



Computabilità dei sistemi dinamici a tempo continuo

Marcello Colozzo

Istituto Scientia – <http://www.istitutoscienza.it> - via Ortola 65 54100 Massa Italy

Abstract

In quest'articolo studiamo la computabilità dei sistemi dinamici a tempo continuo governati da un'equazione differenziale del primo ordine non omogenea e autonoma, il cui termine noto è una funzione onesta. Dimosteremo che tali sistemi sono computabili, nel senso che la loro evoluzione dinamica è riprodotta dall'iterazione di una funzione ricorsiva. Verrà estesa la computabilità ai sistemi per i quali il termine noto non è una funzione onesta, dimostrando che essi sono computabili in intervalli non contenenti punti di flesso a tangente verticale del diagramma cartesiano della stato del sistema in funzione del tempo.

Keywords: Nonlinear Dynamics; Chaos; Cellular Automata; Differential Equations

Contents

1	L'equazione differenziale di Bernoulli-Riccati	3
1.1	Adimensionalizzazione del problema	7
2	Sistemi dinamici a tempo continuo	11
2.1	Definizione assiomatica	11
2.2	Costante di tempo e tempo caratteristico di un sistema dinamico a tempo continuo	15
3	Sistemi dinamici iterati	23
3.1	Metodo di König-Lemmaray	23
4	Sistemi dinamici a tempo continuo computabili	26
5	Sistemi dinamici iterati (parte 2)	32
5.1	Proprietà delle funzioni di trasferimento. Mappe 1-dimensionali. Contrazioni	32
5.2	Punti periodici	60
6	Trasformazione quadratica (mappa logistica)	61
6.1	Tracciamento del grafico	64
6.2	Studio dei punti fissi	64
6.2.1	Punti fissi per $\alpha = \frac{3}{2}$	69
6.2.2	Punti fissi per $\alpha = 2$	72
6.2.3	Punti fissi per $\alpha = 3.3$	72
6.2.4	Punti fissi per $\alpha = 3$	81
6.2.5	Punti fissi per $\alpha = 3.45$	83
6.2.6	Punti fissi per $\alpha = 3.54$	85
6.2.7	Punti fissi per $\alpha = 3.839$	85
6.2.8	Caso $\alpha = 4$ (caos)	87
6.3	Conclusioni	92

A Automi cellulari	94
B Approssimazione della derivata	96
Bibliografia	101

1 L'equazione differenziale di Bernoulli-Riccati

Il nostro punto di partenza è l'equazione differenziale di Bernoulli-Riccati. Questa scelta non è casuale. Infatti, come vedremo in seguito, a tale equazione differenziale è associata un'equazione alle differenze finite che conduce a un particolare sistema dinamico iterato noto come *mappa logistica*.

Consideriamo dunque un sistema dinamico caratterizzato da una grandezza a variabile in funzione del tempo t secondo la legge rappresentata da una funzione $a(t)$ soluzione dell'equazione differenziale del tipo Bernoulli-Riccati:

$$\dot{a}(t) = \beta a(t) \left[1 - \left(\frac{a(t)}{a_M} \right)^{\nu-1} \right], \quad \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad (1)$$

La (1) un'equazione differenziale del primo ordine non lineare e a coefficienti costanti. Qui $\beta > 0$ è un parametro con le dimensioni dell'inverso di un tempo, mentre a_M ha le stesse dimensioni di $a(t)$. Prima di integrare tale equazione, esaminiamo il comportamento qualitativo delle sue soluzioni. Iniziamo con l'osservare che:

$$\frac{a(t)}{a_M} < 1 \implies \dot{a}(t) > 0, \quad \forall t$$

Cioè $a(t)$ è strettamente crescente nell'intervallo di tempo tale che $\frac{a(t)}{a_M} < 1$. Ne consegue

$$\exists t_* < +\infty \mid a(t \ll t_*) \ll a_M \implies \dot{a}(t) \simeq \beta a(t) \implies a(t) \simeq a_0 e^{\beta(t-t_0)}, \quad (2)$$

dove $a_0 = a(t_0)$, essendo t_0 l'“istante iniziale”.

Conseguenza 1 *Nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + \delta t]$, la grandezza $a(t)$ segue una legge esponenziale:*

$$a(t) \xrightarrow[t \ll t_*]{} a_0 e^{\beta(t-t_0)} \quad (3)$$

Nel limite opposto:

$$a(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a_M,$$

Ciò premesso, risolviamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \beta a(t) \left[1 - \left(\frac{a(t)}{a_M} \right)^{\nu-1} \right] \\ a(t_0) = a_0 \end{cases} \quad (4)$$

La (1) è linearizzata dalla seguente sostituzione:

$$a \rightarrow y = a^{1-\nu},$$

da cui $a = y^{\frac{1}{1-\nu}}$, quindi

$$\frac{1}{1-\nu} y^{\frac{\nu}{1-\nu}} \dot{y} = \beta y^{\frac{1}{1-\nu}} - \frac{\beta}{a_M^{\nu-1}} y^{\frac{\nu}{1-\nu}}$$

Cioè:

$$\dot{y} = \beta(1-\nu)y - \frac{\beta}{a_M^{\nu-1}}(1-\nu), \quad (5)$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il fattore integrante è $I(t) = e^{-\int \beta(1-\nu)dt} = e^{-\beta(1-\nu)t}$. Quindi:

$$\begin{aligned} e^{-\beta(1-\nu)t} \dot{y} - \beta(1-\nu) e^{-\beta(1-\nu)t} y &= -\frac{\beta}{a_M^{\nu-1}} (1-\nu) e^{-\beta(1-\nu)t} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [e^{-\beta(1-\nu)t} y] &= -\frac{\beta}{a_M^{\nu-1}} (1-\nu) e^{-\beta(1-\nu)t} \end{aligned}$$

da cui:

$$e^{-\beta(1-\nu)t} y(t) = -\frac{\beta}{a_M^{\nu-1}} (1-\nu) \int e^{-\beta(1-\nu)t} dt$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\beta(1-\nu)t} \left[C + \frac{1}{a_M^{\nu-1}} e^{-\beta(1-\nu)t} \right] \\ &= C e^{\beta(1-\nu)t} + \frac{1}{a_M^{\nu-1}}, \end{aligned}$$

essendo C una costante di integrazione. Ripristinando la funzione $a(t)$:

$$a(t) = \left[C e^{\beta(1-\nu)t} + \frac{1}{a_M^{\nu-1}} \right]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

Siamo interessati al caso $\nu = 2$ (equazione del tipo Riccati), per cui l'integrale generale è:

$$a(t) = \frac{a_M}{1 + a_M C e^{-\beta t}} \quad (6)$$

Determiniamo ora l'integrale particolare che verifica la condizione iniziale $a(t_0) = t_0$. A tale scopo calcoliamo il valore della costante di integrazione (che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza):

$$C = \frac{e^{\beta t_0}}{a_M} \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) > 0,$$

giacchè è $a_0 < a_M$. La soluzione è:

$$a(t) = \frac{a_M}{1 + \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) e^{-\beta(t-t_0)}} \quad (7)$$

La derivata prima è:

$$\dot{a}(t) = a_M \beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) \frac{e^{-\beta(t-t_0)}}{\left[1 + \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) e^{-\beta(t-t_0)} \right]^2} \quad (8)$$

Esaminiamo il comportamento agli estremi della soluzione (7). Risulta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a_M$$

Dallo studio del segno della derivata prima (8) segue che $a(t)$ è strettamente crescente in $[t_0, +\infty)$. Inoltre, dall'analisi qualitativa delle soluzioni, abbiamo visto che:

$$\exists t_* \mid a(t \ll t_*) \propto e^{\beta(t-t_0)}$$

Resta quindi confermata la legge esponenziale a tempi brevi. In fig. 1 è riportata la grandezza $a(t)$ (normalizzata su a_M) in funzione del tempo $t - t_0$.

La velocità di crescita di $a(t)$ è misurata dalla seguente grandezza avente le dimensioni dell'inverso di un tempo:

$$H(t) = \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right| = \frac{\beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right)}{\left(\frac{a_M}{a_0} - 1 \right) + e^{\beta(t-t_0)}} \quad (9)$$

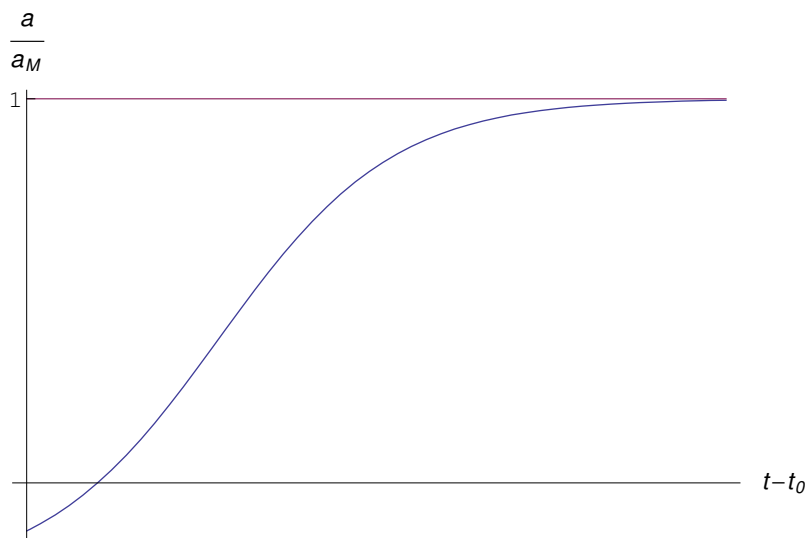


Figure 1: Andamento qualitativo della soluzione (7). Inizialmente la grandezza $a(t)$ cresce con legge esponenziale. Successivamente, la crescita rallenta e il “valore massimo” a_M viene raggiunto asintoticamente.

Per $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$:

$$a(t) \propto e^{\beta(t-t_0)},$$

Abbiamo:

$$H(t) \simeq \beta, \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta t) \quad (10)$$

Asintoticamente:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0,$$

come appunto c'era da aspettarsi, poichè per $t \rightarrow +\infty$, $a(t)$ tende alla costante a_M . Il tempo caratteristico del sistema è:

$$\tau_H(t) = \frac{1}{H(t)} = \frac{\left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right) + e^{\beta(t-t_0)}}{\beta \left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right)}$$

Per $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$:

$$\tau_H(t) \simeq \frac{1}{\beta} \quad (11)$$

1.1 Adimensionalizzazione del problema

La modellizzazione di un sistema dinamico avviene attraverso un processo di astrazione che associa al modello medesimo un appropriato ente matematico. Per poter realizzare tale processo di astrazione è necessario rendere adimensionali le grandezze coinvolte. Prendiamo come esempio il caso più semplice, ovvero l'andamento esponenziale. Più specificatamente, consideriamo una generica grandezza che varia nel tempo t secondo la legge:

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\beta t}, \quad (12)$$

dove $\beta > 0$ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo. Più precisamente, la crescita della grandezza (12) ha un *tempo caratteristico* $\tau_H = \left| \frac{\eta(t)}{\dot{\eta}(t)} \right| = \beta^{-1}$, nel senso che $\eta(t)$ non varia in maniera apprezzabile in intervalli di tempo dell'ordine di τ_H . Dalla (12) segue che η è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d\eta}{dt} = \beta\eta \quad (13)$$

L'esistenza di un tempo caratteristico suggerisce di ridefinire la scala dei tempi passando al tempo adimensionale $t' = \frac{t}{\tau_H} = \beta t$. In tal modo, l'equazione differenziale precedente si scrive:

$$\frac{d\eta}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \beta\eta \iff \frac{d\eta}{dt'} \beta = \beta\eta,$$

cioè:

$$\frac{d\eta}{dt'} = \eta(t'),$$

la cui soluzione è $\eta(t') = \eta_0 e^{t'}$. Inoltre, l'esistenza di un tempo caratteristico ci permetterà - come vedremo in seguito - di approssimare l'equazione differenziale (13) a un'equazione alle differenze finite. Infatti, per $\delta t \lesssim \tau_H$, la (13) può scriversi:

$$\frac{\eta(t + \delta t) - \eta(t)}{\delta t} \simeq \beta\eta \quad (14)$$

In altri termini, per incrementi δt dell'ordine di τ_H possiamo approssimare la derivata prima di $\eta(t)$ con il suo rapporto incrementale. La (14) scritta nel "tempo adimensionale" t' :

$$\frac{\eta(t' + \delta t') - \eta(t')}{\delta t'} \simeq \eta \quad (15)$$

Qui è $\delta t' = \frac{\delta t}{\tau_H}$. Quindi per $0 < \delta t \leq \tau_H$, è $0 < \delta t' \leq 1$.

