Funzioni di più variabili. Ipersuperficie di livello. Curve di livello

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1 *Una funzione reale f delle n variabili reali x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ è una legge:*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1}$$

*che ad ogni $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ associa univocamente il numero reale $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. L'insieme X è l'***insieme di definizione** *della funzione.*

Osservazione 2 *Una funzione viene indicata con una lettera del tipo f, g, mentre il valore assunto in un punto $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$, con $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o con $f(P)$.*

Definizione 3 *Dicesi* **diagramma cartesiano** *o* **grafico** *di una funzione f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme di punti:*

$$G(f) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in X,\ x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\right\} \tag{2}$$

Ad esempio, per $n = 1$ è $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Il grafico è:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ y = f(x)\right\}, \tag{3}$$

cioè la curva di equazione $y = f(x)$. Per $n = 2$ è $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Il grafico è:

$$G(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\right\}, \tag{4}$$

cioè la superficie di equazione $z = f(x, y)$.

Definizione 4 *Dicesi* **ipersuperficie di livello** *di una funzione f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^{n\geq 2}$, l'insieme di punti:*

$$\Gamma(f) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x_1, x_2, ..., x_n)\right\} = c, \tag{5}$$

essendo c una costante reale assegnata.

Ad esempio, per $n = 2$ abbiamo le **curve di livello**:

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\right\} \tag{6}$$

Per $n = 3$ abbiamo le **superfici di livello**:

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z)\right\} = c, \tag{7}$$

Vediamo quindi che a differenza del caso 1-dimensionale ci si preoccupa esclusivamente di tracciare il grafico di f, nel caso 2-dimensionale dobbiamo cercare di visualizzare sia il grafico che le curve di livello. Per $n \geq 3$ si procede esclusivamente per via analitica, giacchè non è possibile visualizzare oggetti in $\mathbb{R}^{n\geq 4}$. L'ambiente di calcolo Mathematica implementa un set di istruzioni grafiche riassunte nel seguente schema:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Longrightarrow$ `Plot`

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Longrightarrow$ `Plot3D`, `ContourPlot`, `DensityPlot`

Esempio 5

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, *mentre il grafico è un paraboloide di rivoluzione*[1], *come mostrato in fig. 1 Le curve di livello sono* $\Gamma(f) : x^2 + y^2 = c > 0$, *cioè circonferenze centrate nell'origine e di raggio* $\sqrt{c}$.

