

1 Derivata di una funzione reale di variabile reale (versione beta)

1.1 Definizione di derivata

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$. Senza perdita di generalità, supponiamo che X sia un intervallo. Assegnato $x_0 \in X$:

$$f(x) - f(x_0) \quad (1)$$

La (1) è una funzione di (x, x_0) e si chiama **incremento della funzione** $f(x)$ relativo al punto x_0 . Si consideri ora il rapporto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

La grandezza (2) è una funzione di x definita in $X - \{x_0\}$ ed è nota come **rapporto incrementale** di $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Il punto x_0 è manifestamente punto di accumulazione per l'insieme di definizione della funzione (2) per cui ci proponiamo il calcolo del limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

Se la funzione è continua in x_0 il limite (3) si presenta nella forma indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}, \quad (4)$$

Possono presentarsi tre casi distinti relativamente al comportamento del rapporto incrementale (2). Precisamente, tale rapporto può essere:

1. convergente;
2. divergente;
3. non regolare.

Nel primo caso diremo che la funzione $f(x)$ è **derivabile nel punto** x_0 , e il limite (3) si chiama **derivata della funzione** $f(x)$ **nel punto** x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli: $f'(x_0)$, $Df(x)|_{x=x_0}$, donde scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (5)$$

Nel caso 2 diremo che **la funzione** $f(x)$ **ha derivata infinita** in x_0 . Più precisamente, se il rapporto incrementale diverge positivamente:

$$f'(x_0) = +\infty \quad (6)$$

Se invece diverge negativamente:

$$f'(x_0) = -\infty \quad (7)$$

Esempio 1 Determinare la derivata di $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$.

Soluzione 2 Abbiamo:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \quad (8)$$

Sussiste la seguente

Proposizione 3 $(f(x) \text{ è derivabile in } x_0) \implies (f(x) \text{ è continua in } x_0)$

Dimostrazione. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] = f'(x_0) \cdot 0 \underset{|f'(x_0)| < +\infty}{=} 0$

Si osservi che tale proposizione non è invertibile, cioè:

$$(f(x) \text{ è continua in } x_0) \not\Rightarrow (f(x) \text{ è derivabile in } x_0) \quad (9)$$

In altri termini, la continuità di una funzione è condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità. Per contro, la derivabilità è condizione sufficiente per la continuità. La (9) può essere provata attraverso degli esempi di funzioni continue in un punto ma non ivi derivabili.

Esempio 4 La funzione:

$$f(x) = |x|,$$

è continua in $x_0 = 0$, ma non è ivi derivabile.

Determiniamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}$$

Tale rapporto è non regolare in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = +1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad (10)$$

donde la funzione non è derivabile in x_0 .

Osservazione 5

$$(f(x) \text{ ha derivata infinita in } x_0) \not\Rightarrow (f(x) \text{ è continua in } x_0) \quad (11)$$

Esempio 6 Si consideri la funzione **segno di x** :

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (12)$$

La (12) non è continua in $x_0 = 0$. Determiniamo in tale punto il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty \implies f'(x_0) = +\infty$$

Si conclude che la funzione $\operatorname{sign} x$ ha derivata infinita in $x_0 = 0$ e non è ivi continua.

Se eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \rightarrow \xi = x - x_0, \quad (13)$$

il rapporto incrementale (2) si scrive:

$$\frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi} \quad (14)$$

La derivata:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi} \quad (15)$$

$\xi = x - x_0$ è l'incremento della variabile indipendente che spesso viene indicato con:

$$\Delta x \quad (16)$$

La notazione simbolica (16) si generalizza a qualsiasi grandezza, poiché Δ denota una "differenza". Ad esempio, nel caso della funzione $f(x)$, scriviamo:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f \quad (17)$$

Nella (17) x_0 è una variabile muta, per cui:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$$

Il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (18)$$

La derivata:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (19)$$

Se la funzione $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in X' \subseteq X$, risulta definita in X' una nuova funzione $f'(x)$ che chiameremo **derivata prima della funzione $f(x)$** . È spesso utilizzato il simbolo:

$$Df(x) \tag{20}$$

Scriviamo:

$$Df(x) = f'(x) \tag{21}$$

La (21) definisce l'**operatore di derivazione** D . Si tratta di un operatore lineare¹ che applicato ad una qualunque funzione derivabile ci fa passare alla sua derivata. L'operatore D agisce anche sulla derivata di $f(x)$, dando origine alla derivata della derivata, denominata **derivata seconda della funzione** $f(x)$ e si indica con uno dei simboli:

$$f''(x), D^2f(x) \tag{22}$$

Con tale definizione, la derivata $f'(x)$ è nota come **derivata prima della funzione** $f(x)$. Il secondo dei simboli (22) si giustifica osservando che la derivata seconda è il risultato dell'applicazione dell'operatore D sulla derivata prima:

$$Df'(x) = D(Df(x)) = D^2(f(x)) \tag{23}$$

Il processo di applicazione dell'operatore di derivazione può essere iterato, per cui definiamo la **derivata di ordine n della funzione**² $f(x)$ il risultato dell'applicazione dell'operatore D^n sulla funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \underbrace{D(D \dots D(f(x)))}_{n \text{ volte}} \\ &= D^n f(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Abbiamo visto che il rapporto incrementale relativo alla funzione $f(x) = |x|$ nel punto $x_0 = 0$ è non regolare. Più precisamente, è regolare a sinistra e a destra [eq. (10)]. In casi come questi, si dice che la funzione è **derivabile a sinistra e a destra**:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \tag{25}$$

$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ si chiamano **derivata sinistra** e **derivata destra della funzione** $f(x)$ **nel punto** x_0 .

1.2 Interpretazione geometrica della derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che la funzione sia ivi continua.

Assegnato il riferimento monometrico ortogonale $R(Oxy)$, indichiamo con Γ il diagramma cartesiano della funzione. Preso ad arbitrio $x \in [a, b] - \{x_0\}$, consideriamo i punti $P_0(x_0, f(x_0))$, $P(x, f(x)) \in \Gamma$ (vedere fig. 1).

¹Affronteremo in un prossima sezione il significato di tale locuzione.

²Da un punto di vista formale la funzione $f(x)$ è la derivata di ordine zero.

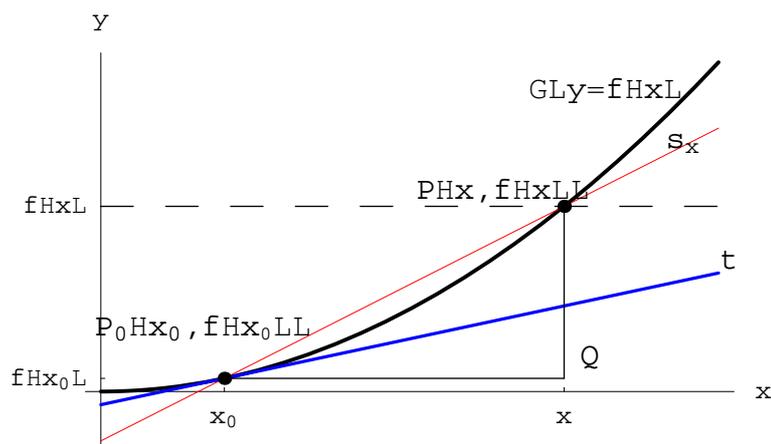


Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)$. Senza perdita di generalità abbiamo considerato $x > x_0, f(x) > f(x_0)$.

Ciò premesso, sia s_x la retta passante per i punti P_0, P , orientata nel verso delle ascisse crescenti. Chiamiamo s_x **retta secante** al diagramma per i punti P_0, P . La sua equazione è:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) \quad (26)$$

Qui m è il coefficiente angolare di s_x . Dalla Geometria:

$$m = \tan \theta(x), \quad (27)$$

essendo $\theta(x)$ al misura in radianti dell'angolo che la retta s_x forma con l'asse x ; $\theta(x)$ è una funzione definita in $[a, b] - \{x_0\}$; inoltre:

$$|\theta(x)| < \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

Dalla figura 1:

$$\tan \theta(x) = \frac{\overline{QP}}{\overline{QP_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (29)$$

Cioè:

$$\theta(x) = \arctan \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \quad (30)$$

Per quanto detto, la funzione $\theta(x)$ è definita in $[a, b] - \{x_0\}$, e supponendo che sia regolare in x_0 , poniamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta(x) = \theta_0 \quad (31)$$

Per la (28):

$$|\theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

Dalla definizione di $\theta(x)$ segue che il limite θ_0 individua una particolare retta t (fig. 1).
Poniamo:

$$\Delta\theta = \theta(x) - \theta_0 \quad (33)$$

La (33) è l'incremento della funzione $\theta(x)$ relativo all'incremento $x - x_0$ della variabile indipendente. Da un punto di vista geometrico $\Delta\theta$ è la misura in radianti dell'angolo tra le rette t, s_x .

Se il punto P tende a P_0 , segue che x tende a x_0 , la retta s_x ruota attorno a P_0 per sovrapporsi alla retta t . Pertanto:

Definizione 7 La retta t è la **posizione limite** della retta secante s_x alla curva Γ al tendere di P e P_0 . Quindi t è la **retta tangente** a Γ nel punto P_0 .

Dalle equazioni (30)-(31):

$$\theta_0 = \arctan \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \quad (34)$$

Consideriamo il caso particolare in cui la retta t non è parallela all'asse y ($|\theta_0| < \pi/2$).
Abbiamo:

$$|\theta_0| < \frac{\pi}{2} \iff \left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < +\infty,$$

In altri termini, la retta tangente a Γ nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ esiste e non si dispone parallelamente all'asse y , se e solo se la funzione è derivabile in x_0 . In simboli:

$$|\theta_0| < \frac{\pi}{2} \iff |f'(x_0)| < +\infty \quad (35)$$

Inoltre:

$$\theta_0 = \arctan f'(x_0) \iff f'(x_0) = \tan \theta_0 \quad (36)$$

Conclusione 8 La derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il coefficiente angolare m_0 della retta tangente alla curva Γ) $y = f(x)$. L'equazione della suddetta retta tangente è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (37)$$

Nel caso speciale in cui $f'(x_0) = 0$, la retta tangente è parallela all'asse x (figura 7).
A titolo di esempio consideriamo la funzione $f(x) = x^3$. Poniamo $x_0 = 2$, $x = 4$, per cui:

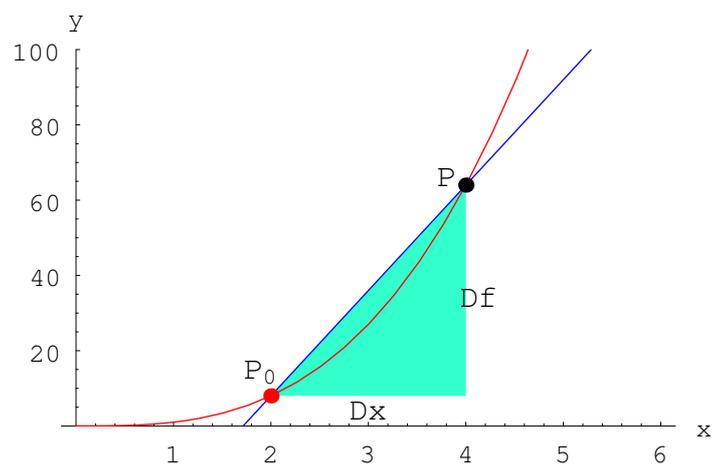
$$\begin{aligned} P_0(x_0 = 2, f(x_0) = 8) \\ P(x = 4, f(x) = 64) \end{aligned}$$

Troviamo per tale coppia di punti:

$$\Delta f = 56; \Delta x = 2$$

La retta secante ha equazione:

$$s_x) y = -48 + 28x$$



Se immaginiamo di diminuire l'incremento Δx della variabile indipendente, la retta secante s_x ruota intorno al punto P_0 come risulta dalle figure 2, 3, 4, 5.

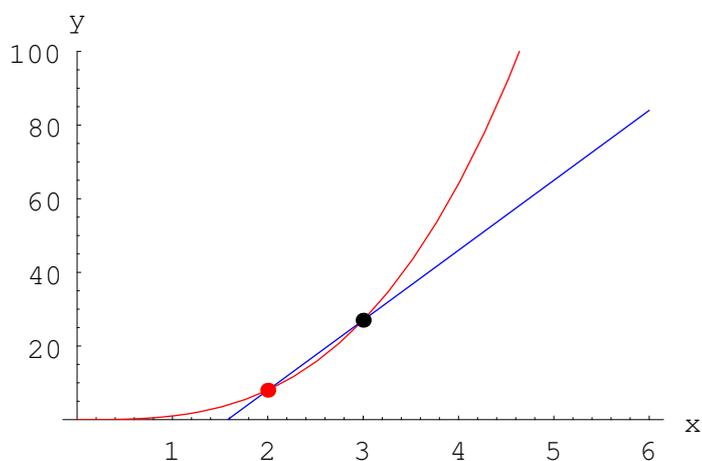


Figura 2:

Nella tabella seguente sono riportati i valori numerici del rapporto incrementale Δf al diminuire dell'incremento Δx della variabile indipendente.

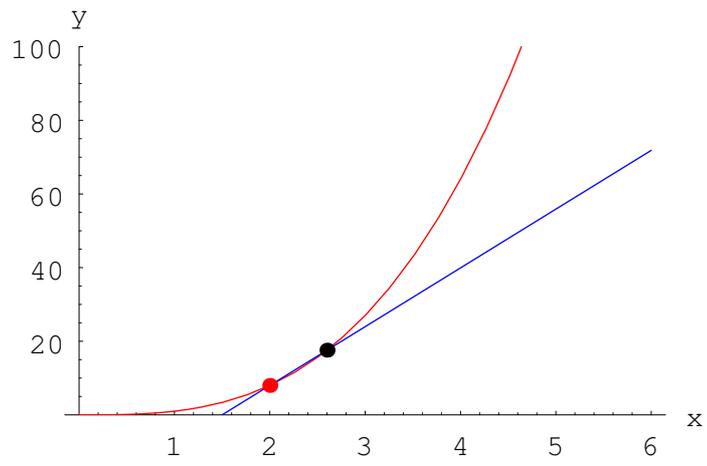


Figura 3:

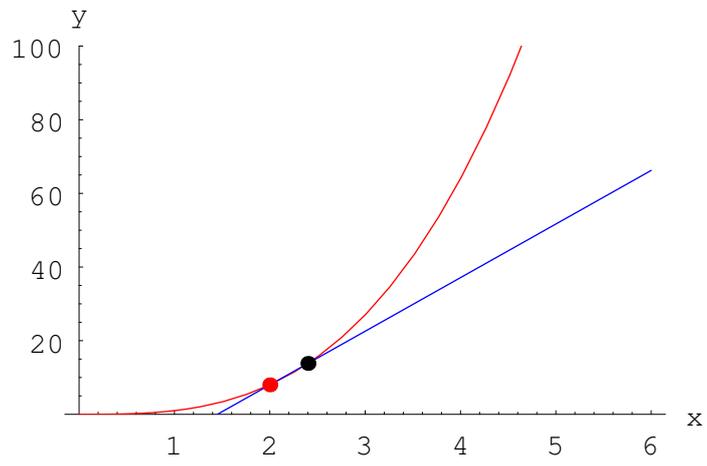


Figura 4:

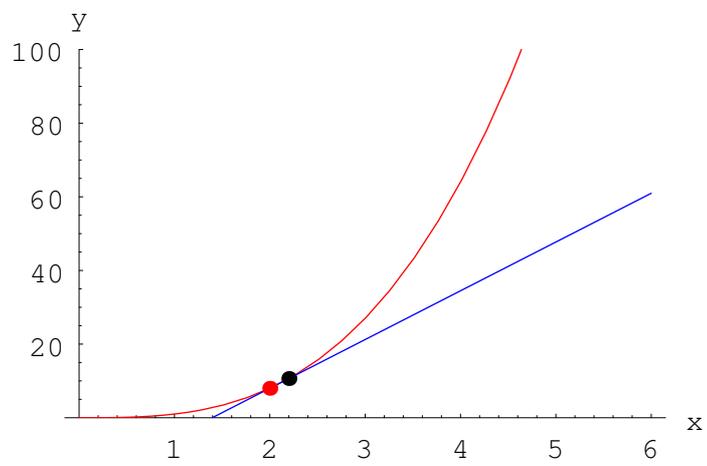


Figura 5:

Δx	Δf
0.1	12.61
0.01	12.0601
0.001	12.006
0.0001	12.0006
0.00001	12.0001
1×10^{-6}	12.0
1×10^{-7}	12.0
1×10^{-8}	12.0
1×10^{-9}	12.0
1×10^{-10}	12.0

Osservazione 9 La definizione di retta tangente conseguente dalla definizione di derivata è più rigorosa di quella offerta dal senso comune, secondo cui una retta tangente interseca una curva in un sol punto. Come controesempio per quest'ultima definizione, si consideri la funzione $f(x) = \sin x$. La retta di equazione $y = 1$ è tangente alla curva $y = \sin x$. Orbene, tale retta interseca in infiniti punti il grafico di $\sin x$ (fig. 6).

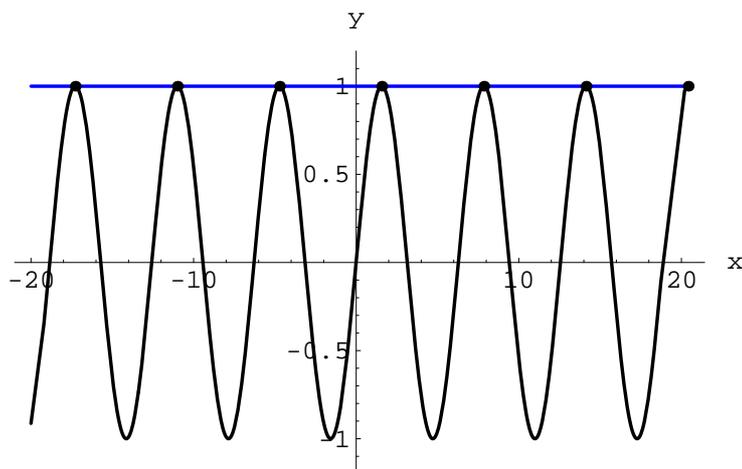


Figura 6: Grafico di $f(x) = \sin x$ e della retta $y = 1$, quale retta tangente a $y = f(x)$ nei punti $P_k (x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Se invece la funzione ha in x_0 derivata infinita, la retta tangente è verticale, orientata verso l'alto [$f'(x_0) = +\infty$] o verso il basso [$f'(x_0) = -\infty$] (figg. 8-9). La sua equazione è $x = x_0$. Infatti:

$$f'(x_0) = +\infty \implies \theta_0 = +\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x_0) = -\infty \implies \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

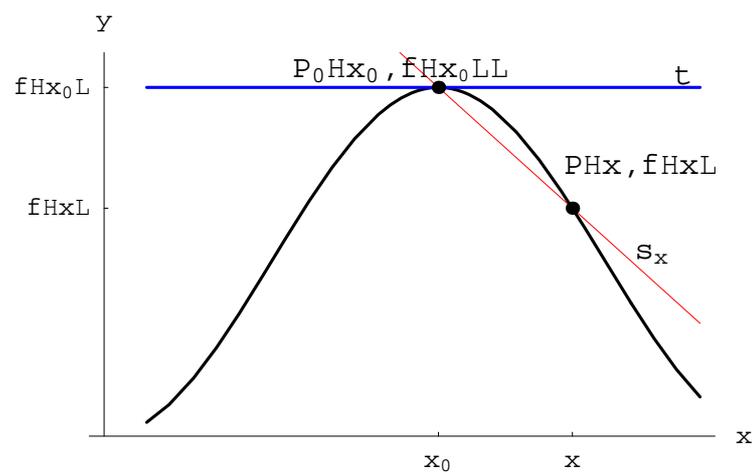


Figura 7: Diagramma cartesiano di una funzione con derivata nulla nel punto x_0 .