Ciò premesso, l'equazione che dobbiamo rendere adimensionale è:

$$\frac{da}{dt} = \beta a - \frac{\beta}{a_M} a^2 \quad (16)$$

Il tempo caratteristico è $\tau_H(t) = \frac{1}{H(t)}$.

$$\tau_H(t) = \frac{1}{\alpha\beta} [\alpha + e^{\beta(t-t_0)}], \quad (17)$$

dove $\alpha = \frac{a_M}{a_0} - 1 > 0$. Dalla (17) vediamo che per $t \gtrsim t_0$ è $\tau_H \simeq \beta^{-1}$. Ciò è consistente, poichè per $t \rightarrow t_0$ abbiamo un andamento esponenziale $e^{\beta(t-t_0)}$ e, per quanto visto, β^{-1} è il tempo caratteristico dell'esponenziale $e^{\beta(t-t_0)}$. Viceversa, per $t \rightarrow +\infty$ il tempo caratteristico diverge esponenzialmente. Ciò è consistente, poichè per $t \rightarrow +\infty$, è $a(t) \simeq a_M$, per cui la funzione è costante (il tempo caratteristico di una grandezza costante è infinito). Osserviamo peraltro che il tempo

caratteristico (17) dipende dal tempo t . A noi, invece, occorre una grandezza costante che caratterizzi quel particolare sistema. A tale scopo, prendiamo il valore mediato nel tempo. Come intervallo temporale assumiamo $[t_0, t_1]$, dove $t_1 \gg t_0$ definisce il range temporale che caratterizza quel particolare sistema. Il valor medio della grandezza $\tau_H(t)$ è:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{H,[t_0,t_1]} &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \tau_H(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha\beta(t_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t_1} [\alpha + e^{\beta(t-t_0)}] dt\end{aligned}$$

Cioè:

$$\bar{\tau}_{H,[t_0,t_1]} = \frac{1}{\left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right) \beta (t_1 - t_0)} \left\{ \left(\frac{a_M}{a_0} - 1\right) (t_1 - t_0) + \frac{1}{\beta} [e^{\beta(t_1-t_0)} - 1] \right\}$$

Eseguiamo dunque il cambio di variabile $t' = \frac{t}{\bar{\tau}_{H,[t_0,t_1]}}$. L'equazione differenziale (16) diventa:

$$\frac{da}{dt'} = \beta_H a(t') \left(1 - \frac{a(t')}{a_M}\right), \quad (18)$$

dove $\beta_H = \frac{\beta}{\bar{H}_{[t_0,t_1]}} = \beta \bar{\tau}_{H,[t_0,t_1]}$ è ora un parametro adimensionale¹. Per non appesantire la notazione, ridefiniamo t' in t , ricordando che si tratta di un tempo adimensionale. Perciò:

$$\frac{da}{dt} = \beta_H a(t) \left(1 - \frac{a(t)}{a_M}\right) \quad (19)$$

Definiamo quindi la grandezza adimensionale $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{\beta_H}{\beta_H + 1} \frac{a(t)}{a_M},$$

da cui:

$$a(t) = a_M \frac{\beta_H + 1}{\beta_H} \xi(t)$$

¹Qui $\bar{H}_{[t_0,t_1]} = \frac{1}{\bar{\tau}_{H,[t_0,t_1]}}$

L'equazione (19) diventa:

$$\frac{d\xi}{dt} = \beta_H \xi(t) - (\beta_H + 1) \xi^2(t), \quad (20)$$

che è ancora un'equazione del tipo di Riccati. Per determinare il suo integrale generale, linearizziamola attraverso la sostituzione $y = \xi^{-1}$, da cui:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta_H y + (\beta_H + 1)$$

Il fattore integrante è $I(t) = e^{-\int(-\beta_H)t} = e^{\beta_H t}$.

$$e^{\beta_H t} \frac{dy}{dt} + \beta_H e^{\beta_H t} y = (\beta_H + 1) e^{\beta_H t}$$

Cioè:

$$\frac{d}{dt} (y e^{\beta_H t}) = (\beta_H + 1) e^{\beta_H t}$$

Integrando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned} y(t) &= (\beta_H + 1) e^{-\beta_H t} \left(\frac{1}{\beta_H} e^{\beta_H t} + C \right) \\ &= \frac{\beta_H + 1}{\beta_H} + C (\beta_H + 1) e^{-\beta_H t}, \end{aligned}$$

dove C è una costante di integrazione. Ripristinando la funzione $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{1}{\frac{\beta_H + 1}{\beta_H} + C (\beta_H + 1) e^{-\beta_H t}}$$

Deve essere:

$$\xi_0 = \frac{1}{\frac{\beta_H + 1}{\beta_H} + C (\beta_H + 1) e^{-\beta_H t_0}}$$

Da cui:

$$C = \frac{e^{\beta_H t_0}}{\beta_H + 1} \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{\beta_H + 1}{\beta_H} \right)$$

Quindi la soluzione che soddisfa la condizione iniziale data è:

$$\xi(t) = \frac{\xi_M e^{\beta_H(t-t_0)}}{\frac{\xi_M}{\xi_0} - 1 + e^{\beta_H(t-t_0)}} \quad (21)$$

La funzione (21) ha un andamento qualitativamente simile a quello della funzione $a(t)$ espresso dalla soluzione (7), ovvero caratterizzata da una crescita iniziale esponenziale, per poi tendere all'asintoto orizzontale $\xi = \xi_M$, giacchè:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = \xi_M^- \quad (22)$$

Scriviamo ora l'equazione (20) come:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \beta_H \xi(t) - (\beta_H + 1) \xi^2(t) \quad (23)$$

Per quanto detto in precedenza, per Δt dello stesso ordine di grandezza del tempo caratteristico del sistema, possiamo approssimare la derivata prima di $\xi(t)$ con il suo rapporto incrementale:

$$\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \simeq \beta_H \xi(t) - (\beta_H + 1) \xi^2(t) \quad (24)$$

Passando poi dalla variabile continua t alla variabile discreta t_n :

$$t \rightarrow t_n = n\Delta,$$

dove $\Delta = \frac{\delta}{\bar{\tau}_H}$, essendo δ espresso in unità di tempo. Affinchè sia valida la (24) deve essere $\delta \lesssim \bar{\tau}_H$. Nel tempo discreto la (24) si scrive:

$$\frac{\xi(t_{n+1}) - \xi(t_n)}{\Delta} = \beta_H \xi(t_n) - (\beta_H + 1) \xi^2(t_n)$$

Cioè:

$$\xi_{n+1} = (1 + \beta_H \Delta) \xi_n - \Delta (1 + \beta_H) \xi_n^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad (25)$$

dove $\xi_n = \xi(t_n)$.

2 Sistemi dinamici a tempo continuo

2.1 Definizione assiomatica

In questa sezione consideriamo funzioni del tipo:

$$\eta : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \eta(t), \forall t \in \Theta$$

dove $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. Assumiamo $\eta \in C^{r \geq 1}(\Theta)$. Tipicamente, η rappresenta una grandezza fisica che varia nel tempo secondo la legge $\eta(t)$. Ciò premesso, un'equazione differenziale del primo ordine nella $\eta(t)$ è un'equazione della forma:

$$\Phi(t, \eta, \dot{\eta}) = 0, \quad (26)$$

dove $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}$. Nella (26) è $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Si noti che la (26) definisce implicitamente $\dot{\eta}$ in funzione di t, η . E se tale dipendenza può essere esplicitata, la (26) può essere scritta in **forma normale**:

$$\dot{\eta} = \mathcal{F}(t, \eta), \quad (27)$$

dove $\mathcal{F} : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Da qui in avanti supponiamo che \mathcal{F} sia continua in B assieme alla derivata parziale \mathcal{F}_η .

Definizione 2 Un *integrale* della (27) è una funzione $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, tale che:

$$\dot{\phi}(t) = \mathcal{F}(t, \phi(t)), \quad \forall t \in I \subseteq \Theta \quad (28)$$

Definizione 3 All'integrale $\phi(t)$ resta univocamente associata nel piano cartesiano $t\eta$, la curva $\gamma : \eta = \phi(t)$ denominata *curva integrale* della (27).

In generale, l'equazione (27) ammette infinite soluzioni:

$$\eta = \eta(t, C), \quad (29)$$

dove C è una costante reale arbitraria.

Definizione 4 La (29) è l'*integrale generale* della (27). Ad esso corrisponde la famiglia di curve integrali $\Gamma = \{\gamma_C \subset \mathbb{R}^2 \mid \gamma_C : \eta = \eta(t, C)\}$.

Definizione 5 Un assegnato valore $C_* \in \mathbb{R}$ individua univocamente l'*integrale particolare* $\eta_*(t, C_*)$ della (27).

Supponiamo ora che η sia una grandezza che caratterizza l'evoluzione temporale di un cosiddetto **sistema dinamico a tempo continuo non autonomo**. Più precisamente, la grandezza $\eta(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathcal{F}(\eta), \quad (30)$$

che è un caso particolare della (27), poichè \mathcal{F} non dipende esplicitamente dal tempo. Per ipotesi è $\mathcal{F} \in C^{r \geq 1}(B)$, dove $B \subseteq \mathbb{R}$. Dopo aver calcolato, con la procedura vista nella sezione precedente, il tempo caratteristico $\bar{\tau}_H$, adimensionalizziamo il tempo:

$$t' = \frac{t}{\bar{\tau}_H},$$

cosicchè:

$$\frac{d\eta}{dt'} = \bar{\tau}_H \mathcal{F}(\eta)$$

Al solito, ridifinendo t' in t :

$$\frac{d\eta}{dt} = \bar{\tau}_H \mathcal{F}(\eta) \quad (31)$$

Adimensionalizziamo la variabile η , attraverso la relazione:

$$x = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad (32)$$

dove η_0 è un qualche valore caratteristico di η . L'equazione diventa:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (33)$$

dove $F(x) = \frac{\bar{\tau}_H}{\eta_0} \mathcal{F}(\eta(x))$ con $\eta(x) = \eta_0 x$. Evidentemente $\mathcal{F} \in C^r(B) \implies F \in C^r(X)$, essendo $X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\eta}{\eta_0}, \forall \eta \in B \right\} \subseteq \mathbb{R}$. L'evoluzione temporale del sistema dinamico è ora regolata dall'equazione differenziale (33). Se $x(t, C)$ è l'integrale generale della (33), segue che l'integrale generale della (30) è $\eta(t, C) = \eta_0 x(t, C)$. Indichiamo simbolicamente il sistema dinamico governato dalla (33) con:

$$S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}, \quad (34)$$

dove \doteq sta per “rappresentato da”. Il suffisso F ci ricorda che la grandezza x soddisfa all’equazione differenziale $\frac{dx}{dt} = F(x)$, mentre l’apice “c” sta per “continuo”. La (33) è un’equazione differenziale del primo ordine di forma normale e a coefficienti costanti. Per quanto detto, l’integrale generale della (30) è della forma:

$$x = x(t, C), \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (35)$$

La grandezza x definisce lo **stato** del sistema a tempo continuo $S_F^{(c)}$. Il problema consiste nel determinare l’evoluto temporale dello stato x a partire dallo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$. Matematicamente ciò si traduce nella ricerca delle soluzioni del *problema di Cauchy* relativo all’equazione differenziale (30):

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (36)$$

Si osservi che risolvere il problema (36) equivale a ricercare la curva integrale $\gamma_* \in \Gamma$ passante per il punto (t_0, x_0) . Quindi $x_0 = x(t_0, C_*)$, da cui si ricava il valore C_* della costante di integrazione che individua univocamente l’integrale particolare. Sull’esistenza di soluzioni del problema di Cauchy, sussiste il teorema:

Teorema 6 Teorema di esistenza ed unicità

Hp $F \in C^{r \geq 1}(X)$

Th $\exists! \xi(t) \in C^{r \geq 1}(\Theta) \mid \forall t \in I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \dot{\xi}(t) = F(\xi(t)), \xi(t_0) = x_0.$

Per la dimostrazione rimandiamo a [1].