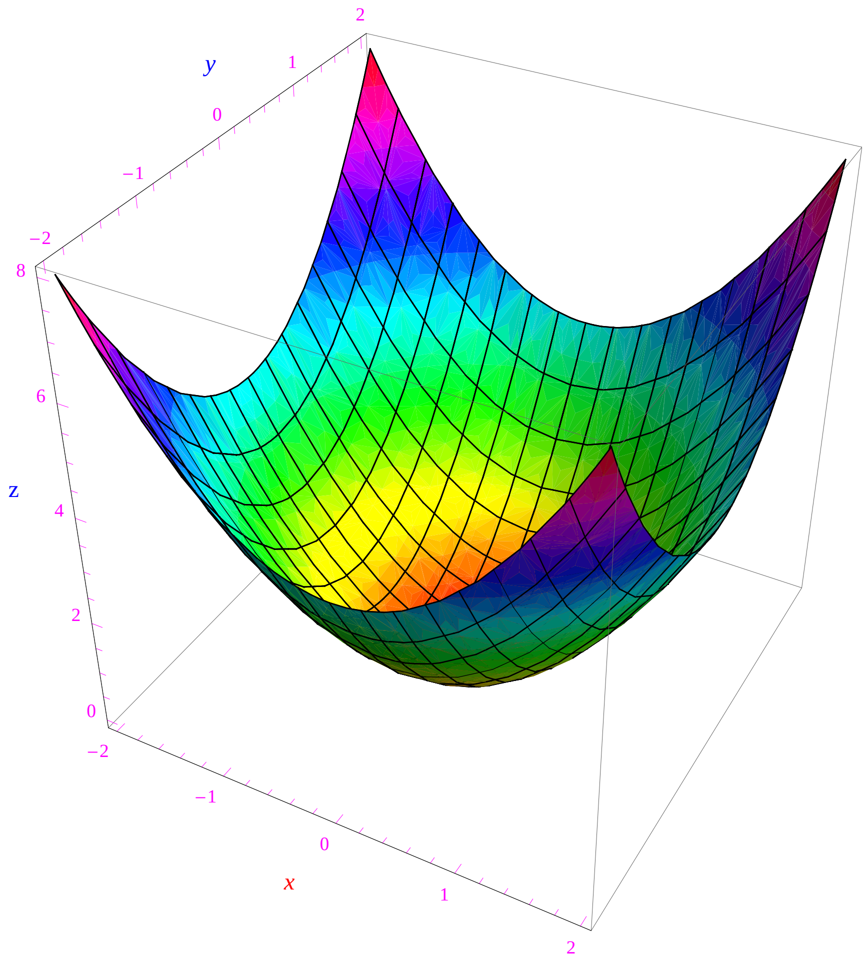

Figura 1: Grafico di $f(x,y) = x^2 + y^2$

Esempio 6

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, *mentre il grafico è un paraboloide iperbolico. Le curve di livello sono* $\Gamma(f) : x^2 - y^2 = c > 0$, *cioè iperboli equilatere, come mostrato in fig. 2.*

Esempio 7

$$f(x,y) = \ln\left(x^3 + y^3\right)$$

Questa funzione è definita in

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \;\; y > -x\right\}$$

Il grafico è in fig. 3.

[1] È una superficie di rotazione, in questo caso generata dalla rotazione di una parabola attorno all'asse z.