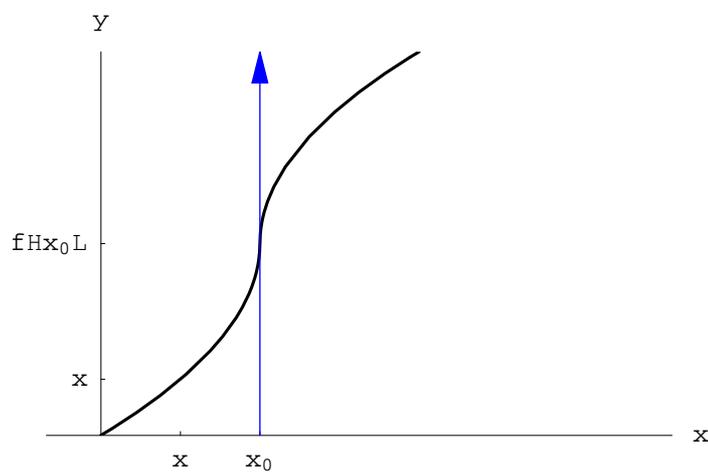


Figura 8: Diagramma cartesiano di una funzione con $f'(x_0) = +\infty$

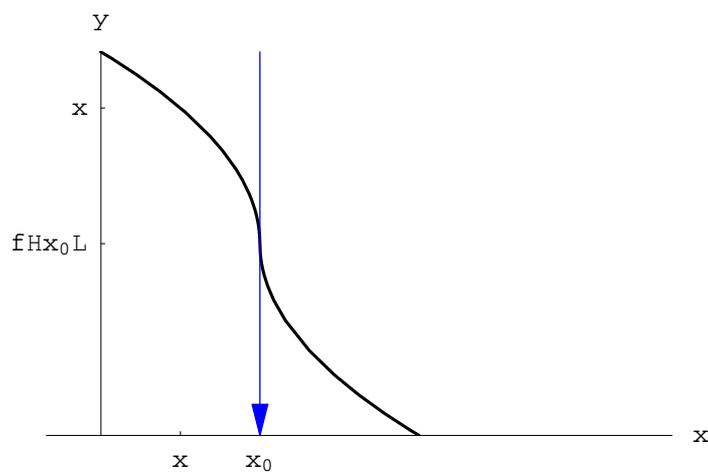


Figura 9: Diagramma cartesiano di una funzione con $f'(x_0) = -\infty$

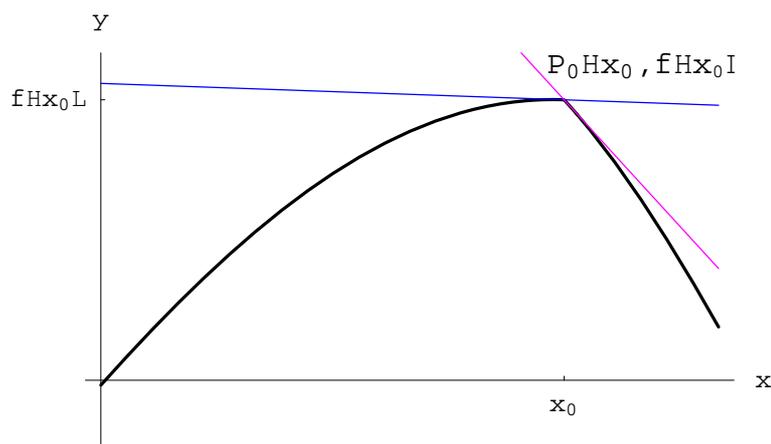


Figura 10: Diagramma cartesiano di una funzione con $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. Precisamente: $|f'_\pm(x_0)| < +\infty$, $0 < f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$

In entrambi i casi, la retta tangente attraversa il diagramma della funzione. Il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è un **punto di flesso a tangente verticale**.

In entrambi i casi: $|f'_-(x_0)| < +\infty$, $|f'_+(x_0)| = +\infty$, il diagramma cartesiano della funzione $f(x)$ è comunque dotato di retta tangente nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$. Esaminiamo ora i casi in cui esso ne è privo. Ad esempio, supponiamo che:

$$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \text{ con } |f'_\pm(x_0)| < +\infty$$

In altri termini, la funzione non è derivabile in x_0 , ma è derivabile a sinistra e a destra. Preso ad arbitrio $P(x, f(x))$, è facile rendersi conto che se P tende a P_0 , la corrispondente retta secante s_x tende a due rette distinte: t_- se $x \rightarrow x_0^-$, t_+ se $x \rightarrow x_0^+$. Da ciò segue che il diagramma cartesiano è:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2, \tag{38}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_1) y &= f(x), x < x_0 \\ \Gamma_2) y &= f(x), x > x_0 \end{aligned}$$

Gli archi di curva Γ_1 e Γ_2 si raccordano nel punto P_0 in forza della continuità della funzione $f(x)$ (fig: 10)

Per quanto visto, non esiste la retta tangente a Γ nel punto P_0 . Peraltro, è possibile definire la semiretta tangente sinistra t_- e la semiretta tangente destra t_+ . Inoltre, t_- e t_+ si intersecano sotto un angolo la cui tangente trigonometrica è in valore assoluto $|f'_-(x_0) - f'_+(x_0)| > 0$. Tale circostanza suggerisce di denominare P_0 , **punto angoloso** del luogo geometrico Γ .

Esempio 10 *Provare che il grafico della funzione*

$$f(x) = |\ln x| \quad (39)$$

ha un punto angoloso in $P_0(1, 0)$

Soluzione 11 *Esplicitiamo il valore assoluto:*

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (1, +\infty) \\ -\ln x, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (40)$$

Le derivate:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = +1 \\ f'_-(1) &= -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = -1 \end{aligned}$$

Abbiamo una semiretta tangente a destra di equazione:

$$y = x - 1$$

e a sinistra:

$$y = -x + 1$$

Il grafico è riportato in figura 11

Esempio 12 *Si consideri la funzione*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x}{1 + \exp(1/x)}, \quad x \neq 0 \\ f(x) &= 1, \quad x = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Provare che $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso della curva $\Gamma) y = f(x)$.

Soluzione 13 *Iniziamo col verificare la continuità della funzione (41) nel punto $x_0 = 0$.
Abbiamo:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 + \frac{0^+}{1 + (+\infty)} = 1 + 0^+ = 1^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 + \frac{0^-}{1 + (-\infty)} = 1 + 0^- = 1^-, \end{aligned}$$

donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \implies (f(x) \text{ è continua in } x_0 = 0)$$

La derivata sinistra in x_0 :

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \exp(1/x)} = \frac{1}{1 + (-\infty)} = 1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \exp(1/x)} = \frac{1}{1 + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+, \end{aligned}$$

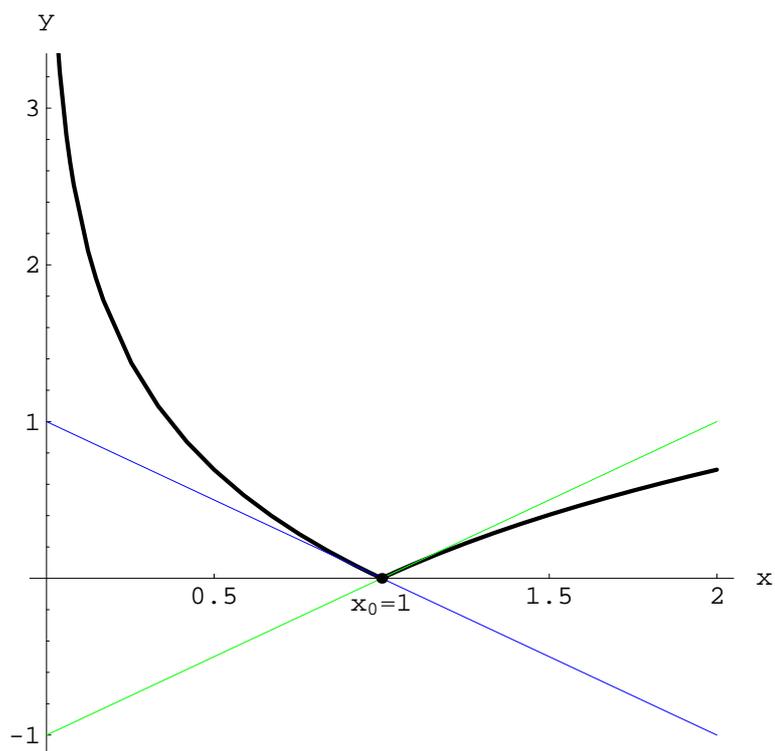


Figura 11: Diagramma cartesiano di $f(x) = |\ln x|$

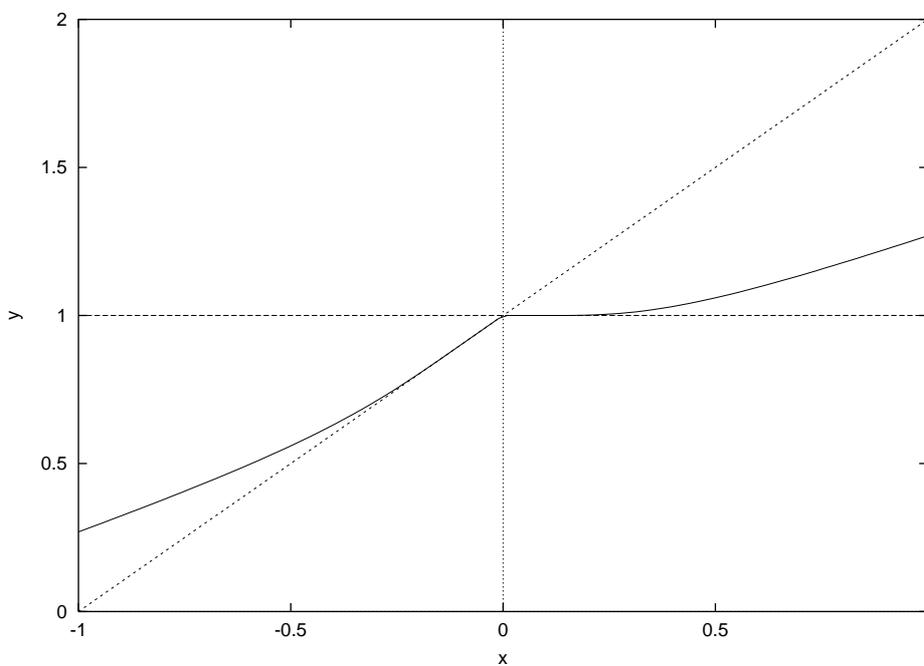


Figura 12: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (41)

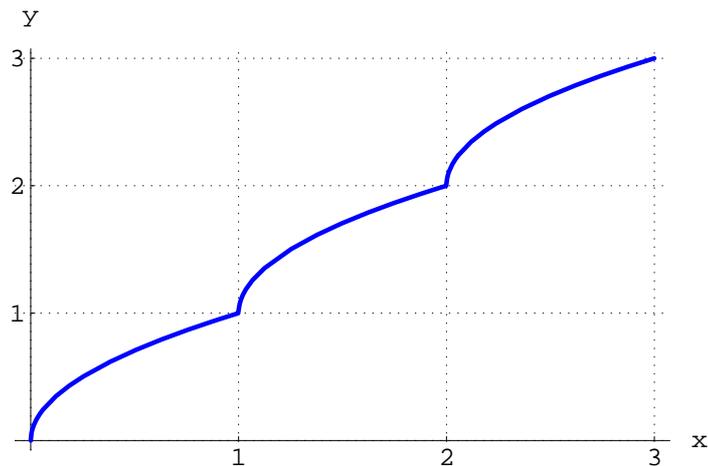


Figura 13: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (42)

donde l'asserto. Scriviamo le equazioni delle due rette tangenti.

$$\begin{aligned} y = 1 & \quad \text{semiretta tangente a destra} \\ y = x + 1 & \quad \text{semiretta tangente a sinistra} \end{aligned}$$

Il grafico è in figura 12

Esercizio 14 Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}, \quad x \in [0, +\infty) \quad (42)$$

Esempio 15 **Esercizio 16** Per la proprietà di $[x]$, abbiamo:

$$\begin{aligned} x \in (0, 1) & \implies f(x) = \sqrt{x} \\ x \in (1, 2) & \implies f(x) = 1 + \sqrt{x + 1} \\ x \in (2, 3) & \implies f(x) = 2 + \sqrt{x + 2} \\ & \dots\dots\dots \\ x \in (n, n + 1) & \implies f(x) = n + \sqrt{x + n} \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

da cui il grafico Γ della funzione:

$$\Gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k,$$

essendo Γ_k la curva di equazione $y = k + \sqrt{x - k}$ e di estremi $P_k(k, k)$, $Q_k(k + 1, k + 1)$ (vedere figura 13).

La funzione è manifestamente continua, ci aspettiamo una discontinuità della derivata nei punti di ascissa intera. Infatti, iniziamo col determinare la derivata sinistra:

$$\begin{aligned}
 f'_-(n) &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} & (43) \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{n - 1 + \sqrt{x - (n - 1)} - n}{x - n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{\sqrt{(x - n) + 1} - 1}{x - n} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^-} \left[\frac{\sqrt{(x - n) + 1} - 1}{x - n} \cdot \frac{\sqrt{(x - n) + 1} + 1}{\sqrt{(x - n) + 1} + 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{1}{\sqrt{(x - n) + 1} + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

La derivata destra:

$$\begin{aligned}
 f'_+(n) &= \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} & (44) \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{n + \sqrt{x - n} - n}{x - n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{1}{\sqrt{x - n}} = +\infty
 \end{aligned}$$

Quindi la semitangente a sinistra nei punti $P_n(n, n)$, è:

$$y = n + \frac{1}{2}(x - n),$$

mentre la semitangente a destra nei medesimi punti ha equazione:

$$x = x_n$$

Per i particolari grafici vedere le figure (14)-(15)

Esercizio 17 Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}, \quad x \in [0, +\infty) \quad (45)$$

Soluzione 18 Grafichiamo la funzione. A tale scopo si osservi che

$$\begin{aligned}
 x \in (0, 1) &\implies f(x) = -\sqrt{x} \\
 x \in (1, 2) &\implies f(x) = 1 - \sqrt{x - 1} \\
 x \in (2, 3) &\implies f(x) = 2 - \sqrt{x - 2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 x \in (n, n + 1) &\implies f(x) = n - \sqrt{x - n} \\
 &\dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

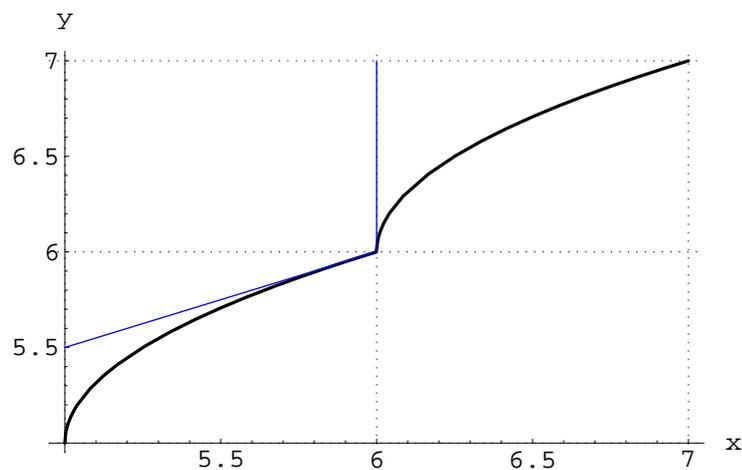


Figura 14: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ nell'intervallo $[5, 7]$.

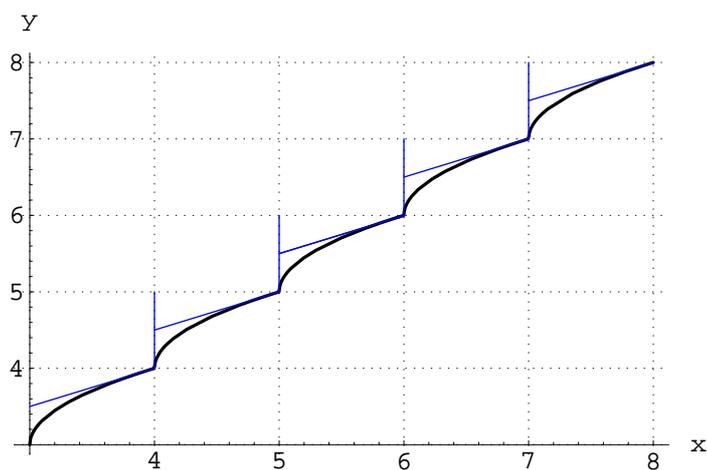


Figura 15: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$. La funzione è ovunque continua, mentre la derivata prima è discontinua nei punti di ascissa intera.

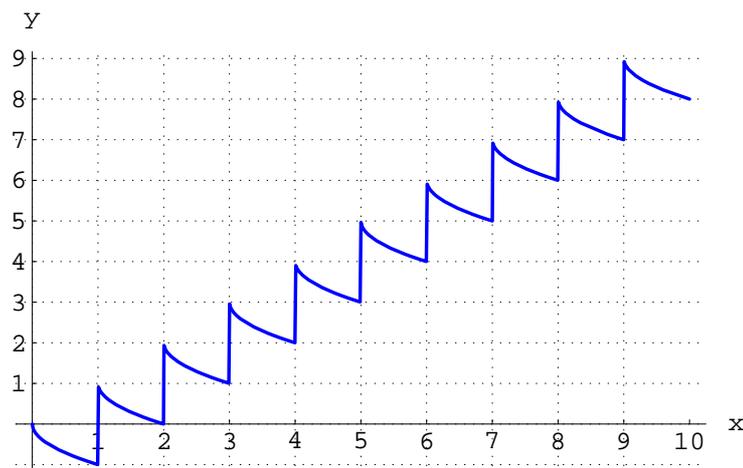


Figura 16: Diagramma cartesiano della funzione la cui espressione analitica è data dall'equazione (45)

donde il grafico di $f(x)$ è:

$$\Gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k,$$

essendo Γ_k la curva di equazione $y = k - \sqrt{x - k}$ di estremi $P_k(k, k)$, $Q_k(k + 1, k - 1)$ (vedere figura 16).

Da ciò vediamo che la funzione ha una discontinuità di prima specie in $x_n = n$. Per dimostrare scriviamo l'espressione analitica della $f(x)$ a destra e a sinistra per ogni n :

$$\begin{aligned} f(x) &= n - 1 - \sqrt{x - (n - 1)}, \quad x \in (n - 1, n) \\ f(x) &= n - \sqrt{x - n}, \quad x \in (n, n + 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(n^-) &= \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n} [n - 1 - \sqrt{x - (n - 1)}] = n - 2 \\ f(n^+) &= \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n} [n - \sqrt{x - n}] = n, \end{aligned}$$

perciò $x_n = n$ è un punto di discontinuità di prima specie; il salto di discontinuità è $s(n) = +2$.

La funzione non è derivabile in $x_n = n$, in quanto non è possibile determinare il valore assunto in tali punti, possiamo però determinare la derivata a destra e a sinistra

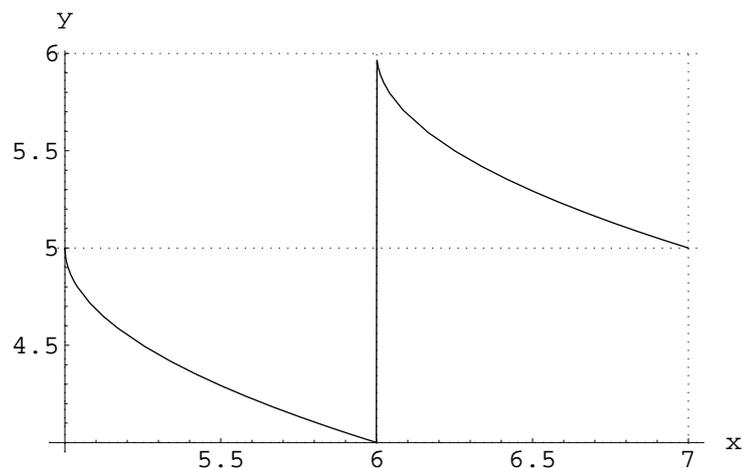


Figura 17: Diagramma cartesiano di $f(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}$ nell'intervallo $[5, 7]$.

rispettivamente.

$$\begin{aligned}
 f'_-(n) &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{n-1 - \sqrt{x - (n-1)} - (n-2)}{x-n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow n^-} \left[\frac{1 - \sqrt{x - (n-1)}}{x-n} \cdot \frac{1 + \sqrt{x - (n-1)}}{1 + \sqrt{x - (n-1)}} \right] \\
 &= - \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x - (n-1)}} = -\frac{1}{2}; \\
 f'_+(n) &= \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{n - \sqrt{x - n} - n}{x-n} = - \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{1}{\sqrt{x - n}} = -\infty
 \end{aligned} \tag{46}$$

Dalle (46) vediamo che in ogni punto x_n la derivata sinistra è $-1/2$, la derivata destra è $-\infty$. Per l'interpretazione geometrica vedere la figura 17.

I due casi precedenti si specializzano quando entrambe le derivate sono infinite e di segno opposto. Il grafico della funzione si decompone ancora attraverso la (38) e l'angolo tra le due semirette tangenti è in valore assoluto pari a π . Il punto P_0 è chiamato **cuspid**e della curva Γ .

Se il rapporto incrementale non è regolare a sinistra o a destra (o entrambi), significa che intorno a x_0 compie infinite oscillazioni che non si smorzano.

Esempio 19 Sia:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{47}$$

Il rapporto incrementale della (47) relativo al punto $x_0 = 0$, è:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sin \frac{1}{x}$$

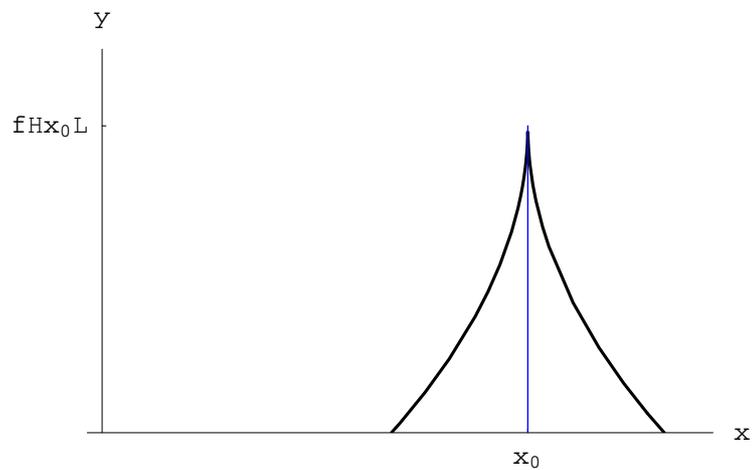


Figura 18: Diagramma cartesiano di una funzione con $f_-(x_0) = +\infty$. $f_+(x_0) = -\infty$.