Conseguenza 7 *Lo stato $x(t)$ a tutti i tempi è univocamente determinato dallo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$, dove t_0 è un “istante iniziale”. Ciò si esprime dicendo che $S_F^{(c)}$ è **deterministico**.*

2.2 Costante di tempo e tempo caratteristico di un sistema dinamico a tempo continuo

Riprendiamo nuovamente l'andamento esponenziale scritto nella forma:

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\frac{t}{\tau_c}} \quad (37)$$

Ricordiamo che τ_c è la costante di tempo, ovvero una grandezza che fissa la scala dei tempi del sistema. Nel grafico di fig. 2, riportiamo l'andamento della funzione la cui espressione elementare è data dalla (37) per valori crescenti della costante di tempo τ_c . Da tale grafico vediamo che al crescere di τ_c , la “crescita” di η è “più lenta”. Nel limite di $\tau_c \rightarrow +\infty$ è $\eta(t) = \eta_0, \forall t$.

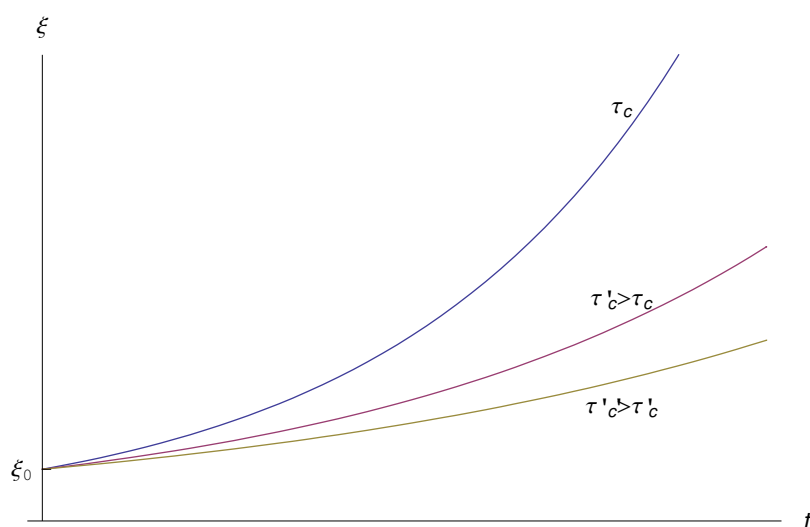


Figure 2: Crescita esponenziale con differenti valori della costante di tempo τ_c .

Viceversa, al diminuire di τ_c aumenta il tasso di crescita della grandezza x . Ciò

può essere visto oltre che dal grafico precedente, dallo studio della funzione:

$$H(t) = \left| \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} \right| = \frac{1}{\tau_c}$$

Vediamo dunque che nel caso dell'andamento esponenziale, la costante di tempo coincide con il tempo caratteristico τ_H . Inoltre:

$$H(t) \xrightarrow{\tau_c \rightarrow 0^+} +\infty$$

Più precisamente:

$$\frac{\eta(t)}{\eta_0} = e^{\frac{t}{\tau_c}} \xrightarrow{\tau_c \rightarrow 0^+} \begin{cases} e^{+\infty} = +\infty, & \text{se } t > 0 \\ e^{-\infty} = 0^+, & \text{se } t < 0 \\ e^0, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

D'altro canto, nelle sezioni precedenti abbiamo visto che il tempo caratteristico mediato su un intervallo di tempo $[t_0, t_0 + T]$ è:

$$\bar{\tau}_H = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{H(t)}, \quad (38)$$

dove $[t_0, t_0 + T]$ definisce il range temporale del sistema. Per l'andamento esponenziale è manifestamente $\bar{\tau}_H = \tau_c$. Per andamenti differenti, ci aspettiamo $\tau_H \neq \tau_c$. Più precisamente, esiste una particolare classe di sistemi dinamici a tempo continuo caratterizzati da una costante di tempo $\tau_c = \text{const.}$ e da un tempo caratteristico funzione del tempo $\tau_H(t)$.

Definizione 8 $\tau_H(t)$ è il **tempo caratteristico istantaneo**, mentre il suo valore mediato in $[t_0, t_0 + T]$ è il **tempo caratteristico medio** del sistema.

Ad esempio, consideriamo il transitorio della carica elettrica q in un circuito composto da una resistenza R e da un condensatore di capacità C (serie RC). Alla serie è applicata una d.d.p. $V_0 = \text{const.}$ Se $i(t)$ è la corrente, la caduta di potenziale ai capi di C è:

$$V_c = \frac{q(t)}{C} \quad (39)$$

Ma

$$q(t) = \int i(t) dt, \quad (40)$$

onde:

$$V_c(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt \quad (41)$$

La caduta di potenziale ai capi di R è data dalla legge di Ohm

$$V_R(t) = Ri(t) \quad (42)$$

Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V_c(t) + V_R(t) = V_0 \quad (43)$$

Cioè:

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = V_0 \quad (44)$$

Dalla (40) $i(t) = \frac{dq}{dt}$, per cui:

$$\frac{q(t)}{C} + R \frac{dq}{dt} = V_0 \quad (45)$$

Immaginando di chiudere il circuito al tempo $t = 0$, abbiamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q(t) + \frac{V_0}{R} \\ q(0) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Abbiamo dunque un sistema lineare. Il fattore integrante dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q(t) + \frac{V_0}{R}$ è:

$$I(t) = e^{\int \frac{dt}{RC}} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Quindi, moltiplicando primo e secondo membro per $I(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(q e^{\frac{t}{RC}} \right) = \frac{V_0}{R} e^{\frac{t}{RC}},$$

da cui:

$$q(t) = CV + K e^{-\frac{t}{RC}},$$

dove K è una costante di integrazione. Imponendo la condizione iniziale $q(0) = 0$, otteniamo l'integrale particolare (*salita esponenziale*):

$$q(t) = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right), \quad (47)$$

avendo posto $\tau_c = RC$. Tale grandezza avente le dimensioni di un tempo, è appunto la costante di tempo del sistema. In fig. 3 riportiamo il diagramma cartesiano della funzione $q(t)$ espressa dalla (47) per valori crescenti della costante di tempo τ_c (aumentando C , ad esempio). Da ciò vediamo che al crescere di τ_c , la crescita di q diviene più “lenta”.

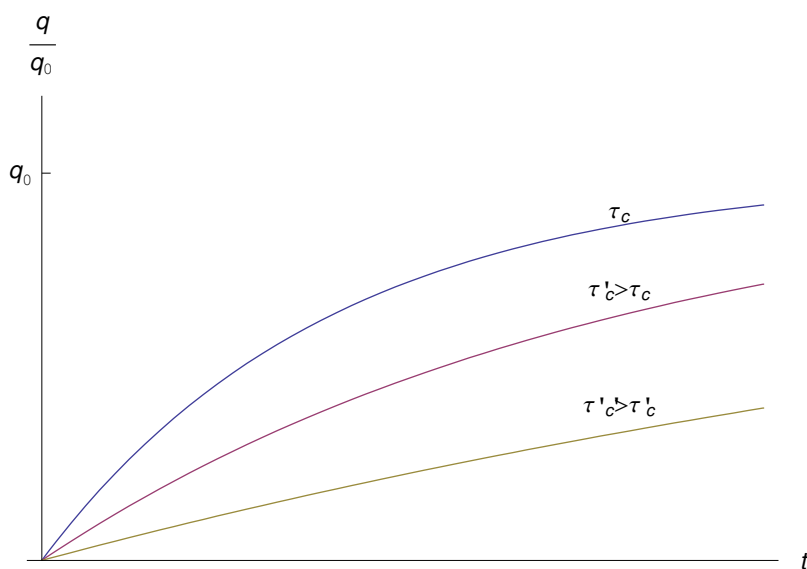


Figure 3: Andamento della carica elettrica $q(t)$ sulle armature del condensatore, per diversi valori di $\tau_c = RC$.

Più precisamente:

$$q(t) \xrightarrow{\tau_c \rightarrow +\infty} 0^+$$

Fisicamente ciò significa che la carica del condensatore si verifica dopo un tempo infinito. Nel limite opposto:

$$q(t) \xrightarrow{\tau_c \rightarrow 0^+} q_0 \theta(t),$$

essendo $\theta(t)$ la funzione unit step:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo ora il tempo caratteristico istantaneo di tale sistema. Risulta:dove:

$$H(t) = \left| \frac{\dot{q}}{q} \right| = \frac{1}{\tau_c \left(e^{\frac{t}{\tau_c}} - 1 \right)},$$

onde:

$$\tau_H(t) = \tau_c \left(e^{\frac{t}{\tau_c}} - 1 \right) \neq \tau_c \quad (48)$$

Più precisamente:

$$\tau_H(t) = \tau_c \iff t = \tau_c \ln 2$$

In fig. 4 è riportato l'andamento della funzione (48).

L'andamento di τ_H è proprio quello che ci si aspetta. A $t = 0$ il circuito viene chiuso, per cui si ha una variazione violenta di $q(t)$ e il tempo caratteristico istantaneo è nullo. Al crescere di t , τ_H cresce linearmente (basta sviluppare in serie di Taylor l'esponenziale). All'istante $t = \tau_c \ln 2$, il tempo caratteristico istantaneo uguaglia la costante di tempo, per poi aumentare e per $t \gg \tau_c$, si ha che τ_H cresce esponenzialmente, giacchè la carica elettrica si è "quasi" assestata al valore di regime q_0 .

In generale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \tau_H(t) &= \frac{1}{H(t)} \\ \bar{\tau}_H &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tau_H(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{H(t)} \end{aligned} \quad (49)$$

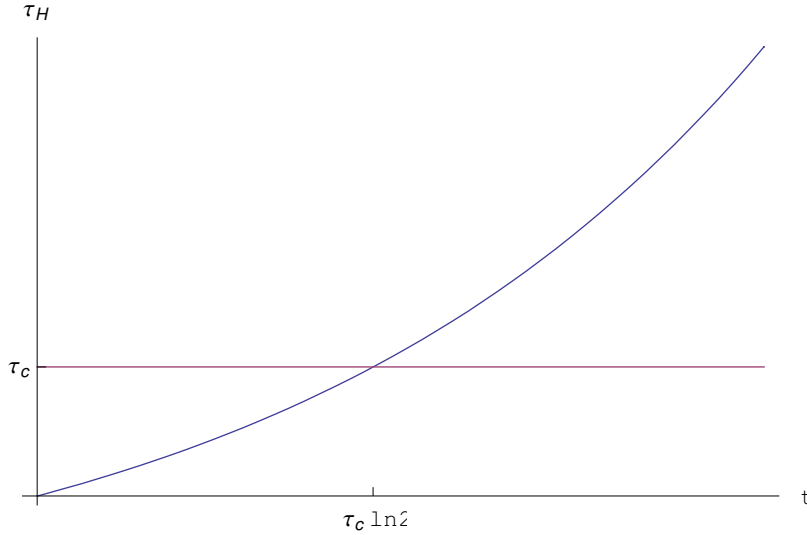


Figure 4: Andamento del tempo caratteristico istantaneo τ_H della serie RC in funzione del tempo t .