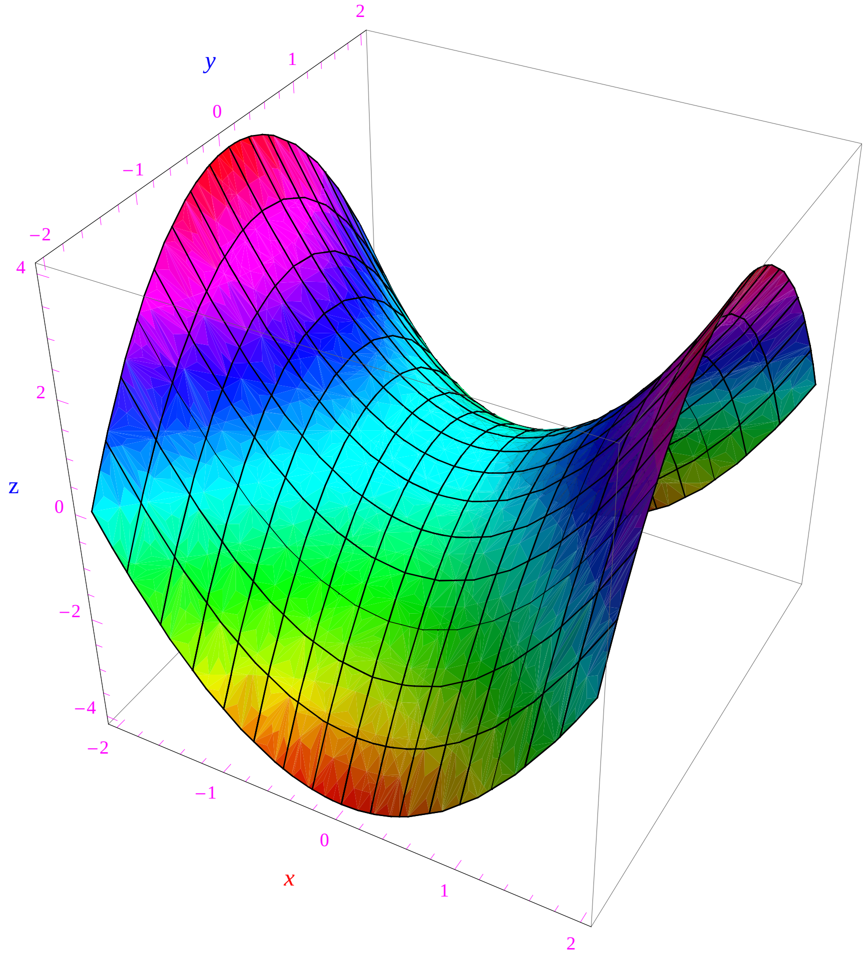

Figura 2: Grafico di $f(x,y) = x^2 - y^2$

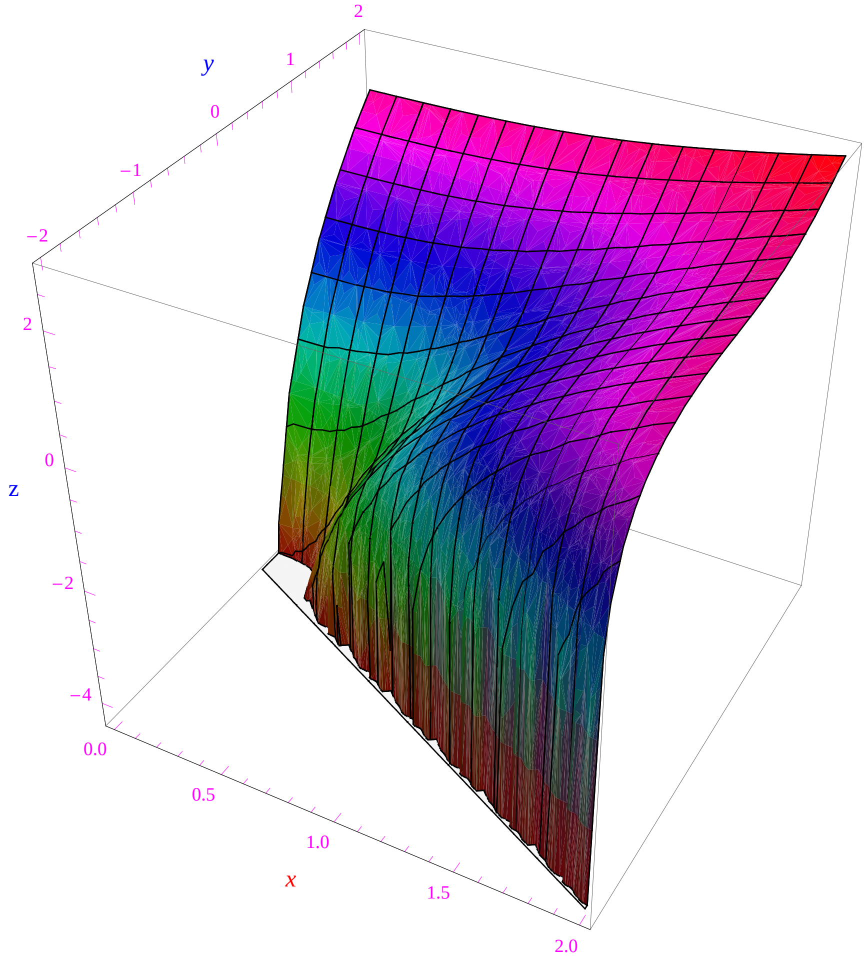

Figura 3: Grafico di $f(x, y) = \ln(x^3 + y^3)$

Le curve di livello sono

$$\Gamma(f) : \ln\left(x^3 + y^3\right) = K \Longrightarrow x^3 + y^3 = e^K \overset{def}{=} c > 0,$$

plottate in fig. 4.

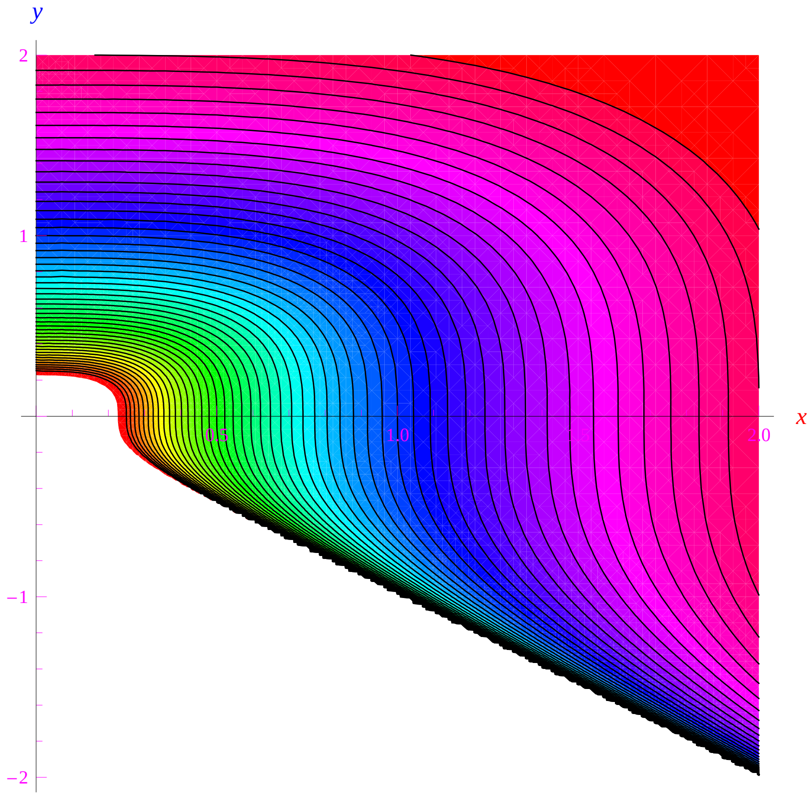

Figura 4: Curve di livello di $f(x, y) = \ln\left(x^3 + y^3\right)$