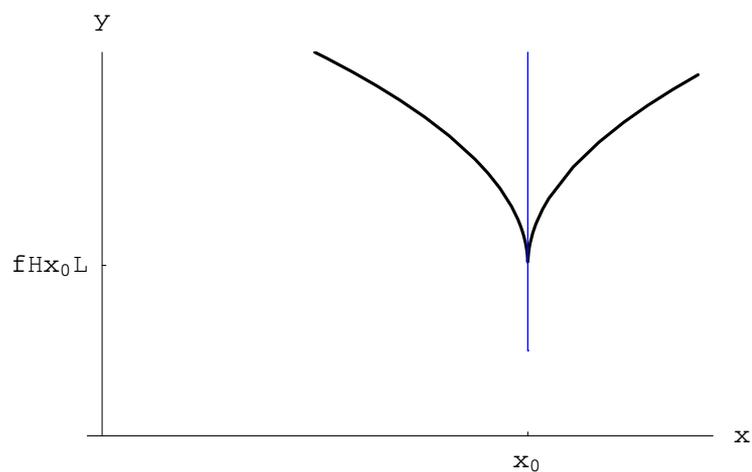


Figura 19: Diagramma cartesiano di una funzione con $f_-(x_0) = -\infty$. $f_+(x_0) = +\infty$.

Come è noto, la funzione $\sin(x^{-1})$ non è regolare in $x_0 = 0$. Quindi il grafico della funzione (47) è privo di retta tangente nell'origine.

Esercizio 20 Provare che il grafico della funzione:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0 \\ f(x) &= 0, \quad x = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

ha un punto angolo nell'origine. Scrivere quindi le equazioni delle due semirette tangenti.

Soluzione 21 Iniziamo col verificare la continuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$. Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

donde la continuità in x_0 . Possiamo quindi determinare le derivate:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2} \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donde l'asserto. Le equazioni richieste sono:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2}x, \quad \text{semiretta tangente a destra} \\ y &= -\frac{\pi}{2}x, \quad \text{semiretta tangente a sinistra} \end{aligned}$$

Il grafico è in figura 20

1.3 Differenziale

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo (a, b) . Se la funzione è derivabile in $x_0 \in (a, b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (49)$$

Nella (49) è:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (50)$$

che per un assegnato x_0 è una funzione di Δx . In tal modo $\Delta f(\Delta x)$ è un infinitesimo nel limite $\Delta x \rightarrow 0$. Precisamente: un infinitesimo di ordine superiore a Δx , se $f'(x_0) = 0$, dello stesso ordine, se $f'(x_0) \neq 0$. Inoltre, dalla teoria degli infinitesimi sappiamo che la funzione lineare di Δx :

$$p_1(\Delta x) = f'(x_0) \Delta x, \quad (51)$$

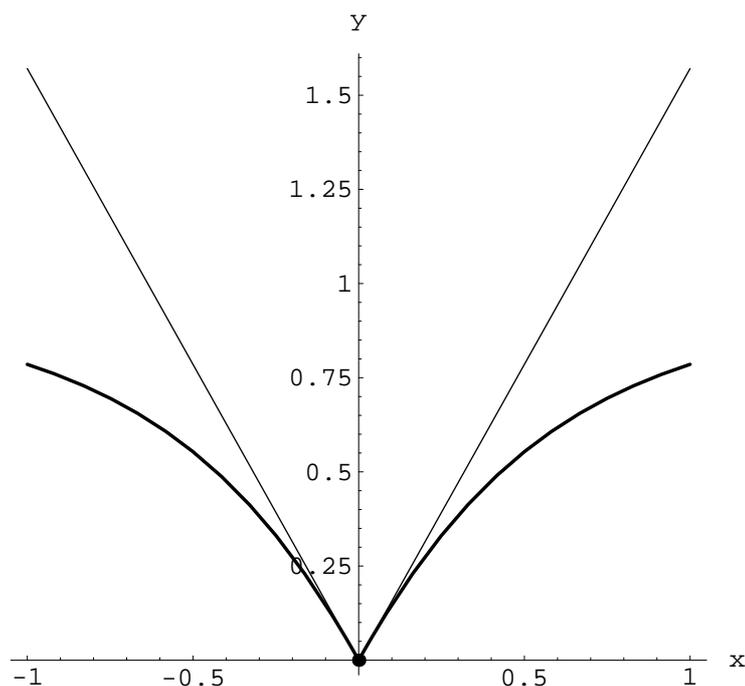


Figura 20: Diagramma cartesiano della funzione data dall'equazione (48)

è la parte principale dell'infinitesimo Δf . La differenza:

$$f_1(\Delta x) = \Delta f - f'(x_0) \Delta x, \quad (52)$$

è un infinitesimo di ordine superiore a Δx . Quindi l'incremento della funzione $f(x)$ si decompone:

$$\Delta f = \underbrace{f'(x_0) \Delta x}_{\text{p.p.}} + \underbrace{f_1(\Delta x)}_{\text{infin. sup.}} \quad (53)$$

Definizione 22 La parte principale $p_1(\Delta x)$ dell'infinitesimo Δf , è **il differenziale della funzione $f(x)$ nel punto x_0** e si indica con df :

$$df \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \Delta x$$

L'arbitrarietà del punto x_0 implica:

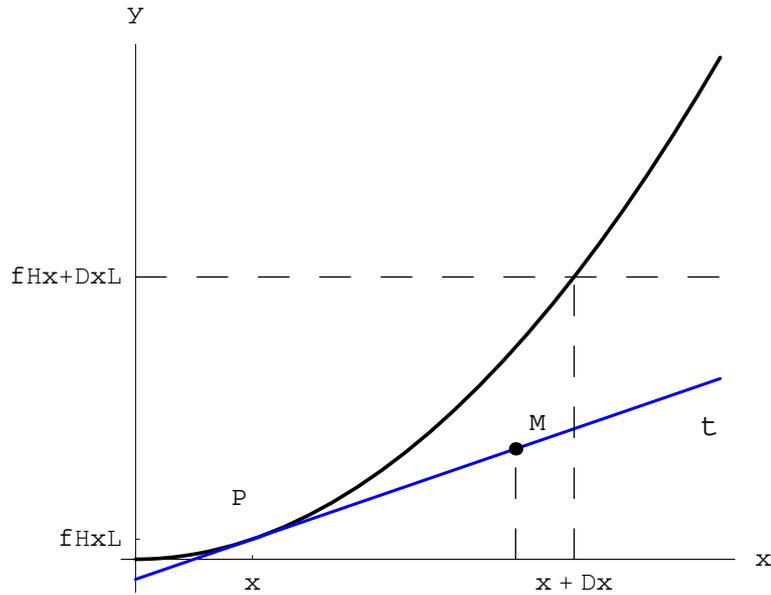
$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ df &= f'(x) \Delta x \end{aligned} \quad (54)$$

Osservazione 23 Se $f(x) = x$, la seconda delle (54) si scrive:

$$dx = \Delta x$$

In altri termini, il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento. Quindi la seconda delle (54) diventa per qualunque funzione $f(x)$ derivabile:

$$df = f'(x) dx \quad (55)$$



Utilizzando la **notazione di Landau**³, la (53) si scrive:

$$\Delta f = df + o(\Delta x) \quad (56)$$

Per quanto detto:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Applicando la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < \Delta x < \delta_\varepsilon \implies |o(\Delta x)| < \varepsilon |\Delta x|$$

In altri termini, intorno al punto $\Delta x = 0$ è definitivamente $|o(\Delta x)| < \varepsilon |\Delta x|$, per ogni $\varepsilon > 0$. Tale circostanza ci permette di trascurare nella (56) il termine di ordine superiore $o(\Delta x)$ in un intorno sufficientemente piccolo di $\Delta x = 0$. Abbiamo perciò l'uguaglianza approssimata:

$$\Delta f = df, \quad (57)$$

valida per $|\Delta x| < \delta_\varepsilon$. Nel limite di validità della (57), l'incremento Δf della funzione $f(x)$ risulta essere una funzione lineare dell'incremento Δx della variabile indipendente. Tale approssimazione è perciò nota come **linearizzazione della funzione $f(x)$** ed ha un'interpretazione geometrica immediata. Indichiamo (figura 1.3) con M un generico punto della retta tangente nelle immediate vicinanze del punto $P(x, f(x))$. Il differenziale df si identifica con $y_M - f(x)$ quando l'ascissa di M assume il valore $x + \Delta x$.

³Se $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $h(x)$, si scrive: $g = o(h)$. Se invece è dello stesso ordine: $g = O(h)$.

1.4 Regole di derivazione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $X \subset \mathbb{R}$. Dalla (55):

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (58)$$

Tale equazione esprime la derivata prima utilizzando la cosiddetta *notazione differenziale*. Tenendo poi conto che $y = f(x)$, si scrive:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad (59)$$

Alternativamente:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad (60)$$

La (60) definisce l'**operatore di derivazione**, già introdotto in una sezione precedente:

$$D = \frac{d}{dx} \quad (61)$$

Abbiamo:

$$Df(x) = f'(x) \quad (62)$$

D è un operatore, quindi il significato della (62) è: *il risultato dell'applicazione dell'operatore D è la funzione $f'(x)$* .

Nell'ipotesi in cui la derivata $f'(x)$ sia a sua volta una funzione derivabile in X (senza perdita di generalità), è possibile definire la derivata di $f'(x)$ ovvero la **derivata seconda** di $f(x)$:

$$D(f'(x)) = f''(x) \quad (63)$$

Tenendo conto delle equazioni (23)-(24), è possibile definire l'operazione di derivazione *n-esima*:

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) \quad (64)$$

Evidentemente:

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \quad (65)$$

Definizione 24 La funzione $f(x)$ è indefinitamente derivabile in X se $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f^{(n)}(x)$.

L'operatore (63) è lineare:

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili in X :

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x) \quad (66)$$

- Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$D(\lambda f(x)) = \lambda D(f(x)) \quad (67)$$

Applicando la definizione di derivata, si dimostrano le seguenti *regole di derivazione*:

- Derivata del prodotto⁴.

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (68)$$

- Derivata del rapporto.

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (69)$$

- Derivata della reciproca.

Ponendo $f(x) = 1$ nella (69):

$$D\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

o ciò che è lo stesso:

$$D\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \quad (70)$$

- Derivata della funzione composta.

Se $x = x(t)$, allora $f(x(t))$. Applicando la definizione di derivata, è facile convincersi che:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (71)$$

Applicando la definizione di derivata è possibile determinare le derivate delle principali funzioni lineari. Riportiamo di seguito tali derivate:

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (x > 0, a > 0)$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$
$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$	$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x < 1)$	$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\operatorname{Arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1)$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}, \quad (x < 1)$
$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$	$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcco}th x = -\frac{1}{x^2-1}, \quad (x > 1)$

⁴In tal senso la (66) esprime la regola di derivazione della somma due funzioni, immediatamente generalizzabile a n funzioni.

1.5 Esercizi proposti

1.5.1 Introduzione

1. Determinare la velocità media di variazione della funzione $f(x) = x^4$ nell'intervallo $[a, b]$. Si consideri $a = 1, b = 4$.
2. L'equazione oraria del moto di una particella è $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$, essendo t il tempo espresso in secondi, e s l'ascissa curvilinea espressa in centimetri. Determinare la velocità media nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ con $t_1 = 1$ s, $t_2 = 5$ s.
3. Determinare in $x = 1$ il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 2^x$. Graficare il rapporto così ottenuto su carta millimetrata.
4. Sia $T(t)$ la temperatura istantanea di un corpo in un ambiente a temperatura più in bassa. Dare la definizione di: 1) *velocità media di raffreddamento*; 2) *velocità istantanea di raffreddamento*.
5. Si modellizzi una barra non omogenea attraverso un segmento di lunghezza L . Introducendo un riferimento cartesiano della retta contenente tale segmento, risulta che la massa della barra è una funzione $m(x)$ con $x \in [0, L]$. Determinare: 1) l'espressione della densità lineare media nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$; 2) l'espressione della densità lineare in $x \in [0, L]$.
6. Assegnata la funzione $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ e i punti $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, determinare (applicando le regole di derivazione) $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$.
7. Sia $f(x) = x^3$. Come è noto, tale funzione è definita in \mathbb{R} . Determinare in punti $x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x)$.
8. Una particella si muove con equazione oraria $s(t) = 2e^{-t}$, essendo t il tempo espresso in s, e s l'ascissa curvilinea espressa in cm. Determinare: a) la velocità della particella a $t_1 = 3$ s; b) l'ascissa $s(t)$ dopo un tempo infinitamente lungo.
9. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = \sin x$ nel punto $(\pi, 0)$.
10. Assegnate le due funzioni:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = 2x$$

scrivere le equazioni delle rette tangenti alle curve $\Gamma_1)y = f_1(x), \Gamma_2)y = f_2(x)$ nel punto $P_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Determinare poi la misura in gradi dell'angolo tra le suddette tangenti.

1.5.2 Differenziale

1. Assegnata la funzione:

$$f(x) = 3x^2 - x$$

Determinare il differenziale di f nonché l'incremento Δf per $x = 1, \Delta x = 10^{-2}$.

2. Indicando con x la misura del lato di un quadrato, la sua superficie sarà data da:

$$S(x) = x^2$$

Determinare il differenziale e l'incremento della funzione $S(x)$ dandone un'interpretazione geometrica, determinando poi gli eventuali valori di x per i quali nel limite per $\Delta x \rightarrow 0$, l'incremento ΔS non è equivalente al differenziale dS .

3. Si dimostri che nel limite per $|\Delta x| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x + \Delta x} &\simeq \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \\ \sqrt[3]{x + \Delta x} &\simeq \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}\tag{72}$$

4. Un resistore R è attraversato da una corrente di intensità I . Determinare approssimativamente la variazione dell'intensità di corrente causata da fluttuazioni di R .

1.5.3 Derivazione di funzioni algebriche

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$
3. $f(x) = -\frac{5x^3}{a}$
4. $f(t) = at^m + bt^{m+n}$
5. $s(t) = (t^2 - 3)^4$
6. $f(x) = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$
7. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$
8. $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$
9. $f(x) = (1 - 5x)^6$
10. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$
11. $f(x) = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$
12. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
13. $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$
14. $f(x) = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$
15. $f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$
16. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$

17. $f(x) = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$

18. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

19. $f(x) = x^p \sqrt[n]{x^m}$

20. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

22. $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x \sqrt[3]{x}}$

23. $f(x) = \frac{1}{x^p \sqrt[n]{x^m}}$

24. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

25. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

26. $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

27. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$

28. $f(x) = (x^2 + 4)(2x^2 - 1)^3$

29. $f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$

30. $f(x) = \frac{a+bx}{a_1+b_1x}$

31. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

32. $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$

33. $f(x) = \frac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

34. $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$

35. $f(x) = 2x^2 \sqrt{2-x}$

36. $f(x) = x \sqrt{3-2x^2}$

37. $f(x) = (x-1) \sqrt{x^2-2x+2}$

38. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

39. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

40. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

41. $f(x) = (x^2+3)^4 (2x^3-5)^3$

42. $f(x) = \frac{x^2+2}{3-x^2}$

43. $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$

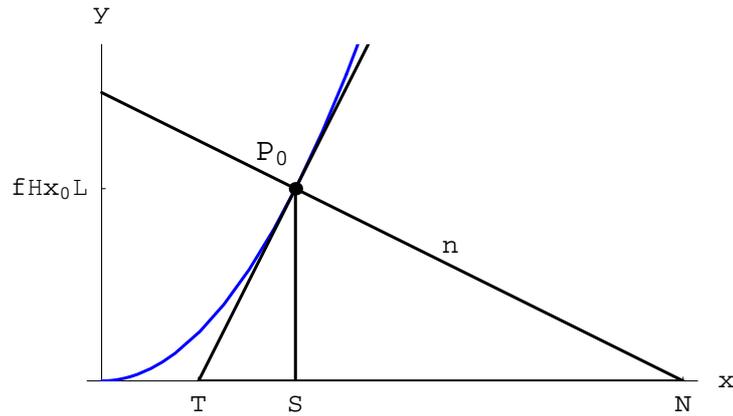


Figura 21: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)$.

1.5.3.1 Applicazioni geometriche

1.5.3.1.1 Definizioni Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che la funzione sia ivi derivabile.

Assegnato il riferimento monometrico ortogonale $R(0xy)$, indichiamo con Γ il diagramma cartesiano della funzione. Preso ad arbitrio $x_0 \in [a, b]$, consideriamo il punto $P_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$. Quindi tracciamo la retta tangente e la retta normale a Γ in P_0 (vedere fig. 21).

Le equazioni delle suddette rette sono:

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned} \quad (73)$$

Ciò premesso, abbiamo la seguente

Definizione 25 $S_t = \overline{TS}$ = lunghezza della sottotangente

$S_n = \overline{SN}$ = lunghezza della sottonormale

$n = \overline{P_0N}$ = lunghezza della normale.

Risulta:

$$\begin{aligned} \overline{P_0S} &= |f(x_0)| \\ \frac{\overline{P_0S}}{\overline{TS}} &= |f'(x_0)|, \end{aligned}$$

donde le lunghezze sopra definite si esprimono in funzione di $f(x_0)$ e di $f'(x_0)$:

$$\begin{aligned} S_t &= \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \\ S_n &= |f(x_0) f'(x_0)| \\ n &= |f(x_0)| \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \end{aligned} \quad (74)$$

1. Assegnata l'equazione:

$$x^2 - xy + y^2 = 27, \quad (75)$$

esplicitare la variabile y , ottenendo l'espressione analitica di due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$.
Determinare le coordinate dei punti in cui la retta tangente è: a) parallela all'asse x ;
b) parallela all'asse y .

2. Assegnata la curva Γ di equazione $y = f(x)$ con:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4,$$

scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale a Γ in $P_0(x_0 = 2, y_0 = 4)$

3. Assegnata la curva di equazione:

$$x^2 + 3xy + y^2 = 5, \quad (76)$$

a) determinare i punti P nei quali la retta tangente è parallela all'asse x ; b) scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale in $P_0(x_0 = 1, y_0 = 1)$.

4. Si consideri l'ellisse Γ di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 = 40 \quad (77)$$

Scrivere le equazioni delle tangenti a Γ con coefficiente angolare $m_0 = -2/9$.

5. Scrivere l'equazione della retta tangente tracciata dal punto $P_1(x_1 = 2, y_1 = -2)$ all'iperbole Γ di equazione:

$$x^2 - y^2 = 16 \quad (78)$$

6. Assegnate le curve $\Gamma_1) y = f_1(x)$ e $\Gamma_2) y = f_2(x)$ con:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \\ f_2(x) &= \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x - 1, \end{aligned} \quad (79)$$

scrivere le equazioni delle rette parallele all'asse y passanti per i punti di Γ_k tali che le rispettive tangenti sono parallele.

7. Assegnata la parabola:

$$y^2 = 2px, \quad (80)$$

dimostrare che l'equazione della generica retta tangente è

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad \text{per } m \neq 0$$

8. Assegnata la curva $y = f(x)$ con:

$$f(x) = \frac{5 - 2x}{x - 1}, \quad (81)$$

determinare la lunghezza della sottotangente, della sottonormale e della normale in $P_0(x_0, f(x_0))$ essendo $x_0 = 2$.

9. Determinare l'angolo acuto sotto cui si intersecano le due curve:

$$\begin{aligned} \Gamma_1) y^2 &= 4x \\ \Gamma_2) 2x^2 &= 12 - 5y \end{aligned}$$

10. Assegnate le curve $\Gamma_k)y = f_k(x)$ con $k = 1, 2$ e:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 + 2 \\ f_2(x) &= 2x^2 + 2, \end{aligned} \quad (82)$$

provare che esse hanno una tangente orizzontale in comune nel punto $P_1(x_1 = 0, y_1 = 2)$ e che nel punto $P_2(x_2 = 2, y_2 = 10) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ le tangenti formano un angolo $\beta = \arctan \frac{4}{97}$.

11. Si consideri la curva di equazione $y = 2x^3 + 12x^2 + 5x + 9$. Si determinino le coordinate cartesiane dei punti di tale curva in cui la retta tangente passa per l'origine del riferimento cartesiano.

12. Assegnate le circonferenze:

$$\gamma_1) x^2 + y^2 - 4x = 0, \quad \gamma_2) x^2 + y^2 = 8, \quad (83)$$

determinare l'angolo acuto di intersezione.

1.5.4 Soluzioni

1.5.4.1 Introduzione

1. La velocità media di variazione è il rapporto incrementale:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^4 - a^4}{b - a} = (b^2 + a^2)(b + a)$$

Per $a = 1, b = 4$:

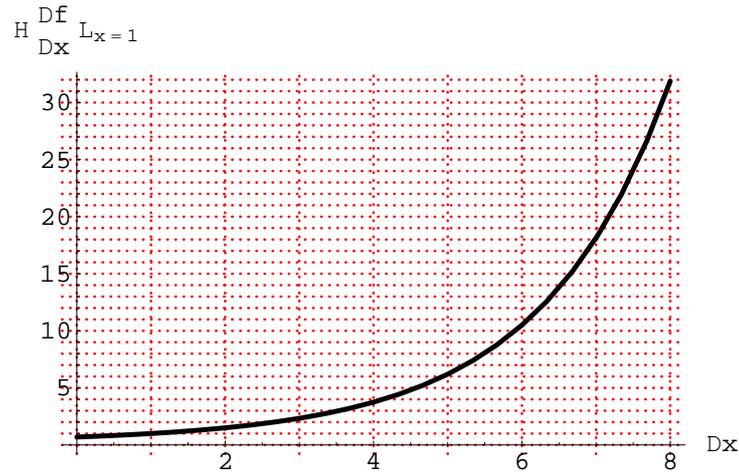
$$\left. \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|_{(a,b)=(1,4)} = 85$$

2. La velocità media della particella è il rapporto incrementale della funzione $s(t)$. Abbiamo:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = 70 - 10 = 60$$

L'incremento della variabile indipendente è $\Delta t = t_2 - t_1 = 4$ s, donde la velocità media:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$



3. L'incremento della funzione è:

$$\Delta f = 2^{x+\Delta x} - 2^x = 2^x (2^{\Delta x} - 1)$$

Il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2^x \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Nel punto $x = 1$:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x=1} = \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

il cui grafico è in figura 3.