Dalla seconda delle (49) segue che:

$$\forall T > t_0, 0 < \bar{\tau}_H \leq +\infty \quad (50)$$

Infatti, l'integrando è sempre non negativo. Scriviamo le (49) per il sistema adimensionale $S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}$. Per un assegnato T , eseguiamo il cambio di variabile:

$$t' = \frac{t}{\bar{\tau}_H}$$

Ricordiamo che

$$\tau_H(t) = \left| \frac{\eta(t)}{\dot{\eta}(t)} \right|$$

La derivata:

$$\dot{\eta}(t) = \left| \frac{d\eta}{dt} \right| = \left| \frac{d\eta}{dt'} \frac{dt'}{dt} \right| = \frac{1}{\bar{\tau}_H} \left| \frac{d\eta}{dt'} \right|$$

Cioè':

$$\tau_H(t') = \bar{\tau}_H \left| \frac{\eta(t')}{\frac{d\eta}{dt'}} \right|$$

Adimensionalizziamo η con il solito cambio di variabile $x = \frac{\eta}{\eta_0}$:

$$\tau_H(t') = \bar{\tau}_H \left| \frac{x(t')}{\frac{dx}{dt'}} \right|$$

Ridifinando t' in t e indicando con \cdot la derivata rispetto a t :

$$\tau_H(t) = \bar{\tau}_H \left| \frac{x(t)}{\dot{x}(t)} \right| \quad (51)$$

La grandezza $H(t)$:

$$H(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_H} \left| \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right| \quad (52)$$

Dalla (52) vediamo che la funzione $H(t)$ si annulla nei punti critici t_{crit} di $x(t)$ che non siano zeri di $x(t)$. Se $t_{crit} \in [t_0, t_0 + T]$ e se $\tau_H(t)$ è in t_{crit} un infinito di ordine ≥ 1 , l'integrale diverge. Ciò significa che in $[t_0, t_0 + T]$ lo stato del sistema non varia apprezzabilmente.

Le proprietà locali di $\tau_H(t)$ si determinano ricercando i suoi zeri al finito. Abbiamo:

$$\tau_H(t) = 0 \iff \frac{x(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

Gli zeri non critici di $\tau_H(t)$ sono tutti e soli i punti $\bar{t} \in \Theta$ tali che $\dot{x}(\bar{t}) \neq 0$ AND $x(\bar{t}) = 0$. Gli zeri di $\tau_H(t)$ sono anche i punti di flesso a tangente verticale del diagramma cartesiano della funzione $x(t)$. Infatti, se t_f è uno di tali punti, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow t_f} |\dot{x}(t)| = +\infty \implies \lim_{t \rightarrow t_f} \tau_H(t) = 0 \quad (53)$$

Ma:

$$F \in C^r(X) \implies \dot{x} \in C^r(\Theta),$$

per cui il grafico $\mathcal{G} : x = x(t)$ è privo di punti di flesso a tangente verticale.

Conseguenza 9 *Il tempo caratteristico istantaneo di un sistema dinamico a tempo continuo $S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}$ si annulla solo negli zeri non critici dello stato $x(t)$.*

Osservazione 10 Ciò può essere visto anche dalla (51) che può essere scritta come:

$$\tau_H(t) = \bar{\tau}_H \left| \frac{x(t)}{F(x(t))} \right|,$$

in cui $\nexists t_f \in X \mid \lim_{t \rightarrow t_f} F(x(t)) = +\infty$.

Vale la pena considerare sistemi dinamici *patologici*, ovvero sistemi per i quali l'insieme delle singolarità al finito di F è non vuoto. Più specificatamente:

$$\exists t_f \in \Theta \mid \lim_{x \rightarrow x_f} |F(x)| = +\infty,$$

dove $x_f = x(t_f)$, cosicchè è valida la (53). Evidentemente:

$$\exists t_f \in \Theta \mid \lim_{x \rightarrow x_f} |F(x)| = +\infty \implies \left(\delta > 0, \exists \varepsilon_\delta > 1 \mid t', t'' \in I_\delta(t_f), \left| \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'} \right| > \varepsilon_\delta \right)$$

In altri termini, in un opportuno intorno $I_\delta(t_f)$ del punto di flesso t_f , le variazioni dello stato di $S_F^{(c)}$ non sono trascurabilmente piccole. Un esempio canonico di sistema dinamico patologico è dato da:

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \delta(x),$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac. Risulta:

$$x(t) = x_0 \theta(t),$$

Vediamo dunque che $\tau_H(0) = 0$ e in tale istante lo stato del sistema passa istantaneamente da 0 a $x_0 > 0$. Se invece dell'andamento a gradino, si ha un andamento più dolce ma con un punto di flesso a tangente verticale, si ha comunque un'ampia variazione del rapporto incrementale della funzione $x(t)$. Ad esempio, consideriamo il sistema dinamico:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x},$$

con la condizione iniziale $x(0) = -2$. Tale sistema è patologico, poichè $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$. Risolvendo, otteniamo:

$$x(t) = \sqrt{2t - 2}$$

La curva $x = x(t)$ ha un flesso a tangente verticale in $t_f = 1$.

3 Sistemi dinamici iterati

3.1 Metodo di König-Lemmaray

Riprendiamo l'equazione (25). Si tratta di un'equazione di ricorrenza, cioè della forma:

$$\xi_{n+1} = f(\xi_n), \quad (54)$$

dove:

$$f(\xi_n) = (1 + \beta_H \Delta) \xi_n - \Delta (1 + \beta_H) \xi_n^2 \quad (55)$$

Come è noto, le equazioni di ricorrenza vengono utilizzate per la ricerca delle soluzioni di un'equazione del tipo:

$$f(x) = x, \quad (56)$$

Tale equazione può essere risolta attraverso un algoritmo iterativo denominato *metodo delle contrazioni* [5]. Inoltre, la (54) ci dice che il valore $n+1$ -esimo della grandezza ξ è il valore assunto dalla funzione f (eq. (55)) sul valore precedente (cioè n -esimo) di ξ .

Definizione 11 *Assegnato l'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, una trasformazione di $[a, b]$ in sè è un'applicazione $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ di classe $C^{r \geq 1}$ in $[a, b]$.*

In altri termini, una trasformazione di $[a, b]$ in sè, è una funzione reale di una variabile reale definita in $[a, b]$ e tale che $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

Definizione 12 *Un sistema dinamico iterato o sistema dinamico a tempo discreto $S_f^{(d)}$ è l'insieme:*

$$S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}, \quad (57)$$

dove $X \subseteq \mathbb{R}$ è lo **spazio degli stati** o **spazio delle configurazioni**, $x \in X$ è l'**ingresso** (o **input**) di $S_f^{(d)}$ e $f(x)$ è l'**uscita** (o **output**) di S_f , essendo f una trasformazione di X in sè. Chiamiamo f **funzione di trasferimento** di $S_f^{(d)}$.

Il suffisso "d" ci ricorda che tale sistema è definito nel tempo discreto.

Il sistema è schematicamente rappresentato in fig. 5.

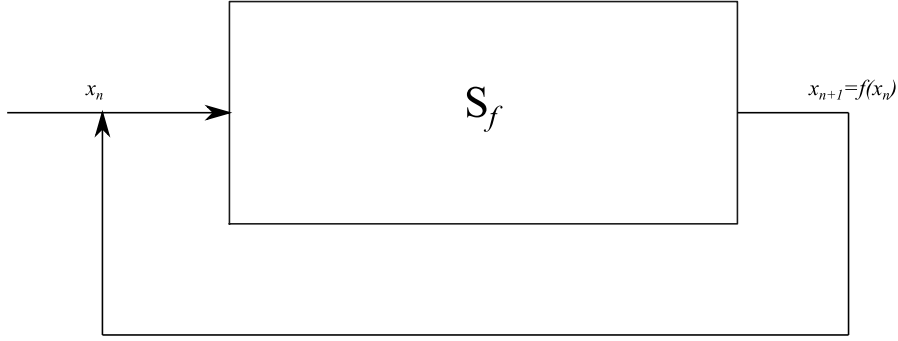


Figure 5: Rappresentazione schematica di un sistema dinamico iterato con funzione di trasferimento $f(x)$. Inizialmente il sistema accetta l'input $x_0 \in X$ e restituisce l'output $x_1 = f(x_0)$, processato dalla funzione di trasferimento f , data dalla trasformazione di un assegnato intervallo X in sè. L'output $f(x_0)$ viene reindirizzato all'ingresso e quindi riprocessato, fornendo il nuovo output $f(x_1) = f(f(x_0))$. Il processo viene iterato n volte, fornendo l'output $f(f(\dots f(x)))$. Quindi, la sequenza generata è: $x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow f(f(x_0)) \rightarrow \dots \rightarrow f(f(\dots f(x_0))) \rightarrow \dots$

In fig. 6 viene illustrato il procedimento per il calcolo dell'output del sistema $S_f^{(d)}$ (**metodo di König-Lemaray**) Assegnato lo stato iniziale $x_0 \in X$, il processo di iterazione genera una successione $\{x_n\}$:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f(x_0) \\
 x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
 &\dots \\
 x_n &= f^n(x_0) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Qui f^n indica la composizione n -esima di f con se stessa eseguita n volte. Cioè:

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_n$$

Secondo la definizione data in [2], il sistema $S_f^{(d)}$ schematizzato in fig. 5, si comporta alla stregua di una black box, nel senso che emette un output sulla base di

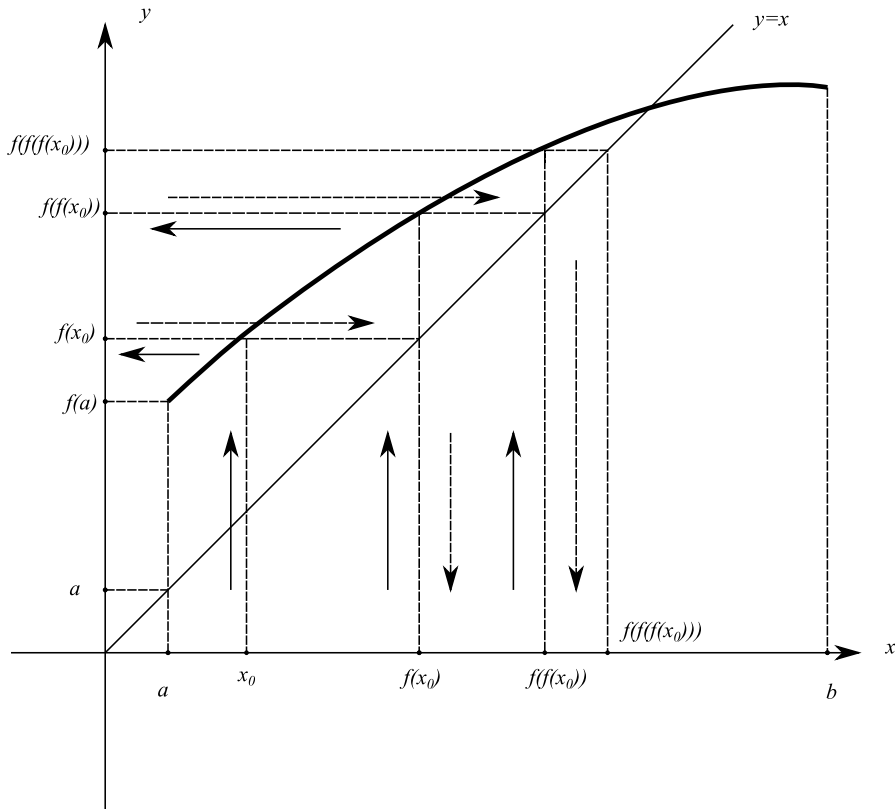


Figure 6: Procedimento per il calcolo dell'output del sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} = \{[a, b], f\}$. Tracciamo innanzitutto il grafico $\Gamma_{[a,b]}$ della funzione di trasferimento $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ del sistema dinamico iterato $S_f = \{[a, b], f\}$. Tracciamo poi la retta $y = x$, ovvero il grafico della funzione identica $\phi : x \rightarrow x$, $\forall x \in [a, b]$. Assegnato l'input iniziale x_0 , resta univocamente definito l'output $f(x_0)$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f(x_0) \in [a, b]$. Quest'ultimo è il nuovo input che individua univocamente l'output $f(f(x_0))$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f(f(x_0)) \in [a, b]$. Il procedimento viene iterato n volte. In figura, le frecce continue schematizzano il calcolo dell'output (immagine tramite f), mentre quelle tratteggiate schematizzano il calcolo dell'input (immagine inversa tramite ϕ).

un input x e su una legge di trasformazione $f(x)$.

