la traiettoria è la circonferenza del piano coordinato $x'y'$ di centro l'origine e raggio r_0. Derivando otteniamo le componenti della velocità relativa

$$\dot{x}' = -\omega y', \;\; \dot{y}' = \omega x',$$

e quindi la formula precedentemente trovata:

$$\mathbf{v}_r = -\omega y' \mathbf{i}' + \omega x\prime \mathbf{j}'$$

Riferimenti bibliografici

[1] Spiegel M.R. *Meccanica Razionale*, Schaum