Spazio duale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia E uno spazio vettoriale n-dim. sul campo $\mathbb{K}$. Dal momento che $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ medesimo, è lecito contemplare $\hom(E,\mathbb{K})$ ovvero lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ i cui elementi sono gli omomorfismi da E verso $\mathbb{K}$. Quindi:

$$\phi \in \hom(E,\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \phi : E \to \mathbb{K}$$

Definizione 1 *Lo spazio vettoriale*

$$E^* = \hom(E,\mathbb{K})$$

si dice **spazio duale** *di E.*

Riesce

$$\dim \hom(E,\mathbb{K}) = \dim E \cdot \dim \mathbb{K} \underset{\dim \mathbb{K}=1}{=} n \tag{1}$$

Cioè lo spazio vettoriale E e il suo duale sono isodimensionali. Un generico elemento dello spazio duale E^* si dice **forma lineare** o **1-forma** o **funzionale lineare**. Se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una qualunque base di E, un vettore $\mathbf{x} \in E$ si esprime in uno ed un sol modo come combinazione lineare dei vettori di base:

$$\mathbf{x} \in E \Longrightarrow \exists x^i \in \mathbb{K} \mid x = x^i \mathbf{e}_i, \tag{2}$$

dove abbiamo assunto la convenzione di Einstein di somma sugli indici ripetuti:

$$x^i \mathbf{e}_i \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + ... + x^n \mathbf{e}_n$$

Segue

$$\phi \in E^* \Longrightarrow \phi : \mathbf{x} \in E \longrightarrow \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}$$

con

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x^i \mathbf{e}_i\right) \underset{\phi \text{ è lineare}}{=} x^i \phi(\mathbf{e}_i) \tag{3}$$

Cioè ϕ è univocamente determinato da

$$\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), ..., \phi(\mathbf{e}_n)$$

Trattandosi di un omomorfismo, possiamo costruire la sua matrice rappresentativa A rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$ di E. Scriviamo

$$\phi \doteq A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{K}}(1,n), \tag{4}$$

dove: il simbolo $\doteq$ denota "rappresentato da", $M_{\mathbb{K}}(1,n)$ è lo spazio vettoriale delle matrici $1 \times n$ su $\mathbb{K}$, e

$$a_i = \langle \mathbf{e}_i, \phi \rangle,$$

dopo aver utilizzato il simbolo convenzionale

$$\langle \mathbf{x}, \phi \rangle = \phi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E \tag{5}$$

La rappresentazione matriciale del vettore $\mathbf{x}$ è

$$\mathbf{x} \doteq X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Quindi

$$\langle \mathbf{x}, \phi \rangle \doteq AX = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Esempio 2 *Dopo aver strutturato l'insieme $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, il suo duale è*

$$\mathbb{R}^{2*} = \hom\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$$

Quindi

$$\phi \in \mathbb{R}^{2*} \Longleftrightarrow \phi \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \tag{7}$$

Cioè

$$\phi : \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^2 \to \phi\left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}$$

Nella base canonica

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1)$$

si ha

$$x \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \exists x^1, x^2 \in \mathbb{R} \mid x = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 \tag{8}$$

Segue

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x^1, x^2\right) = a_1 x^1 + a_2 x^2,$$

dove a_j sono coefficienti reali assegnati una volta per tutti (per un assegnato elemento ϕ). Precisamente:

$$a_1 = \phi(1, 0) = \langle \mathbf{e}_1, \phi \rangle\,, \quad a_2 = \phi(0, 1) = \langle \mathbf{e}_2, \phi \rangle$$

La matrice rappresentativa di ϕ è:

$$\phi \doteq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(1, 2) \tag{9}$$