Definizione 13 *Un sistema dinamico a tempo discreto $S_f^{(d)} := \{X, f\}$ è **lineare** se $f : X \rightarrow X$ è lineare. Nel caso contrario, $S_f^{(d)}$ è non lineare.*

4 Sistemi dinamici a tempo continuo computabili

Definizione 14 *Un sistema dinamico a tempo continuo è **computabile** se e solo se la sua evoluzione temporale è riprodotta dall'iterazione di una funzione ricorsiva.*

Teorema 15 *I sistemi dinamici a tempo continuo $S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}$ con $F \in C^{r \geq 1}(X)$ sono computabili. Più precisamente:*

$$\forall S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}, \exists! S_f^{(d)} \doteq \{X, f\} \mid f(x) = F(x) + x \quad (58)$$

Dimostrazione. Assegnato $S_F^{(c)}$, si ha:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (59)$$

con $x \in X \subseteq \mathbb{R}$. Inoltre, dalla (50) risulta $\bar{\tau}_H > 0$. Ripristiniamo la grandezza η attraverso l'equazione (32). Ricordando che t è il tempo adimensionale, si ha $\eta(\bar{\tau}_H t) = \eta_0 x(\bar{\tau}_H t)$. In base alle considerazioni svolte in (1.1):

$$\frac{\eta(\bar{\tau}_H t + \bar{\tau}_H \Delta) - \eta(\bar{\tau}_H t)}{\bar{\tau}_H \Delta} \simeq \mathcal{F}(\eta(\bar{\tau}_H t)) \quad (60)$$

Qui $\bar{\tau}_H \Delta$ è l'intervallo di campionamento. Affinchè sia valida la (60) deve essere $0 < \bar{\tau}_H \Delta \leq \bar{\tau}_H$, per cui il campionamento adimensionale è $0 < \Delta \leq 1$. Ritornando alle grandezze adimensionali, si ha:

$$\frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta} \simeq F(x(t)), \text{ con } 0 < \Delta \leq 1 \quad (61)$$

In altri termini, per $0 < \Delta \leq 1$, possiamo approssimare la derivata $\frac{dx}{dt}$ con il rapporto incrementale della funzione $x(t)$. Ciò suggerisce di discretizzare la variabile continua t . A tale scopo, assumiamo t_0 come "istante" iniziale. Eseguiamo quindi

una decomposizione (o partizione) dell'intervallo $[t_0, +\infty)$, fissando ad arbitrio gli "istanti" t_1, \dots, t_N :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N, \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

Quindi:

$$[t_0, t_N] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

Per $N \rightarrow +\infty$:

$$[t_0, +\infty) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

Indichiamo con $\mathcal{D}([t_0, +\infty))$ tale decomposizione. Sia Δ la **norma** di $\mathcal{D}([t_0, +\infty))$:

$$\Delta = \max_{n \in \mathbb{N}} (t_{n+1} - t_n)$$

Per quanto detto deve essere $0 < \Delta \leq 1$. Riscriviamo la (59) nella forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = F(x(t)) \quad (62)$$

Ma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \xrightarrow{t \rightarrow t_n} \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta}$$

essendo²:

$$x_n = x(t_n)$$

La (62) diventa:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta} = F(x_n)$$

Cioè:

$$x_{n+1} = F(x_n) \Delta + x_n, \quad (63)$$

La (63) è una relazione di ricorrenza del tipo:

$$x_{n+1} = f_{\Delta}(x_n),$$

²Si osservi che nel caso di una *equipartizione*, la norma è $\Delta = t_{n+1} - t_n$, da cui $t_n = n\Delta$ e $x_n = x(n\Delta)$.

dove:

$$f_{\Delta}(x) = F(x) \Delta + x \quad (64)$$

Resta così univocamente determinato (a meno della norma Δ) il sistema dinamico a tempo discreto $S_{f_{\Delta}}^{(d)} \doteq \{X, f_{\Delta}\}$. Per $\Delta = 1$, si ha $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$ con $f(x) = F(x) + x$. ■

Osservazione 16 La (58) è invertibile:

$$\forall S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}, \exists! S_F^{(c)} \doteq \{x, F\} \mid F(x) = f(x) - x$$

Conseguenza 17 Ogni sistema dinamico a tempo continuo è computabile. Più precisamente, l'evoluzione temporale di un sistema dinamico a tempo continuo è riprodotta dall'iterazione di un sistema dinamico a tempo discreto. Viceversa, l'iterazione di un sistema dinamico a tempo discreto è riprodotta dall'evoluzione temporale di un sistema dinamico a tempo continuo.

Esempio 18 Al sistema dinamico iterato "identità" $\{X, f(x) = x\}$ ($f^n(x_0) = x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$) corrisponde il sistema dinamico a tempo continuo con $F(x)$ pari alla funzione identicamente nulla. Infatti, per il teorema precedente, si ha $F(x) = f(x) - x = 0$. Inoltre, la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

è $x(t) = x_0, \forall t$. Il sistema $\{x, 0\}$ è **stazionario**, poichè lo stato è invariante per evoluzione temporale, i.e. non dipende dal tempo.

Esempio 19 Al sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{X, f(x) = \alpha x\}$ con $\alpha > 1$, corrisponde il sistema dinamico a tempo continuo con $F(x) = (\alpha - 1)x$. La soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - 1)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

è $x(t) = x_0 e^{(\alpha-1)t}, \forall t$.

Riguardo ai sistemi dinamici patologici per i quali l'insieme delle singolarità di F è non vuoto, si ha:

Conseguenza 20 *Un sistema dinamico a tempo continuo $S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}$ in cui F è una funzione generalmente continua, è generalmente computabile, nel senso che è computabile in ogni intervallo $[t_0, t_0 + T]$ in cui $F(x(t))$ è continua.*

Siano Σ_d l'insieme dei sistemi dinamici iterati e Σ_c l'insieme dei sistemi dinamici a tempo continuo. Per quanto visto si ha:

$$\forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, \exists! S_f^{(d)} \in \Sigma_d \mid f(x) = F(x) + x,$$

e viceversa:

$$\forall S_f^{(d)} \in \Sigma_d, \exists! S_F^{(c)} \in \Sigma_c \mid F(x) = f(x) - x,$$

Riferiamoci ai sistemi tali che $X = \mathbb{R}$. Introduciamo in Σ_c le leggi di composizione:

$$\begin{aligned} + : \Sigma_c \times \Sigma_c &\longrightarrow \Sigma_c \\ (S_F^{(c)}, S_G^{(c)}) &\rightarrow S_F^{(c)} + S_G^{(c)} \\ \cdot : \mathbb{R} \times \Sigma_c &\longrightarrow \Sigma_c \\ (\lambda, S_G^{(c)}) &\rightarrow \lambda S_G^{(c)} \end{aligned} \tag{65}$$

La prima è così definita:

$$S_F^{(c)} + S_G^{(c)} \doteq \{x, F + G\}, \quad \forall S_F^{(c)}, S_G^{(c)} \in \Sigma_c,$$

per cui scriviamo:

$$\{x, F\} + \{x, G\} = \{x, F + G\}$$

Inoltre, verifica le seguenti proprietà:

1. Proprietà commutativa.

$$\forall S_F^{(c)}, S_G^{(c)} \in \Sigma_c, S_F^{(c)} + S_G^{(c)} = S_G^{(c)} + S_F^{(c)}$$

2. Proprietà associativa.

$$\forall S_F^{(c)}, S_G^{(c)}, S_H^{(c)} \in \Sigma_c, S_F^{(c)} + (S_G^{(c)} + S_H^{(c)}) = (S_F^{(c)} + S_G^{(c)}) + S_H^{(c)}$$

3. Esistenza dell'elemento neutro.

$$\exists \mathbf{0}_{\Sigma_c} \doteq \{x, 0\} \in \Sigma_c \mid \forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, S_F^{(c)} + \mathbf{0}_{\Sigma_c} = S_F^{(c)},$$

giacchè $S_F^{(c)} + \mathbf{0}_{\Sigma_c} \doteq \{x, F\} + \{x, 0\} = \{x, F\}$. Osserviamo che $\mathbf{0}_{\Sigma_c}$ è il sistema stazionario.

4. Esistenza dell'opposto

Poniamo $-S_F^{(c)} = S_{-F}^{(c)} \doteq \{x, -F\}$, onde:

$$\forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, \exists \left(-S_F^{(c)}\right) \in \Sigma_c \mid -S_F^{(c)} + S_F^{(c)} = \mathbf{0}_{\Sigma_c}$$

La seconda delle (65) è così definita:

$$\lambda S_F^{(c)} \doteq \{x, \lambda F\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c$$

Tale operazione verifica le seguenti proprietà:

I Proprietà distributiva rispetto alla somma in Σ_c .

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall S_F^{(c)}, S_G^{(c)} \in \Sigma_c, \lambda \left(S_F^{(c)} + S_G^{(c)}\right) = \lambda S_F^{(c)} + \lambda S_G^{(c)}$$

II Proprietà distributiva rispetto alla somma in \mathbb{R}

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, (\lambda + \mu) S_F^{(c)} = \lambda S_F^{(c)} + \mu S_F^{(c)}$$

III Proprietà associativa

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, \lambda \left(\mu S_F^{(c)}\right) = (\lambda \mu) S_F^{(c)}$$

IV Esistenza dell'elemento neutro

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall S_F^{(c)} \in \Sigma_c, 1 S_F^{(c)} = S_F^{(c)}$$

Da ciò segue che l'insieme Σ_c assume la struttura di spazio vettoriale sul campo reale \mathbb{R} . Tale spazio vettoriale si identifica con lo spazio funzionale $C^r(\mathbb{R})$. Quindi $\Sigma_c = C^r(\mathbb{R})$. In maniera simile, introducendo le leggi di composizione in Σ_d :

$$\begin{aligned} + : \Sigma_d \times \Sigma_d &\longrightarrow \Sigma_d \\ (S_f^{(d)}, S_g^{(d)}) &\longrightarrow S_f^{(d)} + S_g^{(d)} \\ \cdot : \mathbb{R} \times \Sigma_d &\longrightarrow \Sigma_d \\ (\lambda, S_f^{(d)}) &\longrightarrow \lambda S_f^{(d)} \end{aligned} \tag{66}$$

Definite da:

$$\begin{aligned} S_f^{(d)} + S_g^{(d)} &\doteq \{\mathbb{R}, f + g\}, \quad \forall S_f^{(d)}, S_g^{(d)} \in \Sigma_d \\ \lambda S_f^{(d)} &\doteq \{\mathbb{R}, \lambda F\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall S_f^{(d)} \in \Sigma_d, \end{aligned}$$

simbolicamente espressa attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \{\mathbb{R}, f\} + \{\mathbb{R}, g\} &= \{\mathbb{R}, f + g\} \\ \lambda \{\mathbb{R}, f\} &= \{\mathbb{R}, \lambda f\} \end{aligned}$$

In tal modo Σ_d assume la struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . Più precisamente, $\Sigma_d = C^r(\mathbb{R})$. Quindi $\Sigma_c = \Sigma_d$. Ciò non deve sorprendere, perchè se guardiamo la definizione di sistema dinamico a tempo continuo vediamo che esso si identifica con una funzione $F \in C^r(\mathbb{R})$. Alla F corrisponde poi $f(x) = F(x) - x$.

L'elemento neutro di Σ_d è $\mathbf{0}_{\Sigma_d} \doteq \{\mathbb{R}, 0\}$.