4. La velocità media di raffreddamento è il rapporto incrementale della funzione $T(t)$:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t},$$

mentre la velocità istantanea di raffreddamento è la derivata di $T(t)$ che viene indicata con il simbolo $\dot{T}(t)$ ⁵. Quindi:

$$\dot{T}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

5. La densità lineare media è il rapporto incrementale di $m(x)$ relativo all'incremento Δx . Quindi, la sua espressione è:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}$$

La densità lineare è la derivata di $m(x)$:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} \quad (84)$$

⁵Si legge *T punto*. È utilizzato il punto al posto dell'apice ogni volta che la variabile indipendente è il tempo t .

Esprimendo m in g, e la lunghezza in cm, la densità (84) risulta essere espressa in $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1}$.

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$$

Quindi:

$$dm = \rho(x) dx \quad (85)$$

La (85) ha una semplice interpretazione fisica: $\rho(x) dx$ è la massa elementare contenuta nel segmento infinitesimo di estremi x e $x + dx$.

6. Risulta:

$$f'(x) = 2(x-2)^2(3x^3 - 8x^2 + 6x - 1)$$

Quindi:

$$f'(0) = -8, f'(1) = f'(2) = 0$$

7. La derivata prima è:

$$f'(x) = 3x^2$$

La richiesta è:

$$f'(x) = f(x) \iff 3x^2 = x^3,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = 0 \text{ (molteplicità 2)}$$

$$x_2 = 3$$

8. La velocità è:

$$\dot{s}(t) = -2e^{-t}$$

A $t = t_1$:

$$\dot{s}_1 = \dot{s}(t_1) = -\frac{2}{e^3}$$

La posizione della particella a $t = +\infty$:

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = -2 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$$

Da ciò segue che la particella si muove nel verso delle ascisse decrescenti impiegando un tempo infinito a raggiungere l'origine delle coordinate.

9. La derivata è $f'(x) = \cos x$, da cui $m_0 = -1$. Quindi l'equazione della tangente:

$$x + y - \pi = 0$$

Il grafico è in figura 9.

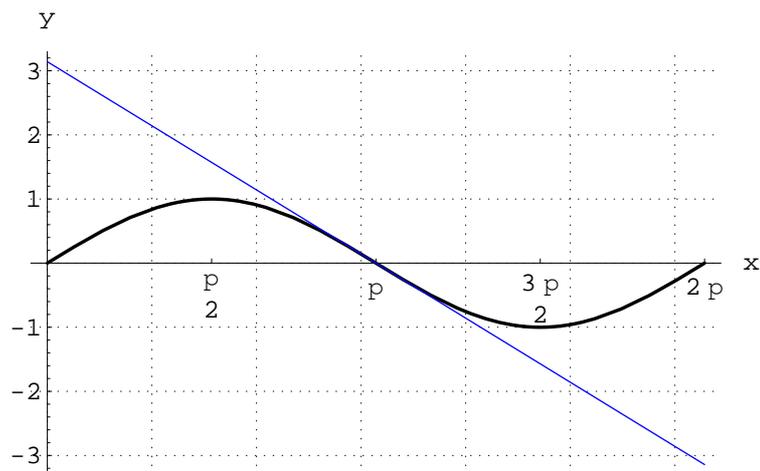


Figura 22: Grafico di $\Gamma)y = \sin x$ e della retta tangente a Γ in $(\pi, 0)$.

10. Determiniamo le coordinate del punto $P_0(x_0, y_0) = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

$$x^2 = \frac{1}{x} \iff x = 1$$

Quindi è $P_0(1, 1)$. Le derivate sono:

$$f'_1(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'_2(x) = 2x$$

Da cui i coefficienti angolari delle rette tangenti:

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 2$$

Le misure in radianti degli angoli tra l'asse x e le singole tangenti (t_1, t_2) :

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \arctan 2$$

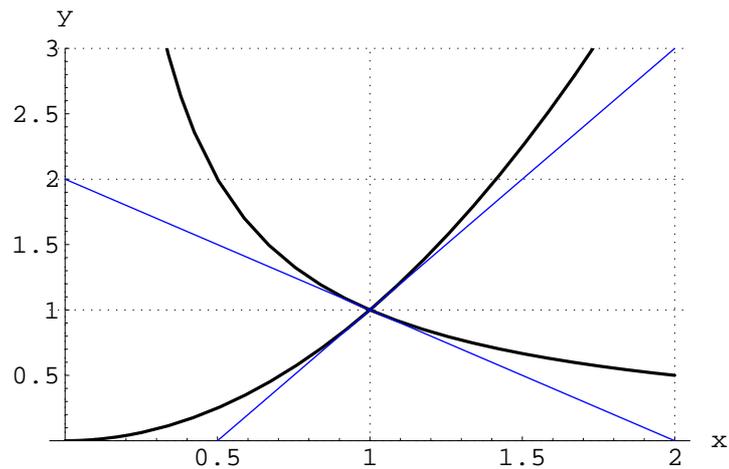
La misura in radianti dell'angolo tra t_1 e t_2 :

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arctan 2 + \frac{\pi}{4}$$

In gradi:

$$\Delta\theta = 108^\circ 26'.1$$

Il grafico è in figura 10.



1.5.4.2 Differenziale

1. Risulta:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= [3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)] - (3x^2 - x)\end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Δf nelle potenze di Δx è

$$\Delta f = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

donde:

$$df = (6x - 1)\Delta x$$

Per $x = 1$, $\Delta x = 10^{-2}$:

$$df = 5 \times 10^{-2}, \quad \Delta f = 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-4}$$

Il grafico è in figura 23.

2. L'incremento di $S(x)$ è:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(x + \Delta x) - S(x) \\ &= (x + \Delta x)^2 - x^2,\end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di ΔS nelle potenze di Δx è

$$\Delta S = (2x)\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{86}$$

Il differenziale:

$$dS = 2x\Delta x$$

L'interpretazione geometrica è in 24.

Dalla (86) segue che per $x = 0$, è:

$$\Delta S = (\Delta x)^2$$

Quindi per $x = 0$ la funzione $S(x)$ non è linearizzabile.

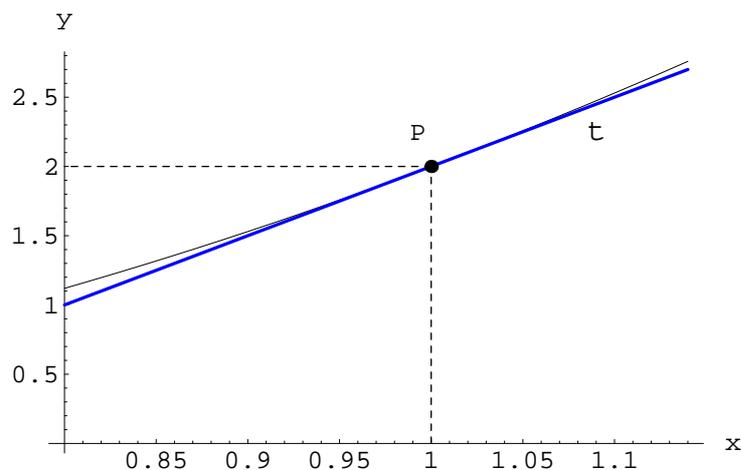


Figura 23: Grafico di $f(x) = 3x^2 - x$, con retta tangente nel punto $P(x = 1, y = f(1))$.

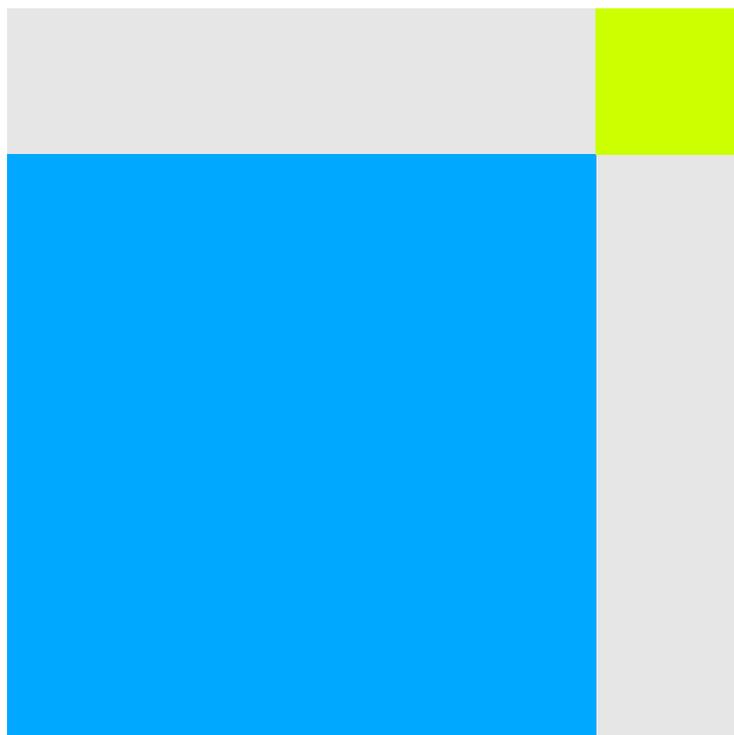


Figura 24: Il rettangolo azzurro ha lato di misura x , quindi superficie $S(x) = x^2$. Se la variabile indipendente varia da x a $x + \Delta x$, la superficie varia di $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. La grandezza $2x\Delta x$ è la somma delle superfici in grigio, mentre l'infinitesimo di ordine superiore $(\Delta x)^2$ è la misura della superficie del rettangolino verde.

3. Iniziamo con la prima delle (72), ponendo:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

il cui differenziale è:

$$df = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}},$$

donde:

$$\Delta f \simeq \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } |\Delta x| \rightarrow 0$$

cioè la prima delle (72). Per la seconda, poniamo:

$$g(x) = \sqrt[3]{x},$$

il cui differenziale è:

$$dg = \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x}},$$

donde:

$$\Delta g \simeq \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x}}$$

cioè la seconda delle (72).

4. Per la legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R}, \tag{87}$$

essendo V la differenza di potenziale ai capi di R . Abbiamo:

$$dI = -\frac{V}{R^2}dR = -I\frac{dR}{R},$$

donde nel limite per $\Delta R \rightarrow 0$:

$$\Delta I \simeq -\frac{I}{R}\Delta R$$

1.5.4.3 Derivazione di funzioni algebriche

1. $f'(x) = 2ax + b$

2. $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 20x = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

3. $f'(x) = -\frac{15x^2}{a}$

4. $f'(x) = amt^{m-1} + (m+n)bt^{(m+n)-1}$
 $= t^{m-1}[am + b(m+n)t^n]$

5. $\dot{s}(t) = 4(t^2 - 3)^3 \cdot 2t = 8t(t^2 - 3)^3$

6. $f'(x) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$
7. $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$
8. $f'(x) = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$
9. $f'(x) = 6(1 - 5x)^4 \cdot (-5) = -30(1 - 5x)^4$
10. $f'(x) = 4(3x - x^3 + 1)^3(3 - 3x^2) = 12(1 - x^2)(3x - x^3 + 1)^3$
11. $f'(x) = \frac{1}{2}(3 + 4x - x^2)^{-1/2}(4 - 2x) = \frac{2-x}{\sqrt{3+4x-x^2}}$
12. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{6}{x^4}$
13. $f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}$
14. $f'(x) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2}$
15. $f(x) = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4};$
 $f'(x) = -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4}$
 $= -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$
16. $f'(x) = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$
17. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} - x^{-3/2}$
18. $f(x) = 3^{1/3}x^{2/3} - \frac{1}{\sqrt{5}}x^{-1/2}$
 $f'(x) = 3^{1/3} \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3}}$
 $= \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2\sqrt{5x^3}}$
19. $f(x) = x^{p+\frac{m}{n}}; f'(x) = (p + \frac{m}{n})x^{p+\frac{m}{n}-1} = (p + \frac{m}{n})x^{p-1}x^{m/n} = \frac{np+m}{n}x^{p-1}\sqrt[n]{x^m}$
20. $(p = 2, n = 3, m = 2) \implies f'(x) = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$
21. $f(x) = x^{-m/n} \implies f'(x) = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m+n}{n}} = -\frac{m}{nx\sqrt[n]{x^m}}$
22. $f'(x) = -\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}$
23. $f'(x) = -\left(p + \frac{m}{n}\right)x^{-(p+\frac{m}{n})-1} = -\frac{np+m}{nx^{p+1}\sqrt[n]{x^m}}$
24. $f'(x) = -x^{-3} - 2x^{-3/2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^{3/2}}$
25. $f(x) = -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} = -x^{-3/2}(1 + 2x^{1/6}) = -\frac{1+2x^{1/6}}{x^{3/2}}$
26. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$
27. $f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}}$
28. $f'(x) = 2x(1 - 2x^2)^2(23 + 8x^2)$

$$29. f'(x) = \frac{-2(3+2x)-2(3-2x)}{(3+2x)^2}$$

$$= -\frac{12}{(3+2x)^2}$$

$$30. f'(x) = \frac{b(a_1+b_1x)-b_1(a+bx)}{(a_1+b_1x)^2}$$

$$= \frac{a_1b-ab_1}{(a_1+b_1x)^2}$$

$$31. f'(x) = \frac{2(x^2-5x+5)-(2x-5)(2x+3)}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$= -\frac{2x^2+6x-25}{(x^2-5x+5)^2}$$

$$32. f'(x) = -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$33. f'(x) = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$34. f'(x) = 5 \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$$

$$35. f'(x) = 4x\sqrt{2-x} + 2x^2 \frac{(-1)}{2\sqrt{2-x}} = \frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$$

$$36. f'(x) = \sqrt{3-2x^2} + x \frac{(-4x)}{2\sqrt{3-2x^2}} = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$37. f'(x) = \sqrt{x^2-2x+2} + (x-1) \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$38. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$$

$$39. f'(x) = \frac{\sqrt{1-4x^2}-x \cdot \frac{(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} = \frac{1}{(1-4x^2)^{3/2}}$$

$$40. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$41. f'(x) = 2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$$

$$42. f'(x) = \frac{2x(3-x^2)+2x(x^2+2)}{(3-x^2)^2} = \frac{10x}{(3-x^2)^2}$$

$$43. f'(x) = 4 \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^3 \frac{3x^2(2x^3+1)-6x^2(x^3-1)}{(2x^3+1)^2} = \frac{36x^2}{(2x^3+1)} \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^3$$

1.5.4.4 Applicazioni geometriche

1. Scriviamo la (75) nella forma:

$$y^2 - xy + x^2 - 27 = 0,$$

che risolta rispetto a y :

$$y = \frac{1}{2} \left[x \pm \sqrt{108 - 3x^2} \right]$$

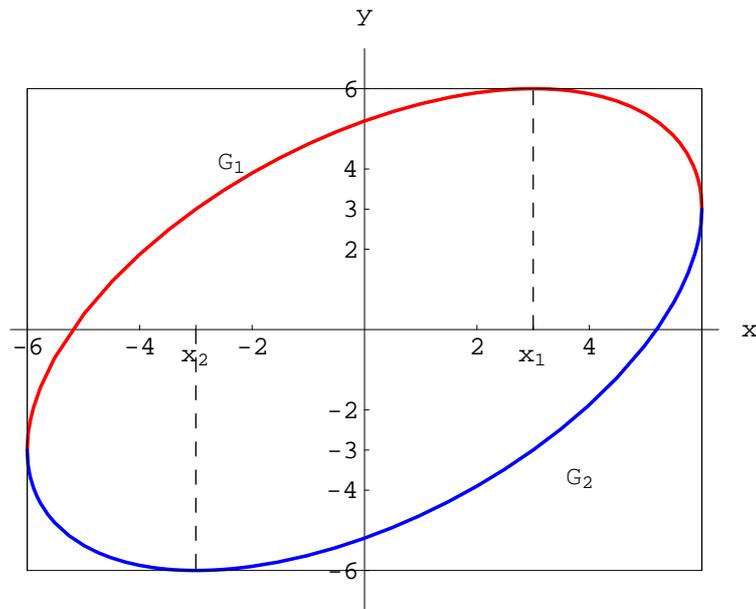


Figura 25: Grafico di Γ_k $y = f_k(x)$.

Abbiamo perciò le due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[x + \sqrt{108 - 3x^2} \right] \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[x - \sqrt{108 - 3x^2} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

entrambe definite in $X = [-6, 6]$. Indichiamo con Γ_k $y = f_k(x)$ i grafici di singola funzione. Le derivate sono:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3x}{\sqrt{108 - 3x^2}} \right] \\ f_2'(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3x}{\sqrt{108 - 3x^2}} \right] \end{aligned} \quad (89)$$

La derivata $f_1'(x)$ si annulla in $x_1 = +3$, pertanto la retta tangente a Γ_1 è ivi parallela all'asse x . La derivata $f_2'(x)$ si annulla in $x_2 = -3$, pertanto la retta tangente a Γ_2 è ivi parallela all'asse x .

Dalle (89) vediamo che per $|x| \rightarrow 6$, $|f_k(x)| \rightarrow +\infty$; quindi nei punti $x'_1 = +6$, $x'_2 = -6$ la retta tangente è parallela all'asse y . Il grafico è in figura 1.

2. La derivata della funzione $f(x)$ è:

$$f'(x) = 3x^2 - 4,$$

che in $x_0 = 2$ assume il valore $f'(x_0) = 4$, per cui il coefficiente angolare della retta tangente t a Γ nel punto P_0 è $m_0 = 4$. Il coefficiente angolare della retta normale nel medesimo punto è:

$$m'_0 = -\frac{1}{m_0} = -\frac{1}{4},$$

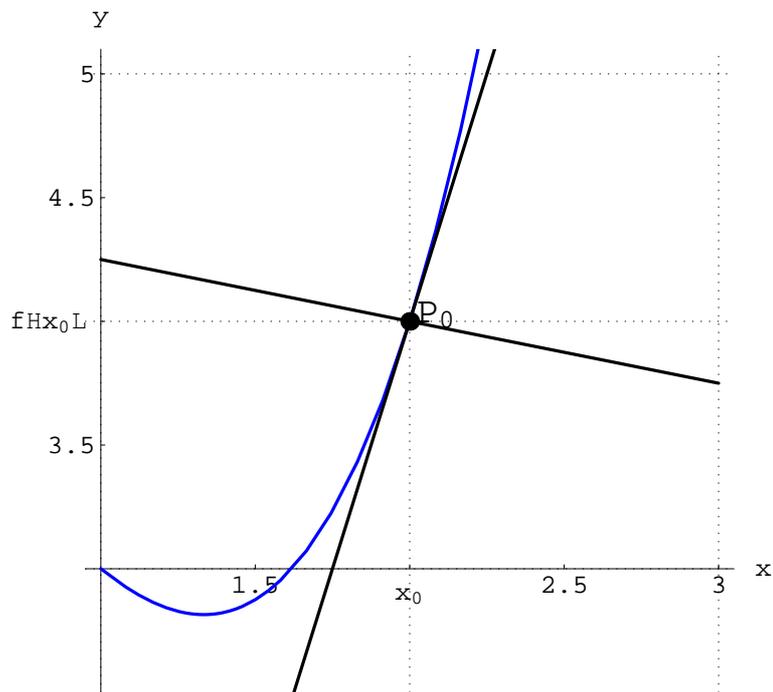


Figura 26: Grafico di $\Gamma) y = x^3 - 2x^2 + 4$ e delle rette t, n .

da cui le equazioni delle rette t e n :

$$\begin{aligned} t) & 4x - y - 4 = 0 \\ n) & x + 4y - 18 = 0 \end{aligned}$$

Il grafico è in figura 26.