Osservazione 21 *Si noti che all'elemento neutro $\mathbf{0}_{\Sigma_d}$ di Σ_d non corrisponde l'elemento neutro $\mathbf{0}_{\Sigma_c}$ di Σ_c . Infatti, corrisponde il sistema $S_F^{(c)} \doteq \{x, F\}$ con $F(x) = -x$, onde $x(t) = x(t_0)e^{-t}$.*

Naturalmente:

$$\dim \Sigma_c = \dim \Sigma_d = +\infty$$

L'applicazione

$$\omega : \Sigma_c \rightarrow \Sigma_d,$$

definita da:

$$\omega \left(S_F^{(c)} \right) = S_f^{(d)}, \quad \text{con } f(x) = F(x) + x$$

è bi-iettiva. In altri termini, il risultato dell'applicazione di ω all'elemento $F \in C^r(\mathbb{R})$ è l'elemento $f \in C^r(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = F(x) + x$. Cioè f è traslato di x (elemento di $C^r(\mathbb{R})$). Quindi ω è l'**operatore traslazione** in $C^r(\mathbb{R})$. Si noti che tale operatore non è lineare. Infatti:

$$\omega(\mathbf{0}_{\Sigma_c}) \doteq \{\mathbb{R}, x\} \neq \mathbf{0}_{\Sigma_d}$$

Ricordiamo infatti che un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W , trasforma il vettore nullo di V nel vettore nullo di W . Ne concludiamo che $\omega \notin \text{End}(C^r(\mathbb{R}))$, cioè non è un endomorfismo di $C^r(\mathbb{R})$.

5 Sistemi dinamici iterati (parte 2)

5.1 Proprietà delle funzioni di trasferimento. Mappe 1-dimensionali. Contrazioni

Per quanto visto, la funzione di trasferimento di un sistema dinamico iterato è una trasformazione di un intervallo $[a, b]$ in sé. Una funzione con questa proprietà è anche detta **mappa 1-dimensionale**.

Esempio 22 *La funzione reale della variabile reale x :*

$$f : x \rightarrow x^2, \forall x \in [0, 1] \quad (67)$$

è una mappa 1-dimensionale, poichè $f([0, 1]) = [0, 1]$, come riportato in fig. 7.

Esempio 23 *La funzione reale della variabile reale x :*

$$f : x \rightarrow e^x, \forall x \in [0, 1] \quad (68)$$

non è una mappa 1-dimensionale, poichè $f([0, 1]) = [1, e] \not\subseteq [0, 1]$, come riportato in fig. 8.

Nell'insieme delle mappe 1-dimensionali svolgono un ruolo chiave le cosiddette **contrazioni**.

Definizione 24 *Una **contrazione** di $[a, b]$ è una trasformazione f di $[a, b]$ tale che*

$$\exists \mu \in (0, 1) \mid |f'(x)| \leq \mu, \forall x \in [a, b]$$

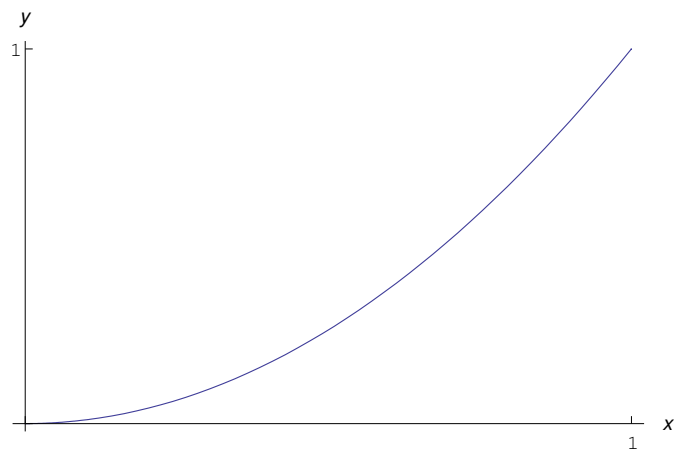


Figure 7: La restrizione della funzione $f(x) = x^2$ all'intervallo compatto $[0, 1]$ è una mappa 1-dimensionale.

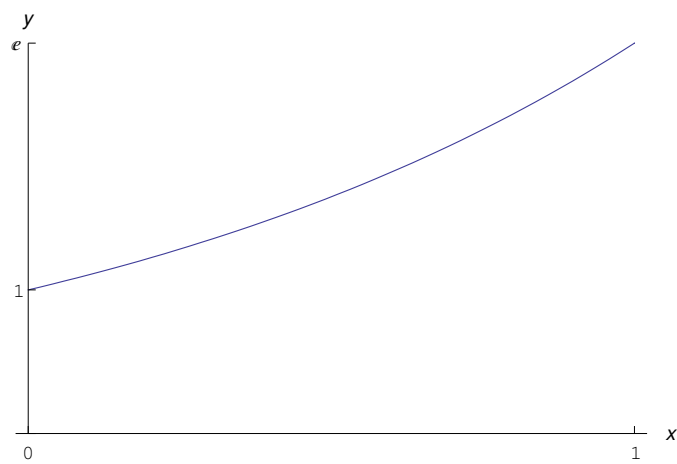


Figure 8: La restrizione della funzione $f(x) = e^x$ all'intervallo compatto $[0, 1]$ non è una mappa 1-dimensionale.

Proposizione 25

f è una contrazione di $[a, b] \implies f([a, b]) \subset [a, b]$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange:

$$x', x'' \in [a, b] \implies \exists \xi \in (x', x'') \mid \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi)$$

Cioè:

$$\forall x', x'' \in [a, b], \quad |f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| \cdot |x'' - x'| \leq \mu |x'' - x'| \underset{\mu \in (0,1)}{<} |x'' - x'| \quad (69)$$

Quindi:

$$|f(b) - f(a)| < |b - a| = b - a,$$

da cui l'asserto. ■

Osservazione 26 La proposizione appena dimostrata giustifica la definizione 24, giacchè una contrazione di $[a, b]$ riduce le distanze ($|f(x'') - f(x')| < |x'' - x'|$).

La mappa 1-dimensionale dell'esempio 22 non è una contrazione, poichè è $f'(x) \geq 1, \forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Teorema 27 Teorema di Brouwer

$$f \text{ è una contrazione di } [a, b] \implies \exists! x_* \in [a, b] \mid f(x_*) = x_* \quad (70)$$

In altri termini, se f è una contrazione di $[a, b]$, l'equazione $f(x) = x$ è compatibile e determinata in $[a, b]$. Inoltre, la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita dall'equazione di ricorrenza:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{con } x_0 \in [a, b] \quad (71)$$

converge alla radice x_* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_* \quad (72)$$

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = x - f(x)$, onde:

$$g'(x) = 1 - f'(x) \geq 1 - \mu > 0, \quad (73)$$

giacchè è per ipotesi $-\mu \leq f'(x) \leq \mu$, essendo $0 < \mu < 1$. Per la proposizione 25 è $f([a, b]) \subset [a, b]$. Senza perdita di generalità, se $f(a) < f(b) \implies [f(a), f(b)] \subset [a, b]$, quindi:

$$g(a) = a - f(a) < 0, \quad g(b) = b - f(b) > 0$$

Dunque, g è continua in $[a, b]$ ed assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto $x_* \in [a, b]$ tale che $g(x_*) = 0$. Ma tale punto è unico, in forza della monotonia della funzione $g(x)$ (eq. 73). Perciò:

$$\exists! x_* \in [a, b] \mid g(x_*) = 0 \implies \exists! x_* \in [a, b] \mid f(x_*) = x_*$$

Dimostriamo la seconda parte del teorema. Assegnando ad arbitrio un punto iniziale $x_0 \in [a, b]$, iteriamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\dots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Abbiamo così costruito la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. I casi possibili sono:

1.

$$\begin{aligned} \exists \nu \in \mathbb{N} \mid x_{\nu+1} = f(x_\nu) = x_\nu \\ \implies \left(\forall n > \nu, x_n = x_\nu \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\nu = x_* \right) \end{aligned}$$

2. $\nexists \nu \in \mathbb{N} \mid x_{\nu+1} = f(x_\nu) = x_\nu$

Per il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned} \forall k > 1, \exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_*) \mid x_k - x_* &= f(x_{k-1}) - f(x_*) = f'(\xi_k) |x_{k-1} - x_*| \\ &\leq \mu |x_{k-1} - x_*| < |x_{k-1} - x_*| \end{aligned}$$

Cioè:

$$|x_k - x_*| < |x_{k-1} - x_*|, \forall k > 1,$$

da cui segue che la successione $\{|x_n - x_*|\}$ è strettamente decrescente. Inoltre:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_*| &\leq \mu |x_0 - x_*| \\ |x_2 - x_*| &\leq \mu |x_1 - x_*| \leq \mu^2 |x_0 - x_*| \\ &\dots \\ |x_n - x_*| &\leq \mu^n |x_0 - x_*| \leq \mu^n (b - a) \end{aligned}$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^n = 0,$$

giacchè è $0 < \mu < 1$. Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^n (b - a) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_*| = 0$$

■

Osserviamo che il punto $x_* \in [a, b]$ è invariante rispetto all'azione della contrazione f . Per tale ragione, x_* si chiama **punto fisso** di f (*fixed point*). Tale definizione si generalizza a una qualunque mappa f che non sia necessariamente una contrazione. Ad esempio, la mappa data dall'equazione (67) ha 2 punti fissi: $x_* = 0$ e $x'_* = 1$. In tal caso, l'equazione $f(x) = x$ ammette 2 soluzioni distinte. Per quanto visto nelle definizioni precedenti, una qualunque trasformazione di $[a, b]$ in sè è la funzione di trasferimento di un sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$. Quindi:

Definizione 28 Un *punto fisso* di $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$ è una radice dell'equazione $f(x) = x$.

La proposizione (25) e il teorema (27) hanno una semplice interpretazione geometrica. Precisamente, il grafico di una contrazione $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ha una pendenza < 1 . Ad esempio, se consideriamo la trasformazione identica di $[a, b]$ (fig. 9):

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b], \quad f : x \rightarrow x, \quad \forall x \in [a, b],$$

vediamo che f non è una contrazione, poichè $|f'(x)| = 1, \forall x \in [a, b]$. E infatti, risulta: $f([a, b]) = [a, b]$. Il caso opposto a quello della trasformazione identica è dato dalla *contrazione degenera*, ovvero dalla trasformazione costante:

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b], \quad f : x \rightarrow c, \quad \forall x \in [a, b],$$

dove c è una costante reale. Risulta $f'(x) = 0$, per cui f è una contrazione di $[a, b]$. È degenera, poichè $f([a, b]) = \{c\}$, cioè contrae l'intervallo $[a, b]$ nell'insieme $\{c\}$, come possiamo vedere dalla fig. 10.

Conseguenza 29 Dal teorema (27) segue che condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $f(x) = x$ sia compatibile e determinata, è che f sia una contrazione. Incidentalmente, se f è la trasformazione identica, l'equazione $f(x) = x$ risulta compatibile e indeterminata, giacchè $\forall x \in [a, b]$ è soluzione. Se invece f è un contrazione degenera di $[a, b]$, l'unica soluzione di $f(x) = x$ è la costante c .

Utilizzando un linguaggio intuitivo ma efficace, possiamo dire che le contrazioni sono una “via di mezzo” tra la trasformazione identica e la contrazione degenera³. In fig. 11. riportiamo un esempio di contrazione in cui f è strettamente crescente in $[a, b]$.

In fig. 12. riportiamo un esempio di contrazione in cui f è strettamente crescente in $[a, b]$.

³Si osservi che mentre la trasformazione identica è unica, di contrazioni degenera ne esistono infinite (per un assegnato intervallo $[a, b]$).