3. Esplicitando la variabile y nella (76):

$$\Gamma_k)y = f_k(x), \quad k = 1, 2$$

essendo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[-3x + \sqrt{5(x^2 + 4)} \right] \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[-3x - \sqrt{5(x^2 + 4)} \right] \end{aligned}$$

le derivate:

$$f'_k(x) = \frac{1}{2} \left[-3 \pm \frac{5x}{\sqrt{5(x^2 + 4)}} \right]$$

Risulta:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : f'_k(x) = 0,$$

per cui:

$\nexists P \in \Gamma_k$: la tangente a Γ_k in P è parallela all'asse x

Le equazioni richieste:

$$\begin{aligned}t_1) y &= 2 - x \\n_1) y &= x \\t_2) y &= -4 + \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{35}} \right) (x - 1) \\n_2) y &= -4 - \frac{2(x - 1)}{1 + \sqrt{\frac{3}{35}}}\end{aligned}$$

4. La (77) è equivalente a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (90)$$

essendo $a = \sqrt{10}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{10}$, il semiasse maggiore e il semiasse minore, rispettivamente. Per scrivere le equazioni richieste, differenziamo rispetto a x , primo e secondo membro della (90):

$$\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0,$$

da cui:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

Indichiamo con (x_0, y_0) il punto di Γ in cui la retta tangente ha coefficiente angolare $m_0 = -2/9$. Deve essere:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = -\frac{4x_0}{9y_0} = -\frac{2}{9}$$

Otteniamo quindi:

$$y_0 - 2x_0 = 0 \quad (91)$$

Inoltre:

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \implies \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \iff x_0^2 - 1 = 0 \quad (92)$$

Le (91)-(92) compongono il sistema:

$$\begin{aligned}2x_0 - y_0 &= 0 \\x_0^2 + 0 &= 1\end{aligned} \quad (93)$$

Le soluzioni di (93) sono:

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= (1, 2) \\(x'_0, y'_0) &= (-1, -2)\end{aligned} \quad (94)$$

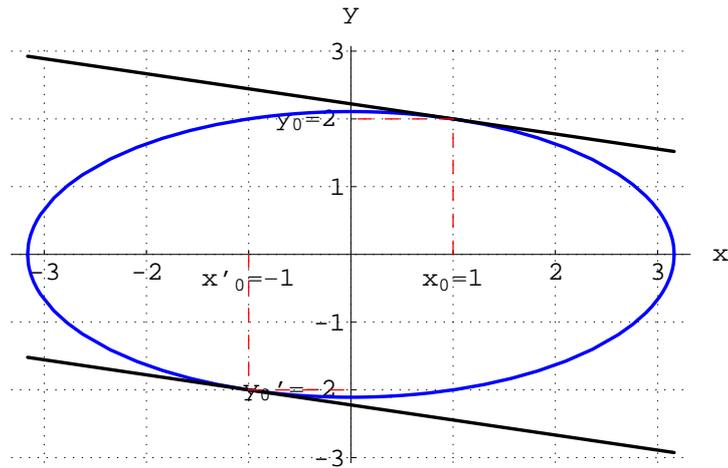


Figura 27: Grafico di Γ) $4x^2 + 9y^2 = 40$ e delle rette t_{\pm} .

Le equazioni delle tangenti a Γ per i punti (93) sono:

$$t_{\pm}) y = -\frac{2}{9}x \mp \frac{20}{9} \quad (95)$$

Il grafico è in figura 27.

5. Differenziamo rispetto a x primo e secondo membro della (78):

$$x dx - y dy = 0,$$

donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Se m_0 è il coefficiente angolare della tangente t :

$$m_0 = \frac{x_0}{y_0} \quad (96)$$

essendo (x_0, y_0) le coordinate di $P_0 = t \cap \Gamma$. L'appartenenza di tale punto a Γ implica:

$$x_0^2 - y_0^2 = 16, \quad (97)$$

che a sua volta implica:

$$x_0 + y_0 \neq 0 \quad (98)$$

Osserviamo che $P_1 (x_1 = 2, y_1 = -2) \in t$, donde:

$$y + 2 = m_0 (x - 2) \quad (99)$$

D'altro canto $P_0 \in t$, donde:

$$y_0 + 2 = m_0 (x_0 - 2) \quad (100)$$

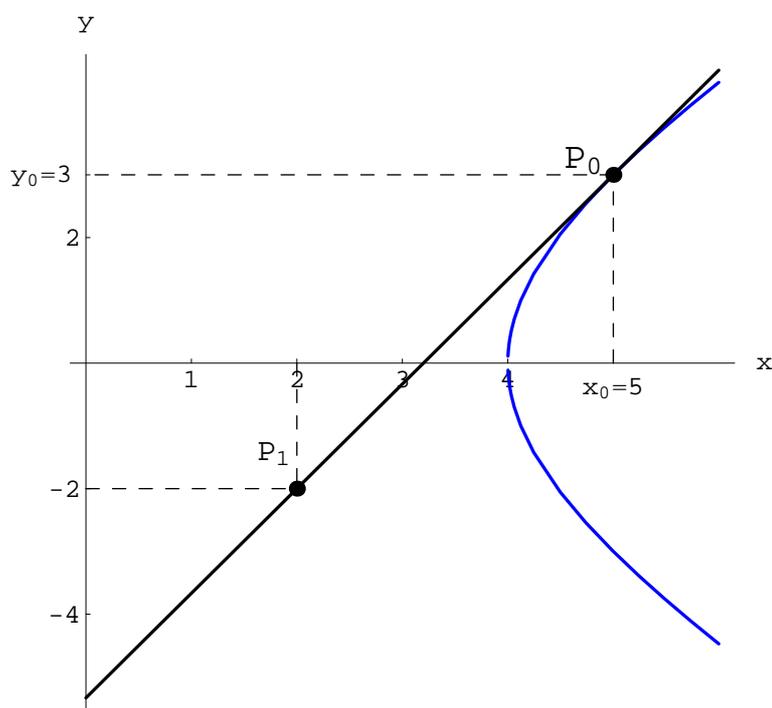


Figura 28: Grafico di Γ) $x^2 - y^2 = 16$ e della retta t .

Sostituendo nella (100) il valore di m_0 dato dalla (96):

$$y_0^2 - x_0^2 + 2(y_0 + x_0) = 0 \quad (101)$$

Tenendo conto della (98), l'ultima equazione equivale a:

$$x_0 - y_0 = 2 \quad (102)$$

Le equazioni (97)-(97) compongono il sistema:

$$\begin{aligned} x_0^2 - y_0^2 &= 16 \\ x_0 - y_0 &= 2, \end{aligned} \quad (103)$$

che ammette l'unica soluzione:

$$(x_0, y_0) = (5, 3),$$

da cui l'equazione di t :

$$y = 3 + \frac{5}{3}(x - 5) \quad (104)$$

Il grafico è in figura 28.

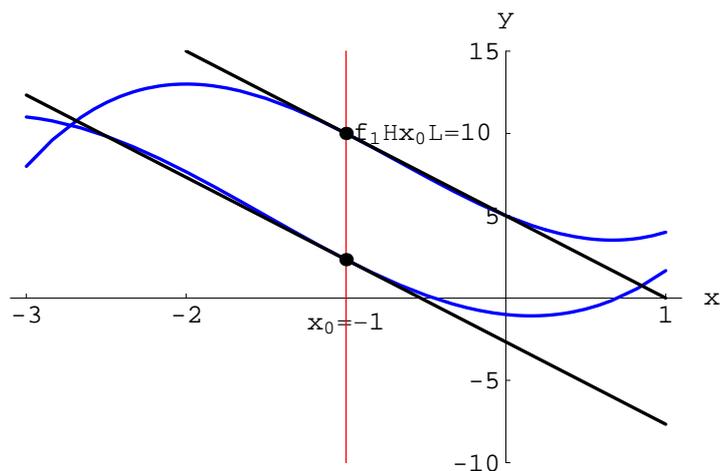


Figura 29: Grafico di Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $[-3, 1]$

6. Derivando le (79):

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3x^2 + 4x - 4 \\ f_2'(x) &= 2x^2 + 6x - 1 \end{aligned} \quad (105)$$

Le ascisse dei punti $P \in \Gamma_k$ tali che le rette tangenti rispettivamente a Γ_1 e Γ_2 risultano parallele, sono le soluzioni dell'equazione:

$$f_1'(x) = f_2'(x), \quad (106)$$

le cui soluzioni sono:

$$x_0 = -1, x'_0 = 3$$

Quindi le equazioni richieste sono:

$$x = x_0, x = x'_0$$

Il grafico è in 29 - 30

7. Differenziamo rispetto a x primo e secondo membro della (80):

$$ydy = 2pdx,$$

quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y} = m \quad (107)$$

L'equazione della retta tangente è:

$$y = \frac{2p}{y}x + n \quad (108)$$

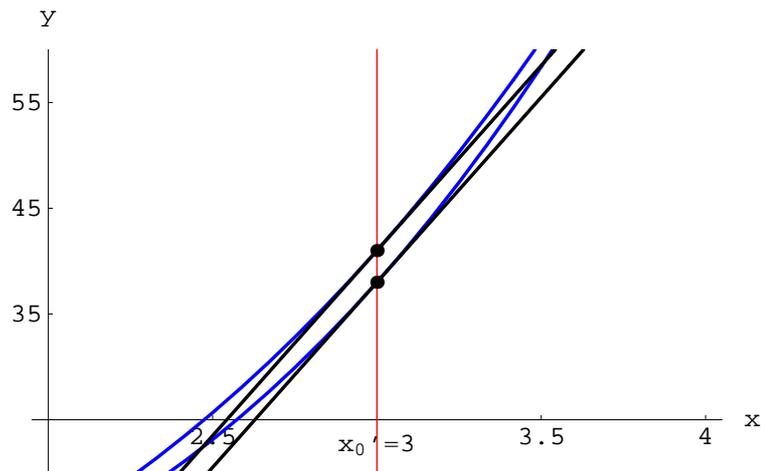


Figura 30: Grafico di Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $[2, 4]$

Risolvendo la (108) rispetto a n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{2p}{y}x \\ &= \frac{2px}{\sqrt{4px}} \\ &= \frac{y}{2} \\ &= \frac{p}{m}, \end{aligned}$$

donde:

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Il grafico è in figura 31.

8. La derivata di $f(x)$ è:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

In $x_0 = 2$:

$$f(x_0) = 1, f'(x_0) = -3$$

Sostituendo nelle (74):

$$\begin{aligned} S_t &= \left| \frac{1}{-3} \right| = \frac{1}{3} \\ S_n &= |1 \cdot (-3)| = 3 \\ n &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

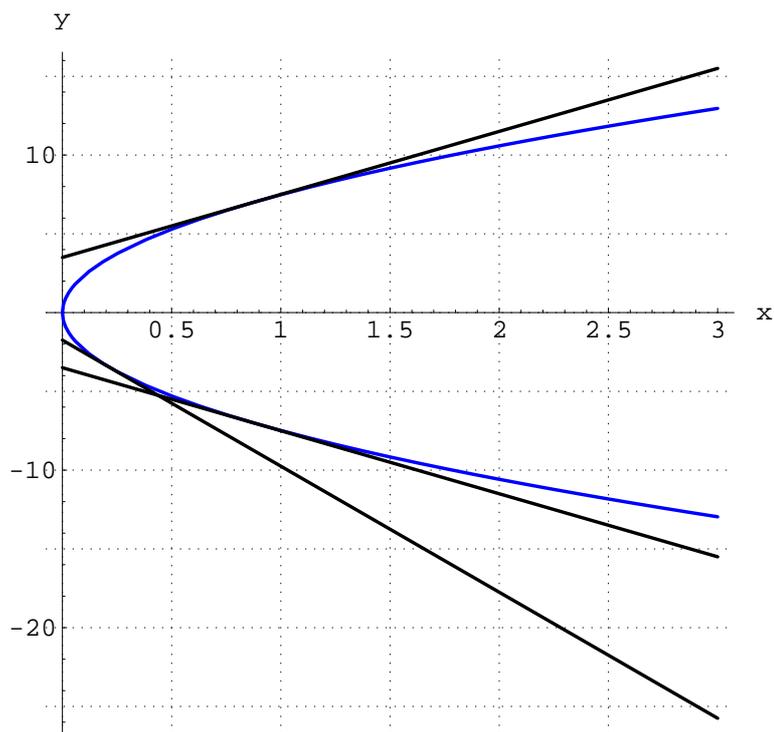


Figura 31: Grafico di $\Gamma) y^2 = 2px$.

9. Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione di Γ_1, Γ_2 ; occorre risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x \\ 2x^2 &= 12 - 5y, \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

$$(1, 2), (4, -4)$$

Quindi i punti di intersezione sono:

$$P_1(x_1 = 1, y_1 = 2), P_2(x_2 = 4, y_2 = -4)$$

L'angolo α sotto cui si intersecano le curve altro non è che l'angolo tra le rispettive rette tangenti, donde:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, \quad (109)$$

essendo m_k i coefficienti angolari delle tangenti. Per il calcolo di m_k , poniamo:

$$f_1(x) = 2\sqrt{x}, f_2(x) = -2\sqrt{x}, g(x) = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x^2 \quad (110)$$

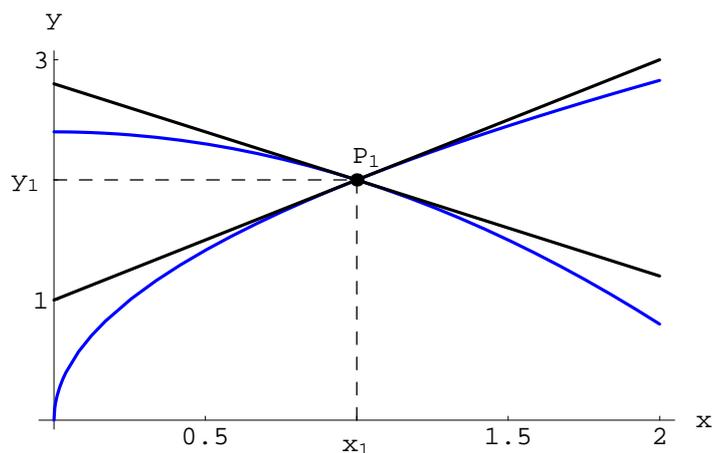


Figura 32: Intersezione in $P_1 (x_1 = 1, y_1 = 2)$.

Da ciò segue:

$$f'_1(x_1) = 1 = m_1$$

$$g'(x_1) = -\frac{4}{5} = m_2,$$

che sostituiti nella (109):

$$\tan \alpha = 9 \implies \alpha \simeq 83^\circ.7$$

Nel punto P_2 :

$$f'_2(x_2) = -\frac{1}{2} = m'_1$$

$$g'(x_2) = -\frac{16}{5} = m'_2$$

L'angolo di intersezione è:

$$\tan \beta = \frac{27}{26} \implies \beta \simeq 46^\circ.1$$

Il grafico è in figura 32 - 33

10. Deriviamo le (82):

$$f'_1(x) = 3x^2$$

$$f'_2(x) = 4x$$

In $x_1 = 0$ si annullano entrambe: $f'_1(x_1) = f'_2(x_2) = 0$: $\alpha = \arctan \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \arctan 0 = 0$. Nel punto $x_2 = 2$:

$$f'_1(x_2) = 12 = m'_1$$

$$f'_2(x_2) = 8 = m'_2,$$

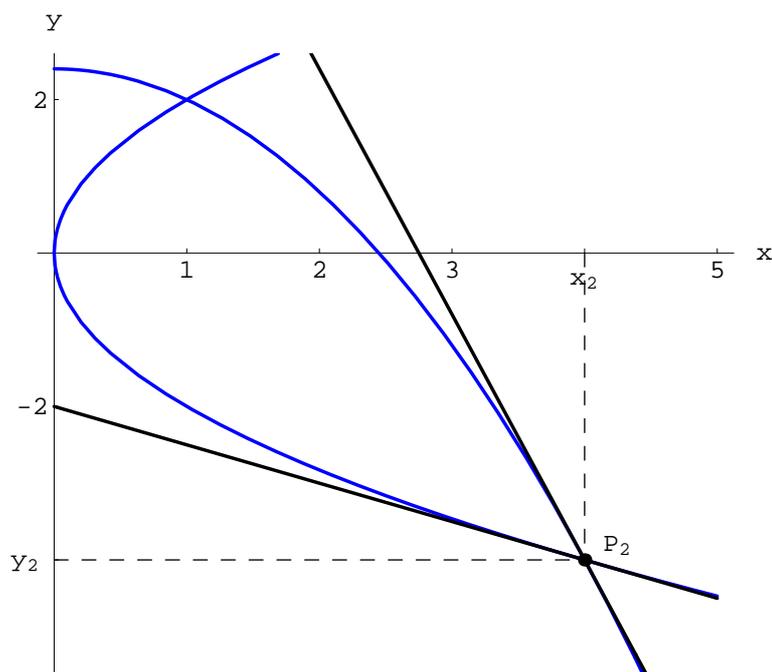


Figura 33: Intersezione in $P_2 (x_2 = 4, y_2 = -4)$.

donde:

$$\begin{aligned} \beta &= \arctan \frac{m'_1 - m'_2}{1 + m'_1 m'_2} \\ &= \arctan \frac{4}{97} \end{aligned}$$

11. Poniamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9, \quad (111)$$

la cui derivata è:

$$f'(x) = 6x^2 + 26x + 5$$

Nel punto $(\xi, \eta) \in \Gamma) y = f(x)$, il coefficiente angolare della retta tangente è:

$$m = 6\xi^2 + 26\xi + 5 \quad (112)$$

L'appartenenza di (ξ, η) a Γ implica:

$$\eta^2 = 2\xi^3 + 13\xi^2 + 5\xi + 9 \quad (113)$$

L'equazione della retta tangente per l'origine è:

$$t) y = mx$$

D'altro canto $(\xi, \eta) \in t$, donde:

$$\eta = m\xi \quad (114)$$

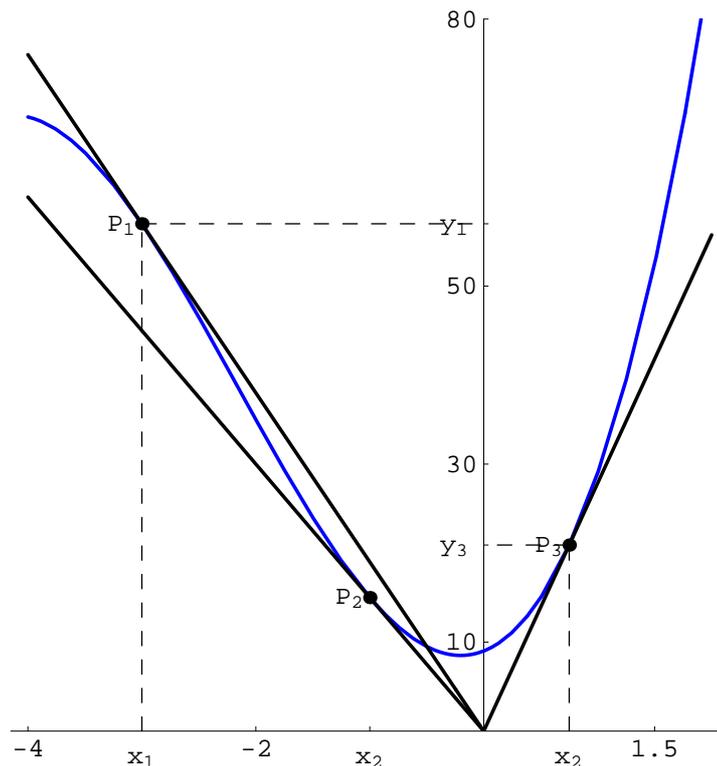


Figura 34: Grafico di Γ) $y = f(x)$ e delle rette tangenti passanti per l'origine.

Le (112)-(113)-(114) compongono il sistema:

$$\begin{aligned} 2\xi^3 + 13\xi^2 + 5\xi + 9 &= \eta^2 & (115) \\ 6\xi^2 + 26\xi + 5 &= m \\ \xi &= \frac{\eta}{m}, \end{aligned}$$

Eliminando le variabili m, η in (115):

$$4\xi^3 + 13\xi^2 - 9 = 0 \iff (\xi + 1)(4\xi^2 + 9\xi - 9) = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{4} \quad (116)$$

Il grafico è in figura 34.

12. Le (83) possono essere rappresentate dalle funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\sqrt{-x^2 + 4x} & (117) \\ f_2(x) &= -f_1(x) \\ g_1(x) &= -\sqrt{8 - x^2} \\ g_2(x) &= -g_1(x) \end{aligned}$$

L'intersezione avviene nei punti $P_1 (x_1 = 2, y_1 = -2)$, $P_2 (x_2 = 2, y_2 = 2)$. Derivando le (117):

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} \\ f_2'(x) &= -f_1'(x) \\ g_1'(x) &= \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} \\ g_2'(x) &= -g_1'(x), \end{aligned}$$

donde i coefficienti angolari delle tangenti in P_1 :

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= 1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

In P_2 :

$$\begin{aligned} m_1' &= 0 \\ m_2' &= -1 \end{aligned}$$

da cui:

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

Il grafico è in figura 35.

1.5.5 Derivazione di funzioni trigonometriche

1. $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$
2. $f(x) = \sin kx$
3. $f(x) = \cos 5x$
4. $f(x) = 2 \sin 2x$
5. $f(x) = 4 \cos \frac{x}{2}$
6. $f(x) = \tan 3x$
7. $f(x) = 4 \tan 5x$
8. $f(x) = \frac{1}{4} \cot 8x$
9. $f(x) = \sin 5x - \cos 3x$
10. $f(x) = \tan x - \cot x$

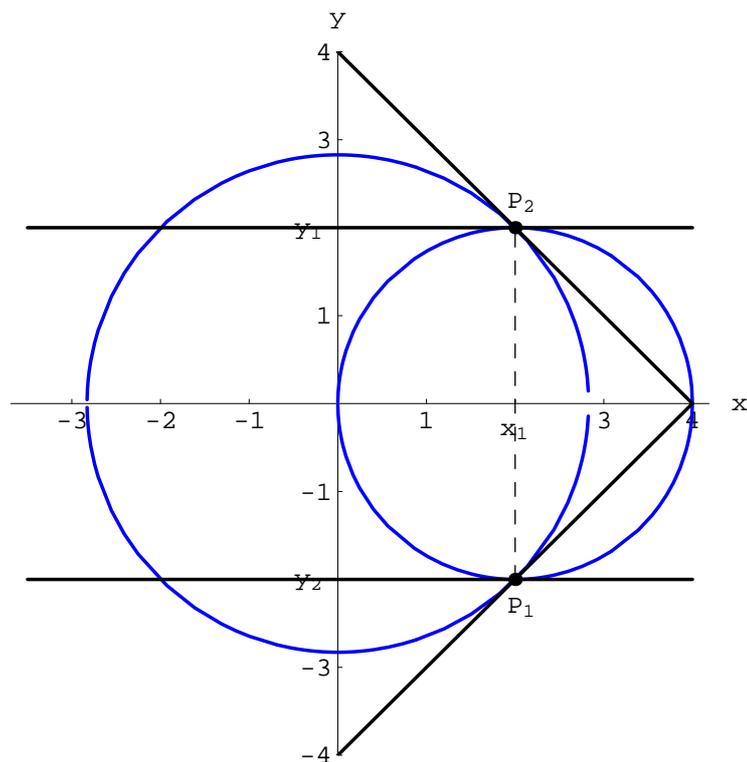


Figura 35: Grafico di γ_k e delle tangenti nei punti di intersezione.

11. $f(x) = 2 \sin x - 3 \tan x$
12. $f(x) = \tan x^2$
13. $f(x) = \cot(1 - 2x^2)$
14. $f(x) = \sec^3 \sqrt{x}$
15. $f(x) = \sqrt{\csc 2x}$
16. $f(x) = 9 \sec \frac{x}{3}$
17. $f(x) = \frac{1}{4} \csc 4x$
18. $f(x) = x^2 \sin x$
19. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
20. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
21. $f(x) = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$
22. Calcolare la derivata terza di $f(x) = x \sin x$
23. Calcolare la derivata seconda di $f(x) = \tan^2(3x - 2)$
24. $f(x) = \sin x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$

25. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
26. $f(x) = \sin \frac{2}{x}$
27. $f(x) = \cos(1 - x^2)$
28. $f(x) = \cos(1 - x)^2$
29. $f(x) = \sin^2(3x - 2)$
30. $f(x) = \sin^3(2x - 3)$
31. $f(x) = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$
32. $f(x) = \frac{1}{(\sec 2x - 1)^{3/2}}$
33. $f(x) = \frac{\tan(2x)}{1 - \cot(2x)}$
34. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$
35. Sia $y(x) = A \sin kx + B \cos kx$, essendo A, B, k costanti. Mostrare che la funzione $y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

36. Assegnate le curve $\Gamma_1) y = f_1(x)$, $\Gamma_2) y = f_2(x)$, essendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 \sin^2 x \\ f_2(x) &= \cos 2x, \end{aligned} \tag{118}$$

si determinino gli angoli acuti di intersezione tra Γ_1 e Γ_2 nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

1.5.5.1 Applicazioni

1. In una data località ad un certo istante l'angolo di elevazione del sole è 45° e diminuisce di $1/4$ rad/h. Determinare la velocità di crescita dell'ombra su terreno orizzontale di un palo alto $h = 16$ m.

1.5.6 Soluzioni

1. $f'(x) = 5 \cos x - 3 \sin x$

2. Osserviamo che per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dx} \sin \phi(x) = \phi'(x) \cos \phi(x)$$

Nel caso in esame: $\phi(x) = kx$:

$$f'(x) = k \cos kx$$

3. $f'(x) = -5 \sin 5x$

4. $f'(x) = 4 \cos 2x$

5. $f'(x) = -2 \sin \frac{x}{2}$

6. $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$

7. $f'(x) = \frac{20}{\cos^2 5x}$

8. $f'(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^2 8x} \cdot 8 = -\frac{2}{\sin^2 8x}$

9. $f'(x) = 5 \cos 5x + 3 \sin 3x$

10. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x}$

11. $f'(x) = 2 \cos x - \frac{3}{\cos^2 x}$

12. $f'(x) = \frac{2x}{\cos^2 x}$

13. $f'(x) = \frac{d}{dx} (1 - 2x^2) \left(\frac{-1}{\sin^2(1-2x^2)} \right) = \frac{4x}{\sin^2(1-2x^2)} = 4x \cot^2(1 - 2x^2)$

14. $f(x) = (\cos \sqrt{x})^{-3} \implies f'(x) = -3 (\cos \sqrt{x})^{-4} \cdot (-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos^3 \sqrt{x}}$

15. $f(x) = (\sin 2x)^{-1/2} \implies$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (\sin 2x)^{-3/2} \cdot 2 \cdot \cos 2x = -\frac{\cos 2x}{(\sin 2x)^{3/2}} = -\cot 2x \sqrt{\sin 2x}$$

16. $f'(x) = 9 \frac{d}{dx} \left[\cos \frac{x}{3} \right]^{-1} = 9 \left(\cos \frac{x}{3} \right)^{-2} \left(\sin \frac{x}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = 3 \frac{\sin \frac{x}{3}}{\cos^2 \frac{x}{3}} = 3 \sin \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$

17. $f'(x) \frac{1}{4} (-1) (\sin 4x)^{-2} (\cos 4x) = -\frac{\cos 4x}{\sin^2 4x}$

18. $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

19. $f'(x) = \frac{\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$

20. $f'(x) = \frac{(\cos - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$
 $= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$

$$21. f'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x - (2x) \cos x + (x^2 - 2) \sin x = x^2 \sin x$$

$$22. f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$$

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x = 2 \cos x - f'(x)$$

$$f'''(x) = -2 \sin x - f'(x) = -2 \sin x - \sin x - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x$$

$$23. f'(x) = 2 \tan(3x - 2) \cdot \frac{3}{\cos^2(3x-2)} = \frac{6 \tan(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$$

$$f'(x) = \frac{18 + 2 \cos(3x-2) \sin(3x-2) \cdot 18 \tan(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$$

$$= \frac{18 + 36 \sin^2(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$$

$$24. f'(x) = x \sin x + 2x + 4x$$

$$25. f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$26. f'(x) = \left(\cos \frac{2}{x}\right) \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$27. f'(x) = -\sin(1 - x^2) \cdot (-2x) = 2x \sin(1 - x^2)$$

$$28. f'(x) = -\sin(1 - x)^2 \cdot 2 \cdot (1 - x) \cdot (-1) = 2(1 - x) \sin(1 - x)^2$$

$$29. f'(x) = 2 \sin(3x - 2) \cos(3x - 2) \cdot 3 = 6 \sin(3x - 2) \cos(3x - 2) = 3 \sin(6x - 4)$$

$$30. f'(x) = 3 \sin^2(2x - 3) \cos(2x - 3) \cdot 2 = 6 \sin^2(2x - 3) \cos(2x - 3) \\ = 3 \sin(4x - 6) \cos(2x - 3)$$

31. Siamo tentati ad applicare la regola di derivazione di un prodotto. In realtà la funzione si semplifica:

$$f(x) = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x \\ = \frac{\sin x}{\cos x} \sin x \cos x \\ = \sin^2 x,$$

donde:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \\ = \sin 2x$$

$$32. f'(x) = D[(\cos 2x)^{-1} - 1]^{-3/2} = -\frac{3}{2} [(\cos 2x)^{-1} - 1]^{-5/2} (\cos 2x)^{-2} \cdot 2 \cdot \sin 2x \\ = -3 \frac{\sin 2x}{\cos 2x [(\cos 2x)^{-1} - 1]^{5/2}} = -3 \frac{\tan 2x \sec 2x}{(\sec 2x - 1)^{5/2}}$$

$$33. f'(x) = \frac{2 \sec 2x (\sec 2x - \csc x \sec x)}{(\cot 2x - 1)^2}$$

$$34. f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x$$

35. La derivata prima è:

$$\frac{dy}{dx} = k (A \cos x - B \sin kx)$$

La derivata seconda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 (A \sin kx + B \cos kx) = -k^2 y,$$

donde l'asserto.

36. Determiniamo innanzitutto le ascisse dei punti $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. A tale scopo risolviamo nell'intervallo $(0, 2\pi)$, l'equazione trigonometrica:

$$2 \sin^2 x = \cos 2x$$

Per le formule di duplicazione l'equazione precedente diventa:

$$2 \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Cioè:

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

Osservando che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono periodiche di periodo π , è facile rendersi conto che le soluzioni nell'intervallo $(0, 2\pi)$ sono:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5}{6}\pi, x_3 = x_1 + \pi = \frac{7}{6}\pi, x_4 = x_2 + \pi = \frac{11}{6}\pi$$

Tali punti sono visibili nel grafico di figura 36, da cui vediamo che la simmetria delle curve conserva l'angolo di intersezione nei punti $P_k(x_k, y_k)$ con $k = 1, \dots, 4$.

Le derivate di $f_k(x)$ sono:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 4 \sin x \cos x \\ f_2'(x) &= -2 \sin 2x \end{aligned}$$

I coefficienti angolari delle rette tangenti in $P_1(x_1, y_1 = 1/2)$ sono:

$$m_1 = \sqrt{3}, m_2 = -\sqrt{3}$$

Quindi l'angolo di intersezione è:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = -\sqrt{3} \implies \alpha = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

L'angolo acuto:

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

Il grafico è riportato in figura 37.

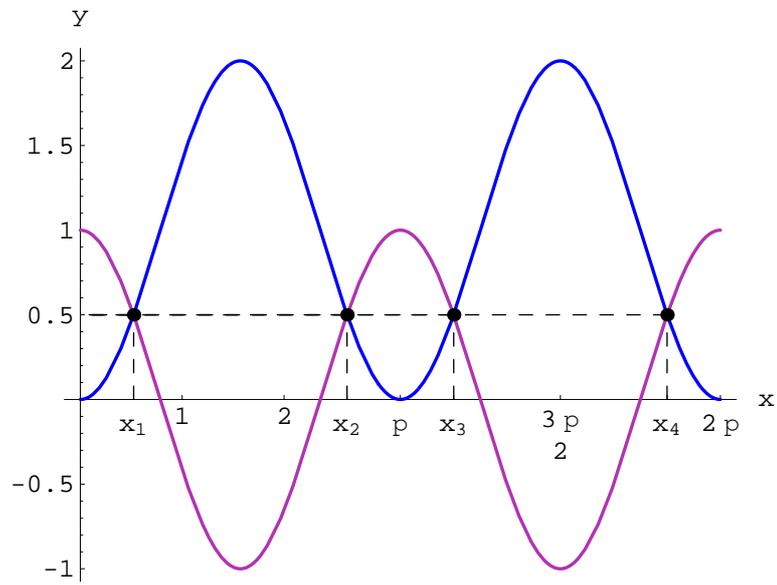


Figura 36: Grafico di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

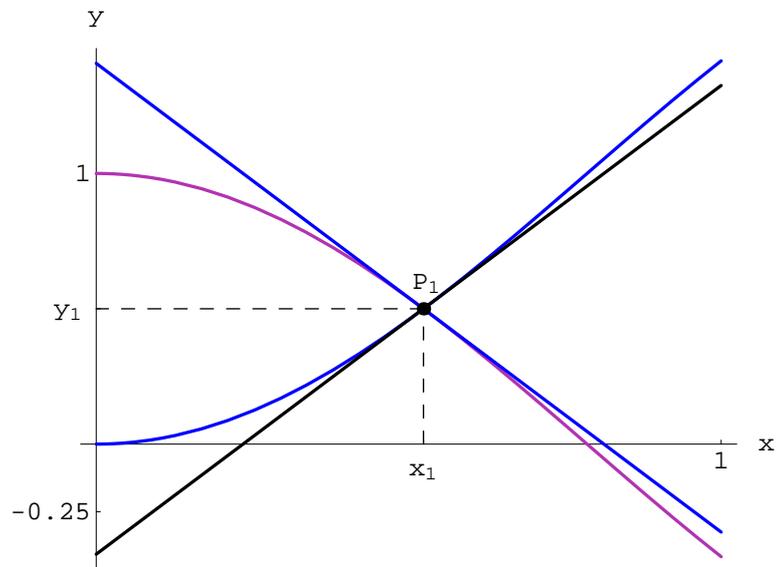


Figura 37: Grafico di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nell'intervallo $(0, 1)$.

1.5.6.1 Applicazioni

1. Indichiamo con $L(t)$ e $\alpha(t)$ rispettivamente la lunghezza dell'ombra e l'angolo di elevazione del sole al tempo t . Assumiamo come istante iniziale $t = 0$, l'istante in cui l'angolo è $\pi/4$:

$$\alpha(0) \stackrel{def}{=} \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \quad (119)$$

Sia $h = 16$ m l'altezza del palo. La lunghezza iniziale dell'ombra è:

$$L_0 = \frac{h}{\tan \alpha_0} = h \quad (120)$$

A tutti i tempi:

$$L(t) = \frac{h}{\tan \alpha(t)} \quad (121)$$

Quindi la velocità di crescita dell'ombra:

$$\dot{L}(t) = -\frac{h\dot{\alpha}(t)}{\sin^2 \alpha(t)} \quad (122)$$

Dobbiamo determinare $\alpha(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$. Quest'ultima è:

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_0 = -|\dot{\alpha}_0| = -\frac{1}{4} \text{rad/h} \quad (123)$$

Siccome $\dot{\alpha}(t) = \text{const}$, segue che $\alpha(t)$ è lineare:

$$\alpha(t) = C_1 + C_2 t$$

C_1 e C_2 sono costanti fissate dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha(0) = \frac{\pi}{4} \\ C_2 &= -|\dot{\alpha}_0|, \end{aligned}$$

donde:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{4},$$

per cui:

$$\dot{L}(t) = \frac{4}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)} \quad (124)$$

Mentre $L(t)$:

$$L(t) = \frac{16}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4}\right)} \quad (125)$$

Si osservi che nelle (124)-(125) il tempo t è espresso in ore e varia in $(0, \pi)$. Risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} L(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} \dot{L}(t) = +\infty$$

Il grafico di tali funzioni è in figura 38.

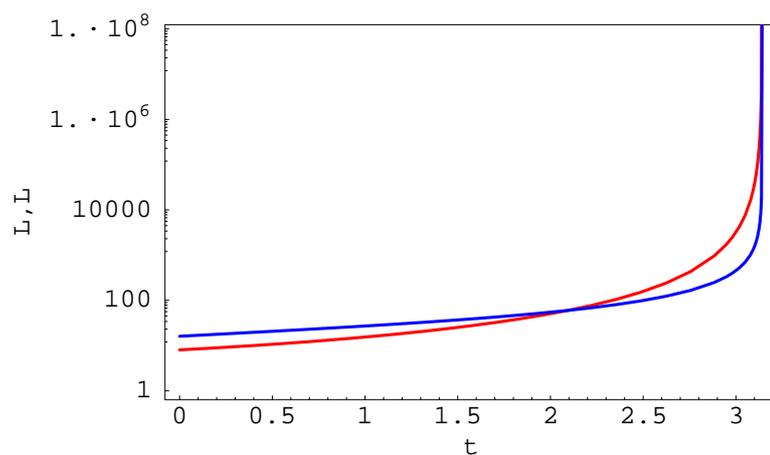


Figura 38: Grafico in scala logaritmica di $L(t)$, $\dot{L}(t)$.

1.5.7 Derivazione di funzioni trigonometriche inverse

1. $f(x) = \arcsin(2x - 3)$
2. $f(x) = \arcsin(3x)$
3. $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{2}x\right)$
4. $f(x) = \arccos(x^2)$
5. $f(x) = \arctan(3x^2)$
6. $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
7. $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
8. $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
9. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
10. $f(x) = \arctan\left(\frac{3}{x}\right)$
11. $f(x) = \arcsin(x - 1)$
12. $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$
13. $f(x) = x \arcsin x$
14. $f(x) = x^2 \arccos\left(\frac{2}{x}\right)$
15. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a}$
16. $f(x) = (x - a) \sqrt{2ax - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right)$

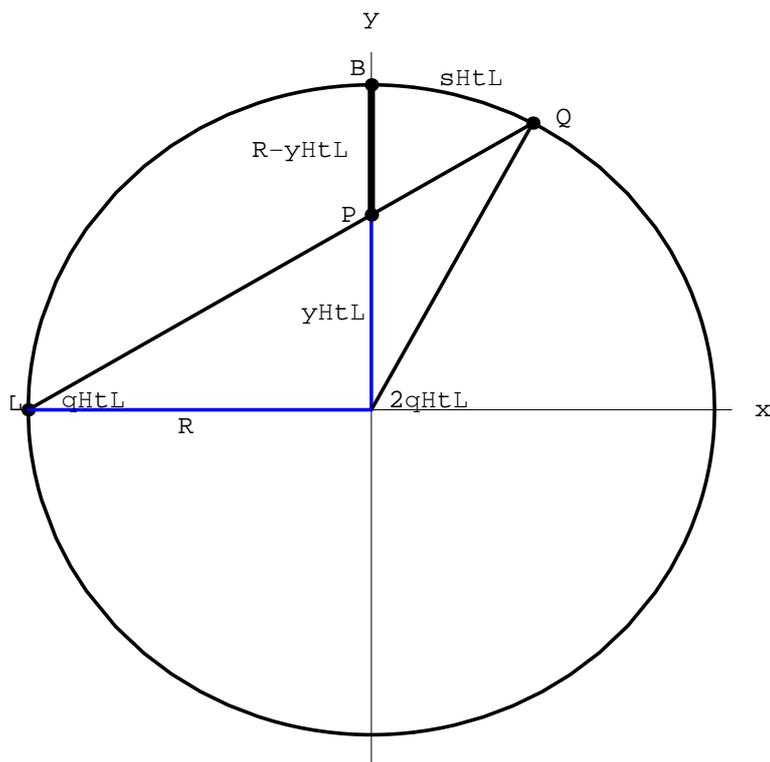


Figura 39: Esercizio 1 di 1.5.6.1

1.5.7.1 Applicazioni

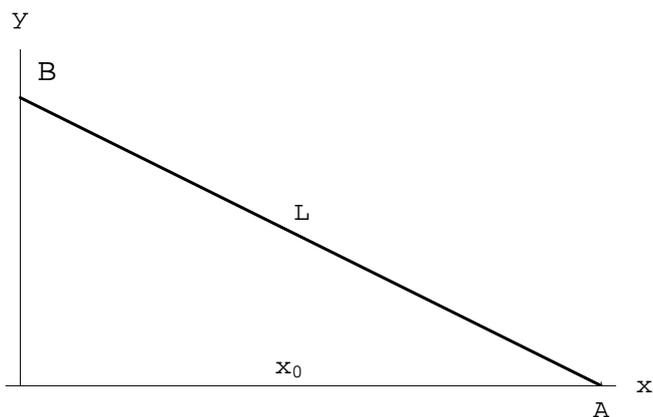
1. Un lampione L illumina un'arena circolare (fig. 39). Un ragazzo, partendo da B , corre ad una velocità costante v_0 verso il centro dell'arena. Dimostrare che la velocità dell'ombra lungo il contorno nell'istante in cui il ragazzo si trova a metà tra B e il centro, dipende linearmente da v_0 ed è indipendente dal raggio dell'arena.
2. Le estremità di un segmento $AB = L = 5$ m scivolano sugli assi coordinati x e y di un riferimento monometrico ortogonale $R(Oxy)$. La velocità dell'estremità A è costante ed è pari a $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Determinare la velocità di B nell'istante in cui l'ascissa di A è $x_0 = 3$ m (fig. 2).
3. Il lato di un rettangolo ha una lunghezza costante a_0 , mentre l'altro lato cresce secondo la legge:

$$b(t) = b_0 + \dot{b}_0 t,$$

essendo t il tempo, e b_0, \dot{b}_0 costanti (lunghezza iniziale e velocità di crescita). Si dimostri che nel limite per $t \rightarrow +\infty$, la diagonale cresce con la medesima velocità con cui cresce il lato b .

1.5.8 Soluzioni

$$1. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$



$$2. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \frac{d}{dx} (3x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$3. f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}} \frac{d}{dx} (\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4. f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \frac{d}{dx} (x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$5. f'(x) = \frac{1}{1+(3x^2)^2} \frac{d}{dx} (3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4}$$

$$6. f'(x) = -\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2-2x+1+x^2+2x} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$7. f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$8. f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \frac{d}{dx} (\frac{1+x}{1-x}) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$9. f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$10. f'(x) = \frac{1}{1+\frac{9}{x^2}} \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9}$$

$$11. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x(x-2)}}$$

$$12. f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$13. f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. f'(x) = 2x \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + x^2 \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \left(-\frac{2}{x^2}\right)\right] = 2x \left[\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right]$$

$$15. f'(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}-x \frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{1}{a} = \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$16. f'(x) = \sqrt{2ax-x^2} - \frac{(x-a)^2}{\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2\sqrt{2ax-x^2}$$

1.5.8.1 Applicazioni

1. Fissiamo un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $R(Oxy)$ come in fig. 39. La posizione iniziale del ragazzo è $B(0, R)$, e la sua equazione oraria è:

$$y(t) = R + \dot{y}_0 t, \quad (126)$$

essendo $\dot{y}_0 = -v_0$. La velocità dell'ombra è la velocità del punto Q che compie un moto circolare. Dalla figura 39 vediamo che l'ascissa curvilinea di Q contata a partire da B , è:

$$s(t) = R \left[\frac{\pi}{2} - 2\theta(t) \right] \quad (127)$$

Dalla medesima figura vediamo che l'angolo $\theta(t)$ è:

$$\theta(t) = \arctan \left(\frac{y(t)}{R} \right) \quad (128)$$

Sostituendo nella (127):

$$s(t) = R \left[\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\frac{R - v_0 t}{R} \right) \right] \quad (129)$$

La variabile t varia nell'intervallo $[0, t_1]$, essendo t_1 l'istante di tempo in cui il ragazzo arriva nel centro dell'arena. Evidentemente:

$$t_1 = \frac{R}{v_0}, \quad s(t_1) = \frac{\pi R}{2}$$

La (129) può essere riscritta come:

$$s(t) = R \left\{ \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left[\frac{y(t)}{R} \right] \right\},$$

la cui derivata è:

$$\dot{s}(t) = -2 \frac{R^2 v_0}{R^2 + y^2(t)}, \quad (130)$$

che è la velocità di Q . Il problema richiede il valore di tale velocità quando l'ordinata del ragazzo è $R/2$. Sia $\tau \in (0, t_1)$ l'istante tale che $y(\tau) = R/2$, donde:

$$\begin{aligned} \dot{s}(\tau) &= -2 \frac{R^2 v_0}{R^2 + \frac{R^2}{4}} \\ &= \frac{8}{5} v_0 \end{aligned}$$

che è la velocità richiesta. Da ciò vediamo che $\dot{s}(\tau)$ è indipendente dal raggio R ed è una funzione lineare di v_0 .