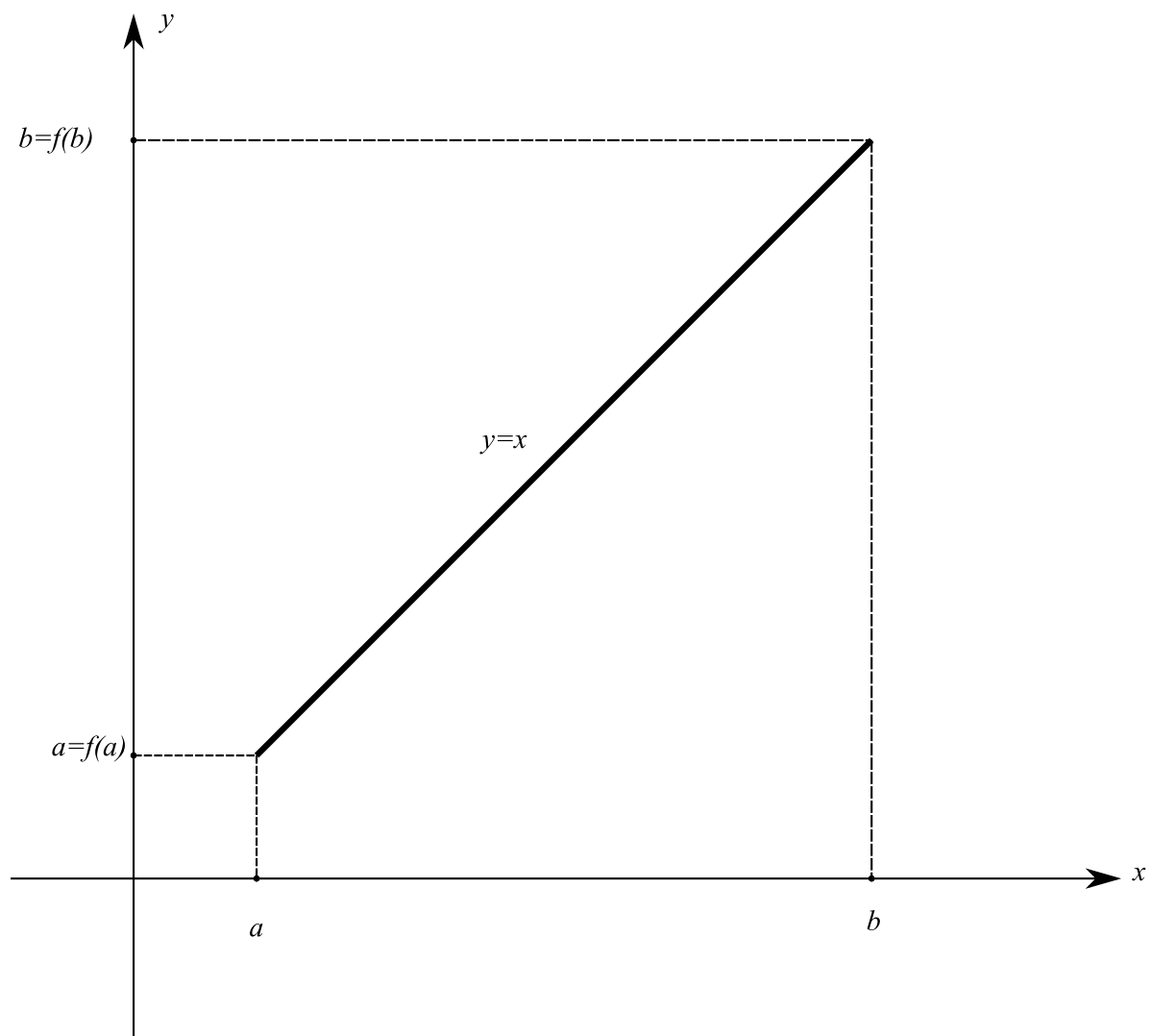


Figure 9: La trasformazione identica di $[a, b]$ non è una contrazione.

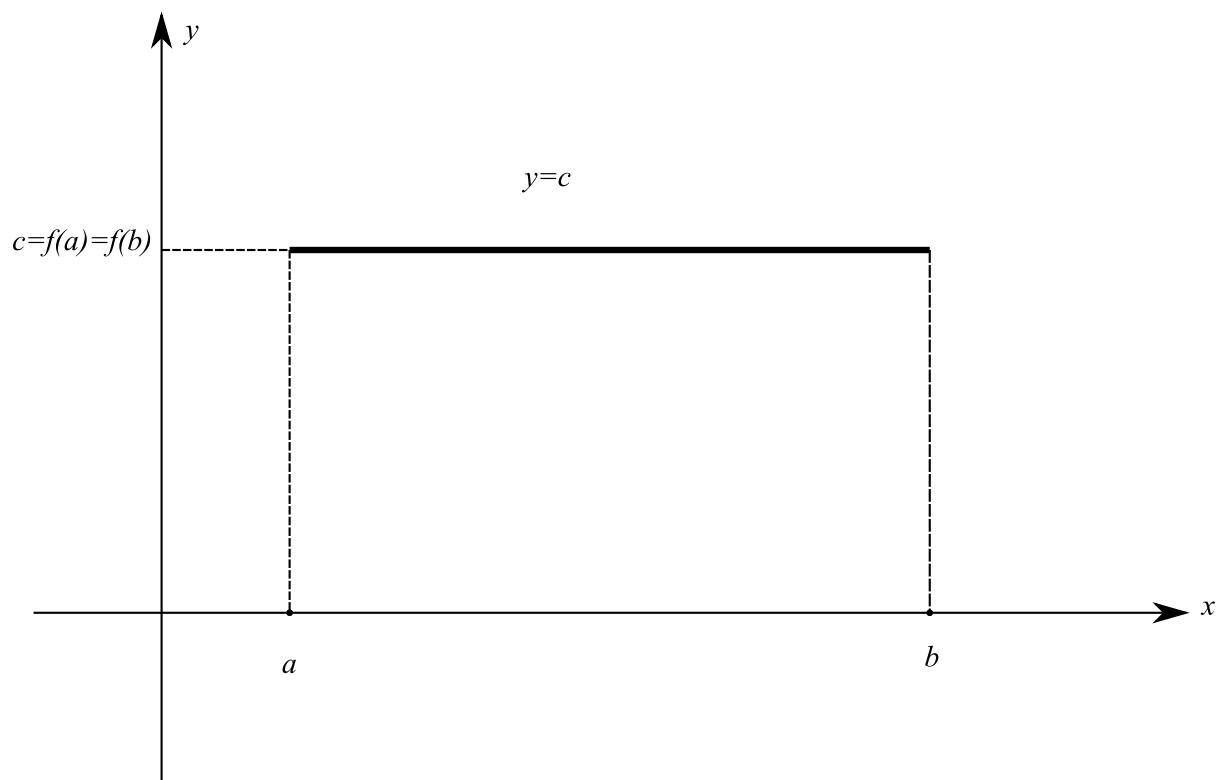


Figure 10: La contrazione degenere *comprime* l'intervallo $[a, b]$ nell'insieme $\{c\}$.

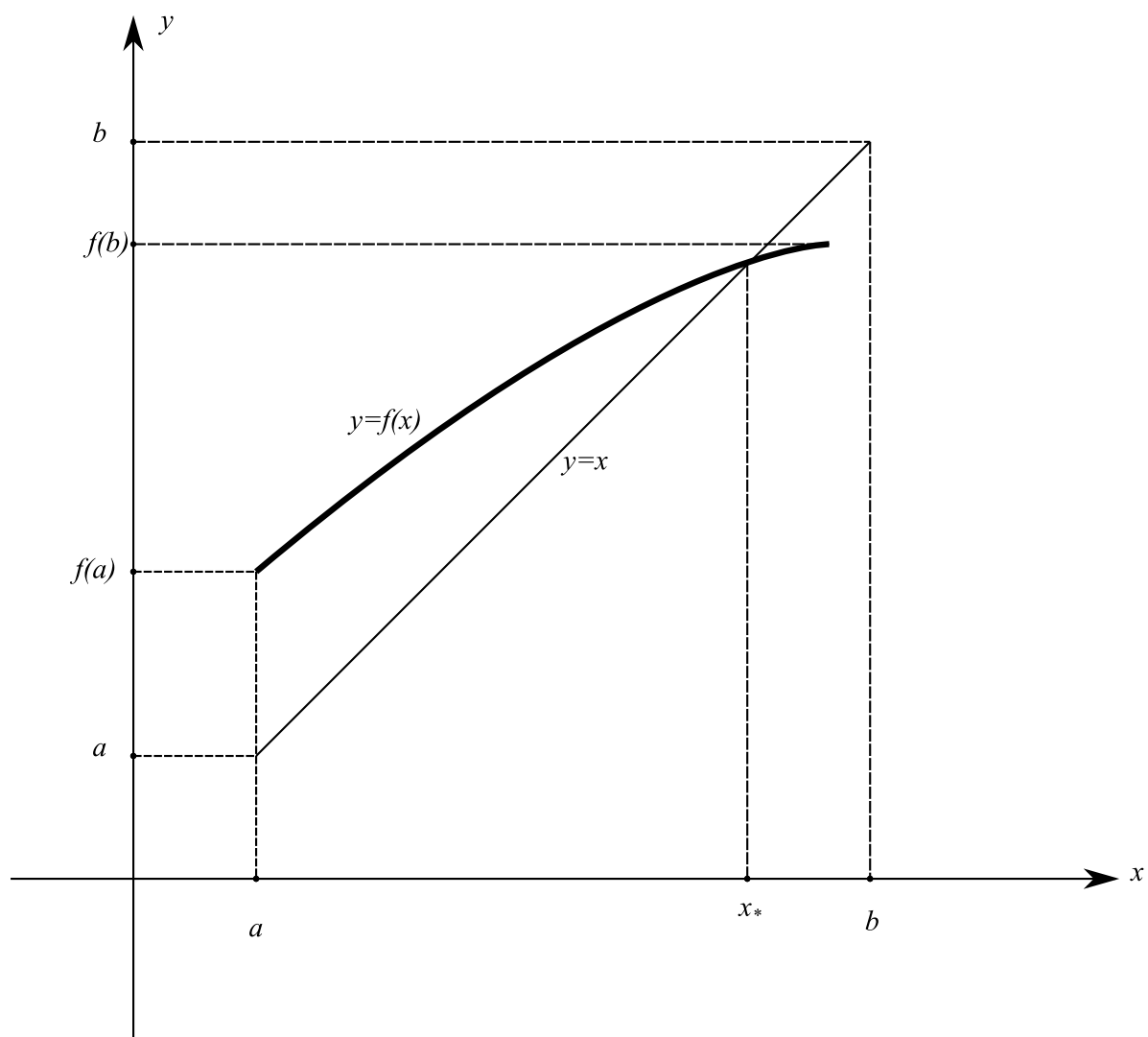


Figure 11: Esempio di contrazione f dell'intervallo $[a, b]$. L'equazione $f(x) = x$ è compatibile e determinata.