Sostituendo l'espressione analitica di $y(t)$ nella (130):

$$\dot{s}(t) = 2 \frac{R^2 v_0}{v_0 t^2 + 2Rv_0 t + 2R^2} \quad (131)$$

Si osservi che l'accelerazione di Q è:

$$\ddot{s}(t) = \frac{4v_0^2}{R} \frac{\eta(t)}{(1 + \eta^2(t))^2} \quad (132)$$

Nella (132) la variabile adimensionale

$$\eta(t) = \frac{R - v_0 t}{R},$$

che misura l'ordinata del ragazzo in unità $R = 1$. Dalla (132) vediamo che $\ddot{s}(t) = 0$ per $\eta(t) = 0 \iff t = R/v_0 = t_1$; a ciò corrisponde un punto di massimo per la velocità di Q .

2. Assumiamo $t = 0$ quando l'ascissa di A è pari a x_0 , per cui l'equazione del moto di A è:

$$x_A(t) = v_A t + x_0$$

Se $y_B(t)$ è l'ordinata di B , deve essere:

$$x_A(t)^2 + y_B(t)^2 = L^2, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

donde (tenendo conto che $y_B(t) \geq 0$):

$$y_B(t) = \sqrt{L^2 - x_0^2 - v_A^2 t^2 - 2v_A x_0 t} \quad (133)$$

La velocità di B è la derivata prima rispetto a t della funzione (133):

$$v_B(t) = \dot{y}(t) = -\frac{v_A(v_A t + x_0)}{\sqrt{L^2 - x_0^2 - v_A^2 t^2 - 2v_A x_0 t}}$$

La funzione $y_B(t)$ è definita in $(0, t_*)$ essendo t_* tale che:

$$L^2 - x_0^2 - v_A^2 t_*^2 - 2v_A x_0 t_* = 0$$

Si osservi che t_* si ricava dalla condizione:

$$x_A(t_*) = L$$

Quindi:

$$t_* = \frac{L - x_0}{v_A} = 1 \text{ s}$$

La richiesta del problema è: determinare $v_B(t)$ quando $x_A(t) = x_0$, donde è $t = 0$:

$$v_B(0) = -\frac{v_A x_0}{\sqrt{L^2 - x_0^2}} = -\frac{3}{2} \text{ m s}^{-1}$$

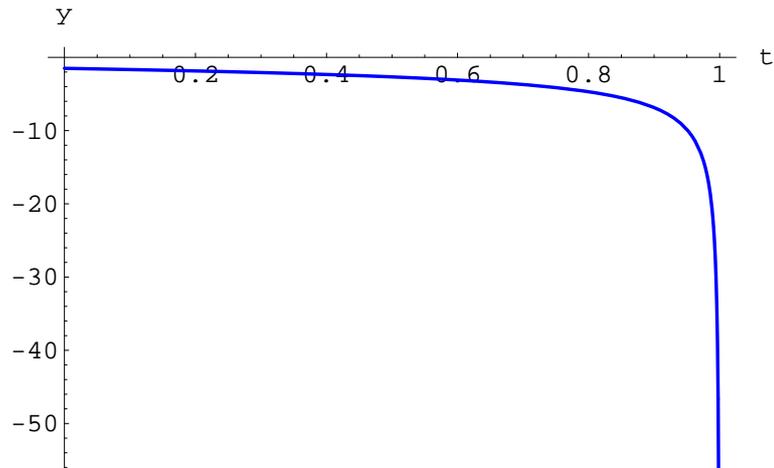


Figura 40:

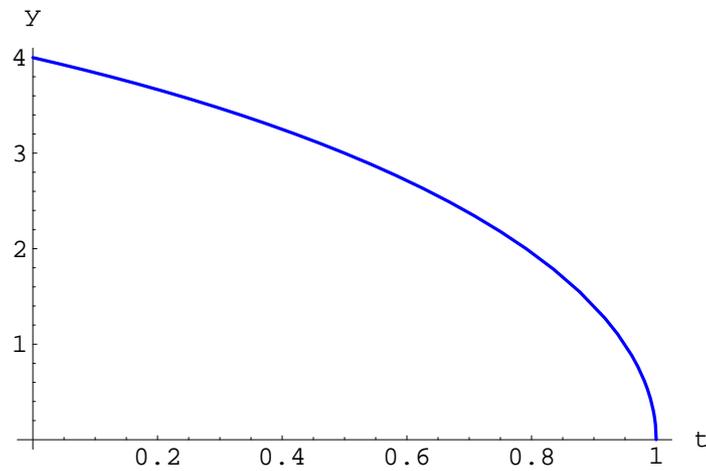


Figura 41:

Osservazione 26 Come c'era da aspettarsi è $\dot{y}(t) < 0, \forall t \in [0, +\infty)$. Fisicamente significa che l'estremità B si muove nel verso delle ordinate decrescenti. Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} \dot{y}(t) = -\infty$$

Il grafico è riportato in figura 40.

mentre il grafico di $y_B(t)$ è in figura 41.

3. La lunghezza della diagonale al generico istante t è:

$$d(t) = \sqrt{a_0^2 + b(t)^2} = \sqrt{d_0 + \dot{b}_0 t^2 + 2b_0 \dot{b}_0 t}, \quad (134)$$

essendo $d_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$. Derivando la (134):

$$\dot{d}(t) = \frac{\dot{b}_0 (b_0 + \dot{b}_0 t)}{\sqrt{d_0^2 + \dot{b}_0^2 t^2 + 2b_0 \dot{b}_0 t}},$$

per cui:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{d}(t) = \dot{b}_0 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_0 + \dot{b}_0^2 t}{|t| \sqrt{\dot{b}_0 + \frac{d_0^2}{t^2} + 2 \frac{b_0 \dot{b}_0}{t}}} = \dot{b}_0$$

1.5.9 Derivazione di funzioni logaritmiche ed esponenziali

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \lg_a(3x^2 + 4)$
2. $f(x) = \ln(x + 5)^2$
3. $f(x) = \ln^2(x + 5)$
4. $f(x) = \ln[(x^2 + 4)(x^2 + 1)]$
5. $f(x) = \ln(4x - 3)$
6. $f(x) = \ln \sqrt{5 - x^2}$
7. $f(x) = \ln(4x^3)$
8. $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)^3$
9. $f(x) = x \ln x - x$
10. $f(x) = \ln \left[\frac{2x^4}{(2x-5)^2} \right]$
11. $f(x) = \ln(\sin ax)$
12. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
13. $f(x) = e^{-bx}$
14. $f(x) = e^{x^n}$
15. $f(x) = x^3 2^x$
16. $f(x) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$
17. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)$
18. $f(x) = e^{\sin 4x}$
19. $f(x) = 3^{-x^2}$
20. $f(x) = e^{e^x}$
21. $f(x) = x^7 e^x$
22. $f(x) = (x - 1) e^x$

23. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

24. $f(x) = e^x \cos x$

25. $f(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$

26. $f(x) = x^2 \arcsin x$

27. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

28. $f(x) = x^n \ln x - \frac{x^n}{n}$

29. $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

Calcolare con il metodo della derivata logaritmica la derivata prima delle seguenti funzioni

1. $f(x) = x^x$

2. $f(x) = x^{x^2}$

3. $f(x) = \sqrt[x]{x}$

4. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

5. $f(x) = x^{x^x}$

6. $f(x) = x^{\ln x}$

7. $f(x) = x^{e^{-x^2}}$

8. $f(x) = x^{\sin x}$, tracciando poi il grafico.

9. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

10. $f(x) = (\arctan x)^x$

Calcolo di derivate seconde

1. $f(x) = e^{-x} \ln x$

2. $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$

3. $f(x) = e^{x^2}$

4. $f(x) = \sqrt[3]{\ln(1+x^2)}$

1.5.10 Soluzioni

1. $f'(x) = \frac{1}{3x^2+4} \cdot \lg_a e \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 + 4) = \frac{6x}{3x^2+4} \lg_a e = \frac{6x}{(3x^2+4) \ln a}$
2. $f'(x) = \frac{d}{dx} [2 \ln(x+3)] = \frac{2}{x+3}$
3. $f'(x) = 2 \ln(x+5) \cdot \frac{1}{x+5} = \frac{2 \ln(x+5)}{x+5}$
4. $f'(x) = \frac{d}{dx} [\ln(x^2+4) + \ln(x^2+1)] = 2x \left(\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+1} \right) = 2x \cdot \frac{2x^2+5}{(x^2+4)(x^2+1)}$
5. $f'(x) = \frac{4}{4x-3}$
6. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$
7. $f'(x) = \frac{12x^2}{4x^3} = \frac{3}{x}$
8. $f'(x) = \frac{d}{dx} [3 \ln(x^2+x-1)] = \frac{3}{x^2+x-1} (2x+1) = \frac{3(2x+1)}{x^2+x-1}$
9. $f'(x) = \frac{d}{dx} [\ln 2 + 4 \ln x - 2 \ln(2x-5)] = \frac{4(x-5)}{x(2x-5)}$
10. $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$
11. $f'(x) = \frac{1}{\sin ax} (\cos ax) \cdot a = a \cot ax$
12. $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
13. $f'(x) = -be^{-bx}$
14. $f'(x) = e^{x^n} \frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1} e^{x^n}$
15. $f'(x) = 3x^2 2^x + x^3 2^x \ln 2 = x^2 2^x (3 + x \ln 2)$
16. $f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1-e^{-2ax}}{1+e^{-2ax}} = \frac{2ae^{-2ax}(1+e^{-2ax}) + 2ae^{-2ax}(1-e^{-2ax})}{(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4ae^{-2ax}}{(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4a}{e^{2ax}(1+e^{-2ax})^2} = \frac{4a}{e^{2ax+e^{-2ax}+2}} = \frac{4a}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$
17. $f(x) = \ln g(x); g(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x} \implies g'(x) = \frac{\cos^2 + \sin x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \implies f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{\cos x}$
18. $f'(x) = e^{\sin 4x} \frac{d}{dx} (\sin 4x) = 4e^{\sin 4x} \cos 4x$
19. $f'(x) = -2x3^{-x^2} \ln 3$
20. $f'(x) = e^{g(x)}; g(x) \stackrel{def}{=} e^x \implies g'(x) = e^x; f'(x) = g'(x) e^{g(x)} = e^x e^{g(x)} = e^{x+g(x)} = e^{x+e^x}$
21. $f'(x) = x^6 e^x (7+x)$
22. $f'(x) = (x-1) e^x$
23. $f'(x) = e^x \frac{x-2}{x^3}$

$$24. f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$25. f'(x) = (2x - 2) e^x + (x^2 - 2x + 2) e^x = x^2 e^x$$

$$26. f'(x) = e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} = e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$27. f'(x) = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$28. f'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} - x^{n-1} = nx^{n-1}$$

$$29. f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Derivata logaritmica

1. La funzione è:

$$f(x) = x^x$$

Prendiamo il logarimo di primo e secondo membro:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

Quindi deriviamo:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1,$$

donde:

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

$$2. \ln f(x) = x^2 \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = x(2 \ln x + 1) \implies f'(x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$$

$$3. \ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \implies f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$$

$$4. \ln f(x) = \sqrt{x} \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\sqrt{x} \ln x + 2)$$

$$5. \ln f(x) = \ln(x^{x^x}) = x^x \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}(x^x \ln x) = (\ln x) \frac{d}{dx}(x^x) + x^x \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x} \\ \implies f'(x) = x^{x^x+x-1} (x \ln^2 x + \ln x + 1)$$

$$6. \ln f(x) = \ln(x^{\ln x}) = (\ln x)^2 \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \frac{\ln x}{x} \implies f'(x) = 2f(x) \frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x-1} \ln x$$

$$7. \ln f(x) = e^{-x^2} \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = -2xe^{-x^2} \ln x + \frac{e^{-x^2}}{x} \implies f'(x) = e^{-x^2} x^{e^{-x^2}-1} (1 - 2x^2 \ln x)$$

$$8. \ln f(x) = \sin x \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} (\sin x + x \cos x \ln x) \implies f'(x) = x^{\sin x-1} (\sin x + x \cos x \ln x). \text{ La funzione } f(x) \text{ è definita in } (0, +\infty) \text{ con } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ (figura 42)}$$

Essendo $|\sin x| \leq 1$, la funzione compie oscillazione con ampiezza linearmente crescente (grafico invilupato da $y = x$, figg. 43-44)

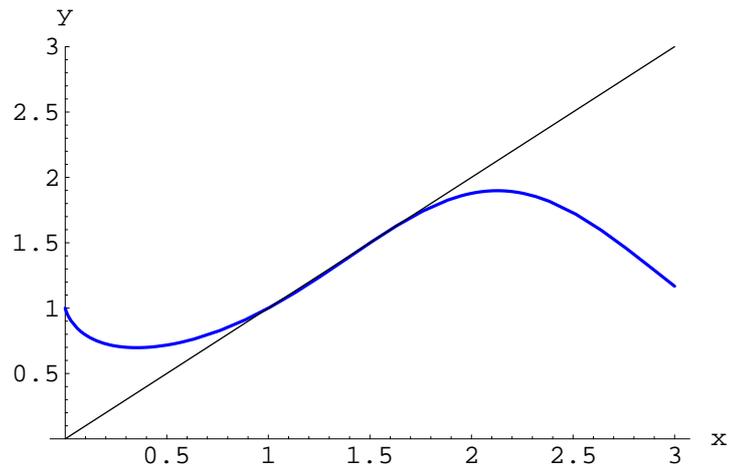


Figura 42:

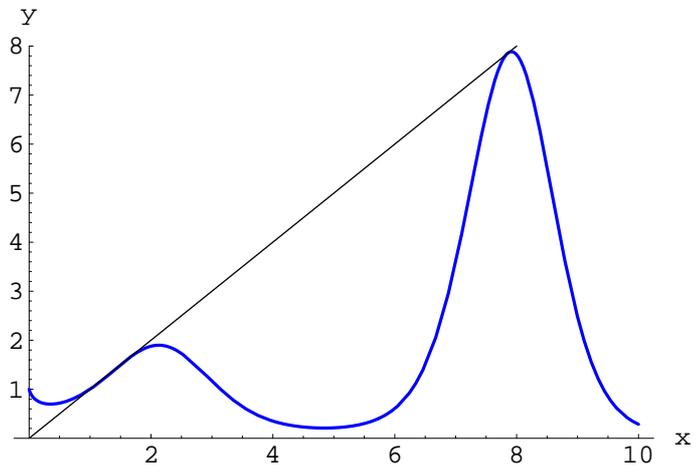


Figura 43:

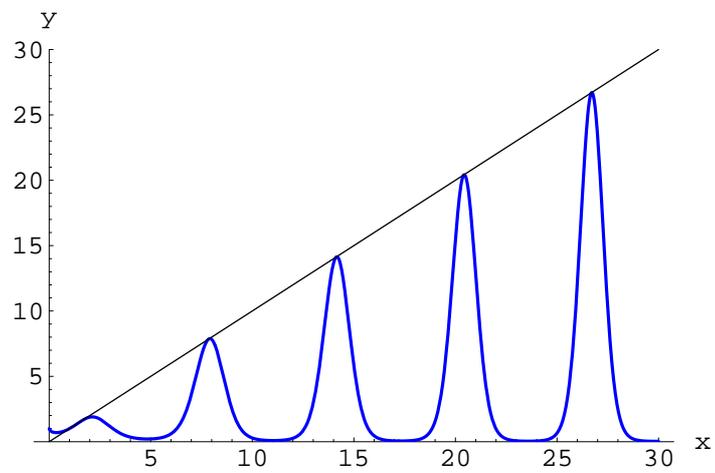


Figura 44:

9. $\ln f(x) = \sin x \ln(\cos x) \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x \implies$
 $\implies f'(x) = (\cos x)^{\sin x} [\cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x]$
10. $\ln f(x) = x \ln(\arctan x) \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\arctan x) + x \left[\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right] \implies$
 $\implies f'(x) = (\arctan x)^x \left[\ln(\arctan x) + \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \right]$

Calcolo di derivate seconde

1. $f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} = -f(x) + \frac{e^{-x}}{x} \implies f''(x) = -f'(x) - \frac{xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) - \frac{e^{-x}(1+x)}{x^2} = -e^{-x} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x \right)$
2. $f'(x) = 8x^7 + 42x^5 - 5; f''(x) = 56x^6 + 220x^4 = 14x^4(4x^2 + 15)$
3. $f'(x) = 2xe^{x^2}; f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$
4. $f(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x^2) \implies f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x}{1+x^2}; f''(x) = \frac{2}{3} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

1.5.11 Derivazione di funzioni iperboliche

1. $f(x) = \sinh(ax)$
2. $f(x) = \cosh\left(\frac{1}{4}x\right)$
3. $f(x) = \tanh(1+x^2)$
4. $f(x) = \coth\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$
5. $f(x) = \frac{x}{\cosh x^2}$
6. $f(x) = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2}x$
7. $f(x) = \ln \tanh(ax)$; esplicitando il risultato per $a = 2$.
8. $f(x) = \frac{x^2}{\cosh x}$
9. $f(x) = \tanh x - x$
10. $f(x) = \frac{3 \coth x}{\ln x}$
11. $f(x) = \arctan x - \text{Arc tanh } x$
12. $f(x) = \arcsin x \text{Arc sinh } x$
13. $f(x) = \frac{\text{Arc tanh } x}{x}$
14. $f(x) = \frac{\text{Arc coth } x}{x}$
15. $f(x) = \frac{\text{Arc coth } x}{1-x^2}$

1.5.12 Funzioni varie

1. Calcolare $f'(x)$ se: a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = x|x|$, plottando poi le funzioni assieme alle derivate del primo ordine.
2. Calcolare $f'(x)$ se: a) $f(x) = \sin|x|$, b) $f(x) = |\sin x|$, plottando poi le funzioni assieme alle derivate del primo ordine.
3. $f(x) = \sin^3 5x \cos^3 \frac{x}{3}$
4. $f(x) = -\frac{5}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}$
5. $f(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$
6. $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$
8. $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$
9. $f(x) = \sqrt{\arctan x} - (\arcsin x)^3$
10. $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$
11. $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$
12. $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$
13. $f(x) = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$
14. $f(x) = (3 + 2x^2)^4$
15. $f(x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$
16. $f(x) = -\frac{1}{6(1-3 \cos x)^2}$
17. $f(x) = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$
18. $f(x) = \sqrt{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5}}$
19. $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 1) + \tan\left(\frac{a}{x}\right)$
20. $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$
21. $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
22. $f(x) = a \cot\left(\frac{x}{a}\right)$
23. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
24. $f(x) = \arccos \sqrt{x}$

25. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$
26. $f(x) = \arctan \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
27. $f(t) = t \sin 2^t$
28. $f(x) = \arccos e^x$
29. $f(x) = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n} \right)^m$
30. $f(x) = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$
31. $f(x) = \ln(\sin x)$
32. $f(x) = \ln(1-x^2)$
33. $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$
34. $f(x) = \ln(e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)$
35. $f(x) = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$
36. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$
37. $f(x) = (a+x) \sqrt{a-x}$
38. $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$
39. $f(x) = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}}$
40. $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} x \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x}$
41. $f(x) = \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^3)^5}$
42. $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$
43. $f(x) = x^4 (a - 2x^3)^2$
44. $f(x) = \sqrt{\prod_{k=1}^3 (x + a_k)}$
45. $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$
46. $f(x) = \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^3 x - 5)$
47. $f(x) = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + \frac{4}{3} \cot x$
48. $f(x) = \arcsin x^2 + \arccos x^2$
49. $f(x) = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \arccos x$

50. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
51. $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
52. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
53. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$
54. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \arcsin \frac{x}{a}$
55. $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$
56. $f(x) = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$
57. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$
58. $f(x) = \ln(\arcsin 5x)$
59. $f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1-x \cos \alpha}\right)$
60. $f(x) = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) - x$
61. $f(x) = \sqrt{e^{ax}}$
62. $f(x) = e^{\sin^2 x}$
63. $F(x) = (2ma^{mx} + b)^p$
64. $F(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$
65. $f(x) = \frac{(\alpha \sin \beta x - \beta \cos x)e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$
66. $f(x) = -\frac{1}{10}e^{-x}(3 \sin 3x - \cos 3x)$
67. $f(x) = x^n a^{-x^2}$
68. $f(x) = \sqrt{\cos x} e^{\sqrt{\cos x}}$
69. $f(x) = 3^{\cot \frac{1}{x}}$
70. $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$
71. $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
72. $f(x) = \ln(a + x + \sqrt{2ax + x^2})$
73. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$
74. $f(x) = \ln \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$
75. $f(x) = -\frac{1}{2 \sin^3 x} + \ln \tan x$

$$76. f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$77. f(x) = \ln \ln(3 - 2x^2)$$

$$78. f(x) = 5 \ln^3(ax + b)$$

$$79. f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \right)$$

$$80. f(x) = \frac{m}{2} \ln(x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right)$$

$$81. f(x) = x \sin \left(\ln x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$82. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$$

$$83. f(x) = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$$

$$84. f(x) = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$$

1.5.13 Soluzioni

$$1. f'(x) = a \cosh(ax)$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{4} \sinh \left(\frac{1}{4}x \right)$$

$$3. f'(x) = 2x \frac{1}{\cosh^2(1+x^2)} = \frac{2x}{\cosh^2(1+x^2)}$$

$$4. f'(x) = \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)} (-\alpha) x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1} \sinh^2\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$$

$$5. f'(x) = \frac{\cosh x^2 - (\sinh x^2)(2x)x}{(\cosh x^2)^2} = \frac{\cosh x^2 - 2x^2 \sinh x^2}{(\cosh x^2)^2}$$

$$6. f'(x) = \frac{1}{4} \cosh(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1); \text{ ma } \cosh 2x - 1 = \sinh^2 x \implies \\ \implies f'(x) = \frac{1}{2} \sinh^2 x$$

$$7. f'(x) = \frac{1}{\tanh(ax)} \frac{1}{\cosh^2(ax)} \cdot a = \frac{a}{\sinh(ax) \cosh(ax)}; a = 2 \implies f'(x) = \frac{4}{2 \sinh(2x) \cosh(2x) = \sinh(4x)}$$

$$8. f'(x) = \frac{2x \cosh x - x^2 \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$9. f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} - 1$$

$$10. f'(x) = \frac{-\frac{3}{\sinh^2 x} \ln x - \frac{3 \coth x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-3(x \ln x + \sinh x \cosh x)}{x(\ln x \sinh x)^2}$$

$$11. f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-x^2} = -\frac{2x}{1-x^4}$$

$$12. f'(x) = \frac{\text{Arcsinh } x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} \text{Arcsinh } x + \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{\sqrt{1-x^4}}$$

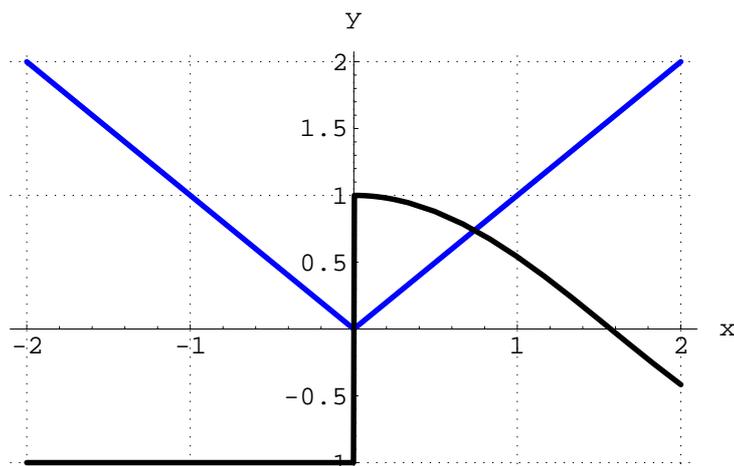


Figura 45:

$$13. f'(x) = \frac{\frac{1}{1-x^2}x - \text{Arc tanh } x}{x^2} = \frac{x - (1-x^2)\text{Arc tanh } x}{x^2}$$

$$14. f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2-1} - \text{Arc coth } x}{x^2} = -\frac{x + (x^2-1)\text{Arc coth } x}{x^2(x^2-1)}$$

$$15. f'(x) = \frac{-\frac{1}{1-x^2}(1-x^2) + 2x\text{Arc tanh } x}{(1-x^2)} = \frac{-1 + 2x(1-x^2)\text{Arc coth } x}{(1-x^2)}$$

1.5.14 Funzioni varie

1. Se $f(x) = |x|$:

$$x \in (0, +\infty) \implies f(x) = x \implies f'(x) = 1$$

$$x \in (-\infty, 0) \implies f(x) = -x \implies f'(x) = -1$$

In fig. 45 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

Se $f(x) = x|x|$:

$$x \in (0, +\infty) \implies f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$$

$$x \in (-\infty, 0) \implies f(x) = -x^2 \implies f'(x) = -2x$$

In fig. 46 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

2. Se $f(x) = \sin|x|$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} \cos|x|$$

In fig. 47 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

Se $f(x) = |\sin x|$:

$$f'(x) = \cos x, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

$$f'(x) = -\cos x, \quad \text{altrimenti}$$

In fig. 48 è riportato il grafico di $f(x)$, $f'(x)$:

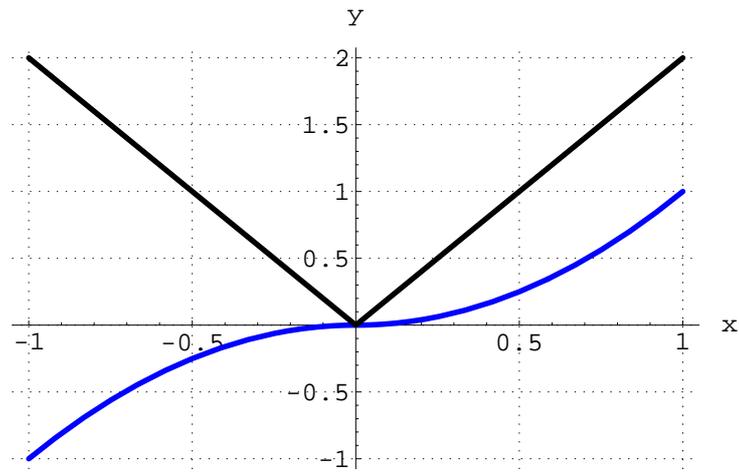


Figura 46:

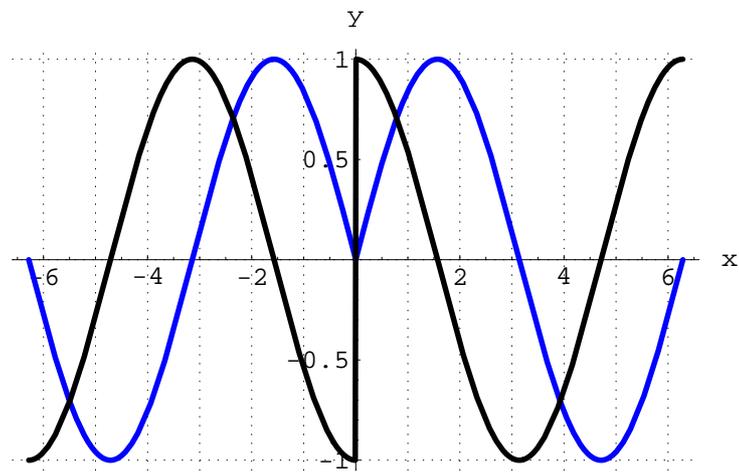


Figura 47:

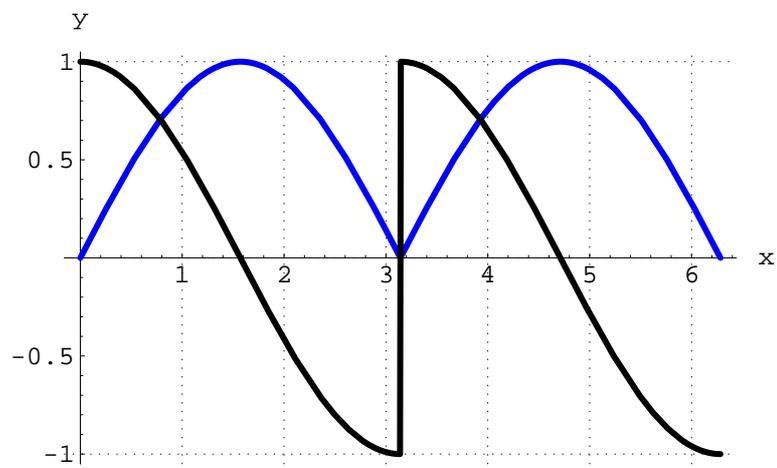


Figura 48:

3. $f'(x) = 3 \sin^2 5x (\cos 5x) \cdot 5 \cdot \cos^3 \frac{x}{3} - \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$
 $= 15 \sin^2 5x \cos 5x \cos^3 \frac{x}{3} - \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$
4. $f'(x) = \frac{15}{(x-3)^5} + \frac{10}{(x-3)^4} + \frac{1}{(x-3)^3}$
5. $f(x) = \frac{1}{8} \frac{8x^7(1-x^2)^4 - x^8 \cdot 4(1-x^2)^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^8} = \frac{x^7}{(1-x^2)^5}$
6. $f'(x) = 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$
7. $f'(x) = \frac{1}{3} (2e^x - 2^x + 1)^{-2/3} (2e^x - 2^x \ln 2) + \frac{1}{x} \cdot 5 \ln^4 x = \frac{2e^x - 2^x \ln 2}{3 \sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5 \ln^4 x}{x}$
8. $f'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{x(e^x + 1)} = \frac{e^x(1+x)+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$
9. $f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} - \frac{3(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$
11. $f'(x) = \frac{1}{3} (\sin^2 x)^{-2/3} \cdot 2 \cdot \sin x \cos x - 3 \cos^{-4} x (-\sin x) = \frac{2}{3} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} + \frac{3 \sin x}{\cos^4 x}$
12. $f'(x) = \frac{3}{56} (-7) (2x-1)^{-8} \cdot 2 - \frac{1}{24} (-6) (2x-1)^{-7} \cdot 2 - \frac{1}{40} (-5) (2x-1)^{-6} \cdot 2$
 $= -\frac{3}{4(2x-1)^8} + \frac{1}{2(2x-1)^7} + \frac{1}{4(2x-1)^6} = \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$
13. $f'(x) = 3 \left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 \cdot \frac{a}{c} = \frac{3a(ax+b)^2}{c^3}$
14. $f'(x) = 4(3+2x^2) \cdot 4x = 16x(3+2x^2)^3$
15. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} (1 - \tan^2 x + \tan^4 x)$
16. $f'(x) = -\frac{1}{6} \frac{d}{dx} (1 - 3 \cos x)^{-2} = -\frac{1}{6} (-2) (1 - 3 \cos x)^{-3} \cdot 3 \sin x = \frac{\sin x}{(1 - 3 \cos x)^3}$
17. $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$
18. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5}}} \cdot \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{5} = \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{2} \sqrt{\frac{1}{5(3 \sin x - 2 \cos x)}}$
19. $f'(x) = (2x-5) \cos(x^2 - 5x + 1) - \frac{a}{x^2 \cos^2(\frac{x}{a})}$
20. $f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$
21. $f'(x) = \frac{4 \sin 2x \cos 2x}{(1 - \cos 2x)^2} = \frac{2 \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2}$
22. $f'(x) = -a \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{a})} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{a})}$
23. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

24. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$
25. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}$
26. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$
27. $f'(t) = \sin 2^t + t \cos 2^t \cdot 2^t \cdot \ln 2 = \sin 2^t + (\ln 2) t 2^t \cos 2^t$
28. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^x = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
29. $f'(x) = m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{bnx^{n-1}(a-bx^n)+bnx^{n-1}(a+bx^n)}{(a-bx^n)^2} = m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^{m-1} \frac{2abnx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}$
30. $f'(x) = -\frac{9}{(x+2)^6} + \frac{12}{(x+2)^4} - \frac{8}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^3-1}{(x+2)^6}$
31. $f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cot x$
32. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$
33. $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x} (2 \ln^2 x - 1)$
34. $f'(x) = \frac{e^x+5 \cos x-4\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x+5 \sin x-4 \arcsin x} = \frac{e^x \sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1-x^2} \cos x-4}{\sqrt{1-x^2}(e^x+5 \sin x-4 \arcsin x)}$
35. $f'(x) = \frac{1}{x(\ln^2 x+1)} + \frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$
36. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}$
37. $f'(x) = \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$
38. $f'(x) = \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$
39. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$
40. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[6]{x} + 3\sqrt{x^3} + \sqrt{x^7} = \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$
41. $f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} (1+x^3)^{5/3} x^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} (1+x^3)^{2/3} x^2 =$
 $= x^2 \left(\sqrt[3]{(1+x^3)^5} - \sqrt[3]{(1+x^3)^2} \right) = x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}$
42. $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-3/4} \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-3/4} \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}$
43. $f'(x) = 4x^3 (a-2x^3)^2 + x^4 \cdot 2(a-2x^3) \cdot (-6x^2) = 4x^3 (a-2x^3)^2 - 12x^6 (a-2x^3)$
 $= 4x^3 (a-2x^3) (a-2x^3-3x^3)$

44. $f'(x) = \frac{1}{2 \sqrt{\prod_{k=1}^3 (x-a_k)}} \cdot \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^3 (x-a_k) = \frac{(x-a_2)(x-a_3) + (x-a_1)(x-a_3) + (x-a_1)(x-a_2)}{2 \sqrt{\prod_{k=1}^3 (x-a_k)}}$
45. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x-1}} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x+1}} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x-1}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
46. $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5} \cos^6 x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) = -\frac{6}{5} \cos^5 x \sin x + \cos^2 x \sin x = \sin x \cos^2 x \left(1 - \frac{6}{5} \cos^3 x \right)$
47. $f'(x) = -\frac{\sin x \cdot 3 \sin^3 x - \cos x \cdot 9 \sin^2 x \cos x}{9 \sin^6 x} - \frac{4}{3} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} = \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$
48. Poniamo $y = x^2$, donde: $f(y) = \arcsin y + \arccos y$. Come è noto: $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$, per cui $f(x) = \pi/2 \implies f'(x) = 0$
49. $f'(x) = \frac{1}{2} \left[2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x - \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}} (2 \arccos x - \arcsin x)$
50. $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$; con $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \implies g'(x) = \frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \implies f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$
51. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \arcsin\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} = \frac{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
52. $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}$; con $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \implies g'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = (1+x^2)^{-3/2}$;
 $\sqrt{1-g^2(x)} = (1+x^2)^{-1/2}$
 $\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
53. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \frac{b}{a}}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$
54. $f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
55. $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$
56. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \cdot (-1) + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$
57. $f'(x) = \arcsin \sqrt{x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \arcsin \sqrt{x}$
58. $f'(x) = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}$
59. $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2 \sin^2 \alpha}{(1-x \cos \alpha)^2}} \cdot \frac{\sin \alpha (1-x \cos \alpha) + \cos \alpha \cdot x \sin \alpha}{(1-x \cos \alpha)^2} = \frac{\sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$
60. $f'(x) = \sqrt{2} \frac{1}{1+\frac{\tan^2 x}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \cos^2 x} - 1 = \frac{2}{2 \cos^2 x + \sin^2 x} - 1 = \frac{1}{1+2 \cot^2 x}$
61. $f'(x) = \frac{ae^{ax}}{2\sqrt{e^{ax}}}$
62. $f'(x) = e^{\sin^2 x} \sin 2x$. Il grafico di $f(x)$, $f'(x)$ è riportato in figura 49.

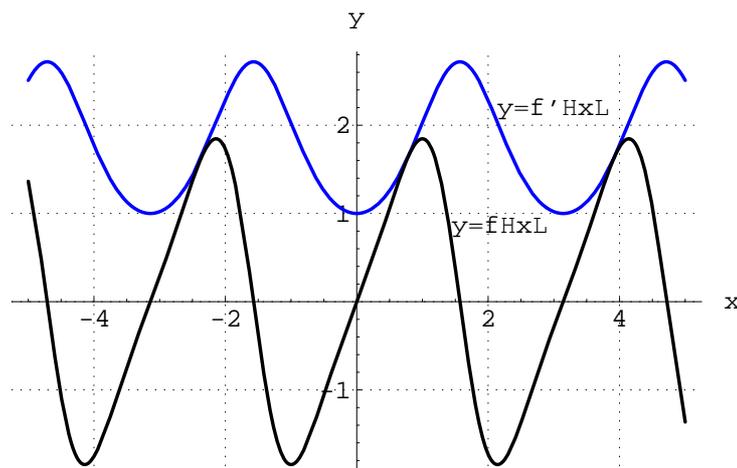


Figura 49:

$$63. F'(x) = p(2ma^{mx} + b)^{p-1} (2n^2 a^{mx} \ln a) = 2pm^2 a^{mx} (2ma^{mx} + b)^p \ln a$$

$$64. F'(t) = \alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t)$$

$$65. f'(x) = \frac{1}{a^2 + \beta^2} [\alpha e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)] + e^{\alpha x} (\alpha \beta \cos \beta x + \beta^2 \sin \beta x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$66. f'(x) = -\frac{e^{-x}}{10} (3 \sin 3x - \cos 3x) + \frac{1}{10} e^{-x} (9 \cos 3x + 3 \sin 3x) = e^{-x} \cos 3x$$

$$67. f'(x) = nx^{n-1} a^{-x^2} + x^n (-2xa^{-x^2} \ln a) = x^{n-1} a^{-x^2} (n - 2x^2 \ln a)$$

$$68. f'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} e^{\sqrt{\cos x}} + \sqrt{\cos x} \left(-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} e^{\sqrt{\cos x}} \right) = -\frac{\sin x (1 + \sqrt{\cos x})}{2} e^{\sqrt{\cos x}}$$

$$69. f'(x) = 3^{\cot \frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{3^{\cot \frac{1}{x}}}{(x \sin \frac{1}{x})^2} \ln 3$$

$$70. f'(x) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$

$$71. f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$72. f'(x) = \frac{1}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} \left(1 + \frac{2x+2x}{2\sqrt{2ax+x^2}} \right) = \frac{2x+\sqrt{2ax+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}(a+x+\sqrt{2ax+x^2})}$$

$$73. f'(x) = -2(\ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x \ln^3 x}$$

$$74. f'(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)} \cdot (-1) \cdot \sin\left(\frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{x-x+1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \tan\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$75. f'(x) = (\sin x)^{-3} \cdot \cos x + \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$$

$$76. f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x}{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2} \frac{1}{x+\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \right) = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$77. f'(x) = \frac{1}{\ln(3-2x^2)} \cdot \frac{1}{3-2x^2} \cdot (-6x^2) = \frac{6x^2}{(3-2x^2) \ln(3-2x^2)}$$

Tale funzione è definita in $X = (-\infty, 1)$; il grafico è riportato in figura 50.

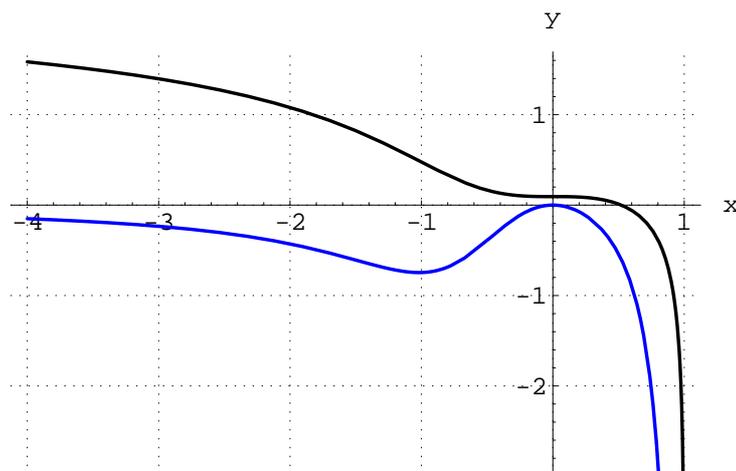


Figura 50: Grafico di $y = \ln \ln(3 - 2x^2)$ e della derivata prima (rgb=001)

$$78. f'(x) = 5 \cdot 3 \ln^2(ax + b) \cdot \frac{a}{ax+b} = \frac{15a \ln^2(ax+b)}{ax+b}$$

$$79. f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}, \text{ essendo } g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x} \implies$$

$$\implies g'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}+1\right)(\sqrt{x^2+a^2}-x) - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-1\right)(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{(\sqrt{x^2+a^2}-x)^2}$$

$$\implies g'(x) = \frac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}(\sqrt{x^2+a^2}-x)} \implies f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$80. f'(x) = \frac{m}{2} \frac{2x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a} \frac{x+a}{x-a} \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{m}{2} \frac{x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a} \frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{mx+n}{x^2-a^2}$$

$$81. f'(x) = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\ln x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\ln x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin(\ln x)$$

$$82. f'(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln(g(x)), \text{ con } g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \implies g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1-\sqrt{x^2+1}}{x^2} =$$

$$-\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$83. f'(x) = 2^{\arcsin 3x} (\ln 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 + 2(1 - \arccos 3x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3$$

$$= \frac{2^{\arcsin 3x} \ln 8 + 6(1 - \arccos 3x)}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$84. f'(x) = 3g(x) + \frac{1}{3}g(x)^3, \text{ essendo } g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin ax}{\cos bx} \implies g'(x) = \frac{a \cos ax \cos bx + b \sin bx \sin ax}{\cos^2 bx},$$

$$f'(x) = 3g'(x) \left[(\ln 3) \cdot 3 \frac{\sin ax}{\cos bx} + \frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx} \right]$$