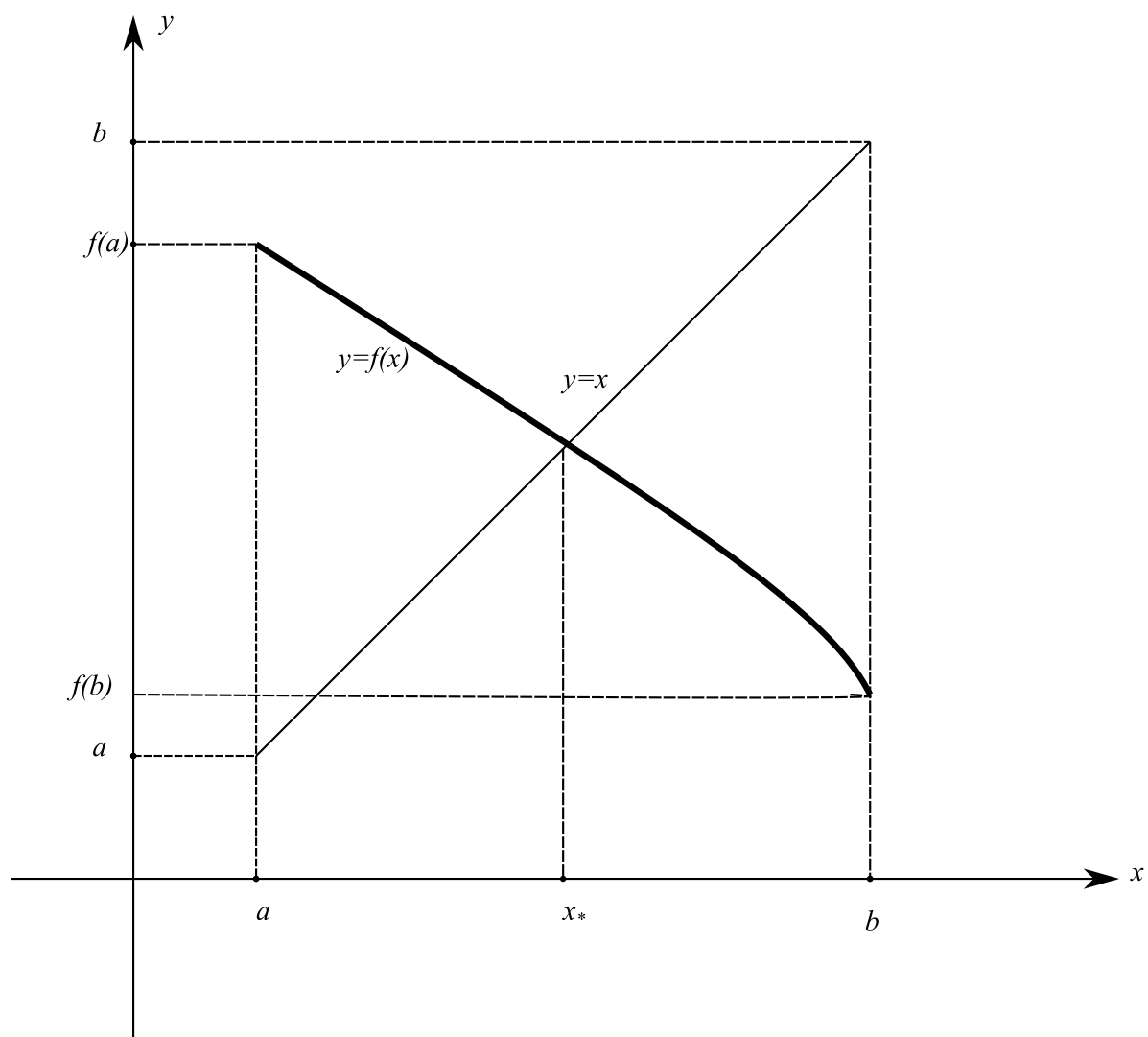


Figure 12: Esempio di contrazione f dell'intervallo $[a, b]$. L'equazione $f(x) = x$ è compatibile e determinata.

Le contrazioni sembrano essere funzioni monotone in senso stretto in $[a, b]$. In realtà, possono invertire la propria monotonia nel suddetto intervallo. Ad esempio, il grafico della funzione riportata in fig 13, è una contrazione di $[a, b]$ ed è strettamente crescente in $[a, x_{\max}]$ e strettamente decrescente in $[x_{\max}, b]$.

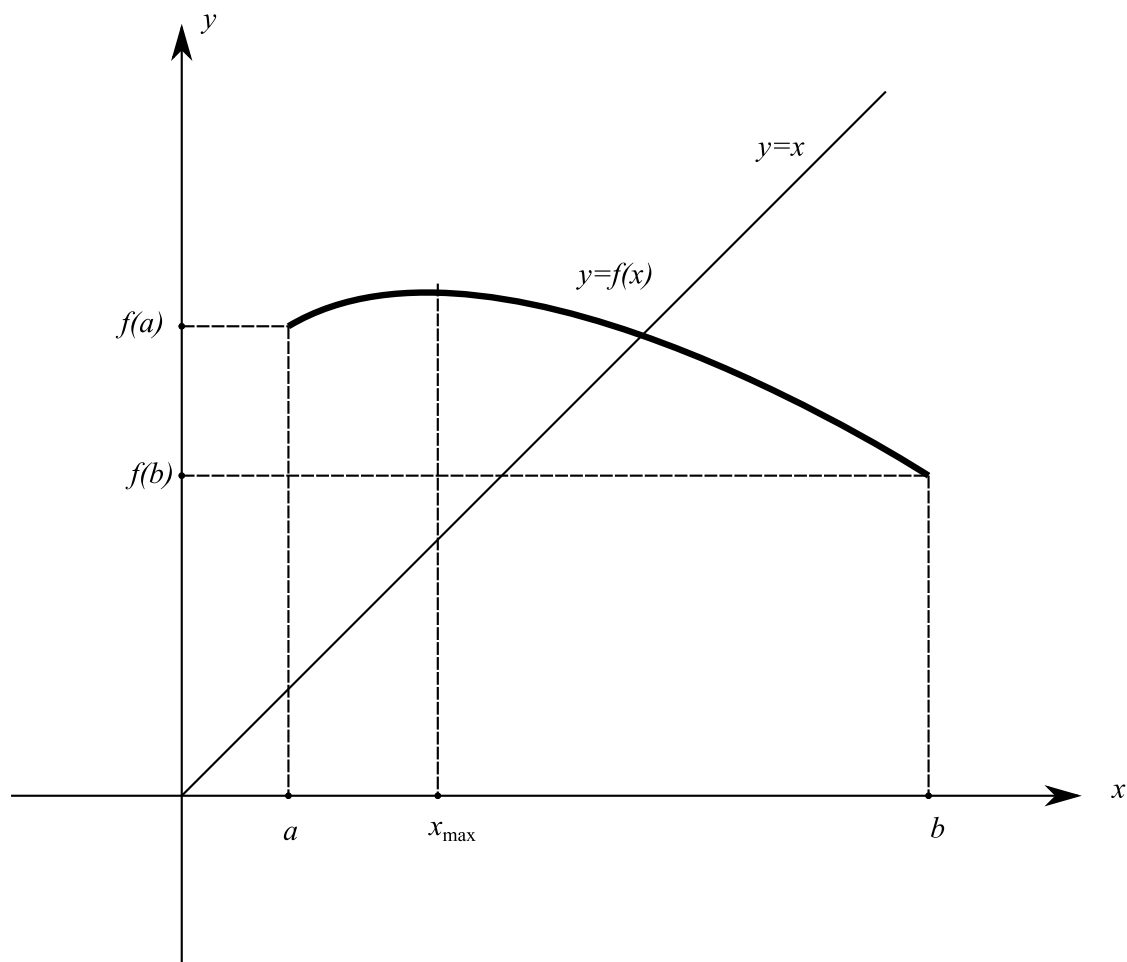


Figure 13: $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ è una contrazione non monotona di $[a, b]$.

Definizione 30 Una mappa 1-dimensionale f è una **contrazione locale** di $[a, b]$ se esiste un intervallo $[\xi_<, \xi_>] \subset [a, b]$ tale che f è una contrazione di $[\xi_<, \xi_>]$. Ad esempio, la mappa (67) è una contrazione dell'intervallo $[0, \frac{1}{2})$, poichè $|f'(x)| = 2|x| < 1, \forall x \in [0, \frac{1}{2})$.

In generale, dobbiamo distinguere i due casi:

1. $f'(x) > 0$, cosicchè la funzione risulta crescente in $[a, b]$. Se assumiamo come punto iniziale $x_0 < x_*$, si ha che la successione $\{x_n\}$ è crescente, come illustrato in fig. 14. Viceversa, se si parte da $x_0 > x_*$, la successione $\{x_n\}$ è decrescente, come illustrato in fig. 15
2. $f'(x) < 0$, cosicchè la funzione risulta decrescente in $[a, b]$. In fig. 16 sono riportate le prime 3 iterazioni.

Riassumiamo a grandi linee i risultati raggiunti. Assegnato il sistema dinamico $S_f^{(d)} = \{[a, b], f\}$ con $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, e un punto iniziale $x_0 \in [a, b]$, resta univocamente determinata la successione $\{x_n\}$:

$$x_n = f(x_{n-1}) \iff x_n = f^n(x_0)$$

Si ricordi che:

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_n, \quad f^0(x_0) = x_0,$$

Se f è una contrazione di $[a, b]$ la successione $\{x_n\}$ converge verso l'unico punto fisso x_* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_*$$

Ciò si esprime dicendo che x_* è un **punto fisso attrattivo** di $S_f^{(d)}$. Inoltre, nel piano cartesiano xy resta univocamente determinata la successione di punti $\{P_n(x_n, f^n(x_0))\}$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_*,$$

Il corrispondente diagramma delle orbite è denominato **diagramma delle orbite** (*cobweb plot*) di $S_f^{(d)}$ [6].

Esempio 31 Sia $S_f^{(d)}$ un sistema dinamico in cui f è la mappa 1-dimensionale:

$$f : x \rightarrow \cos x, \quad \forall x \in [0, 1] \tag{74}$$

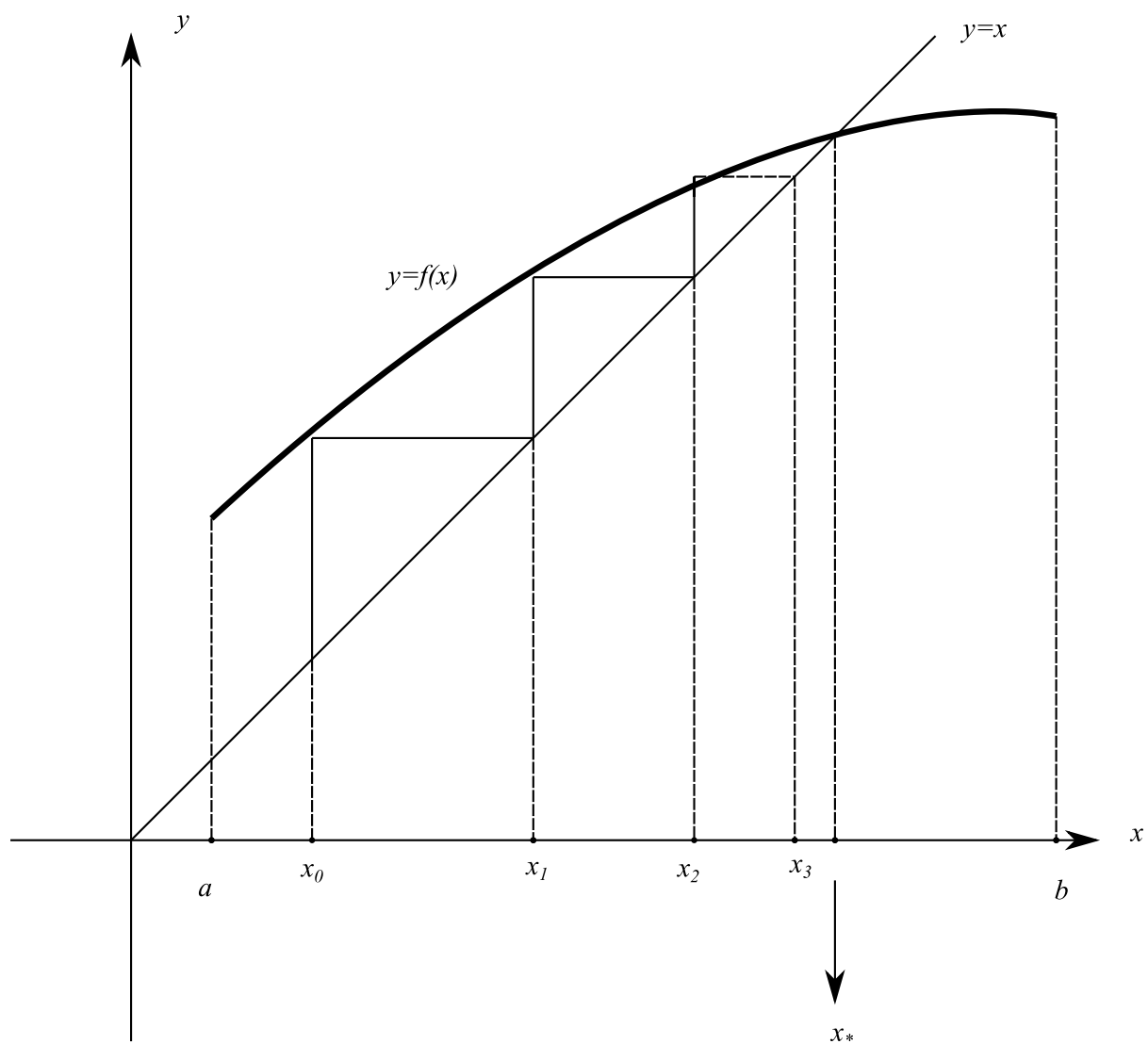


Figure 14: Assumiamo come punto iniziale dell'iterazione $x_0 < x_*$. Nel grafico sono illustrate le prime 3 iterazioni.

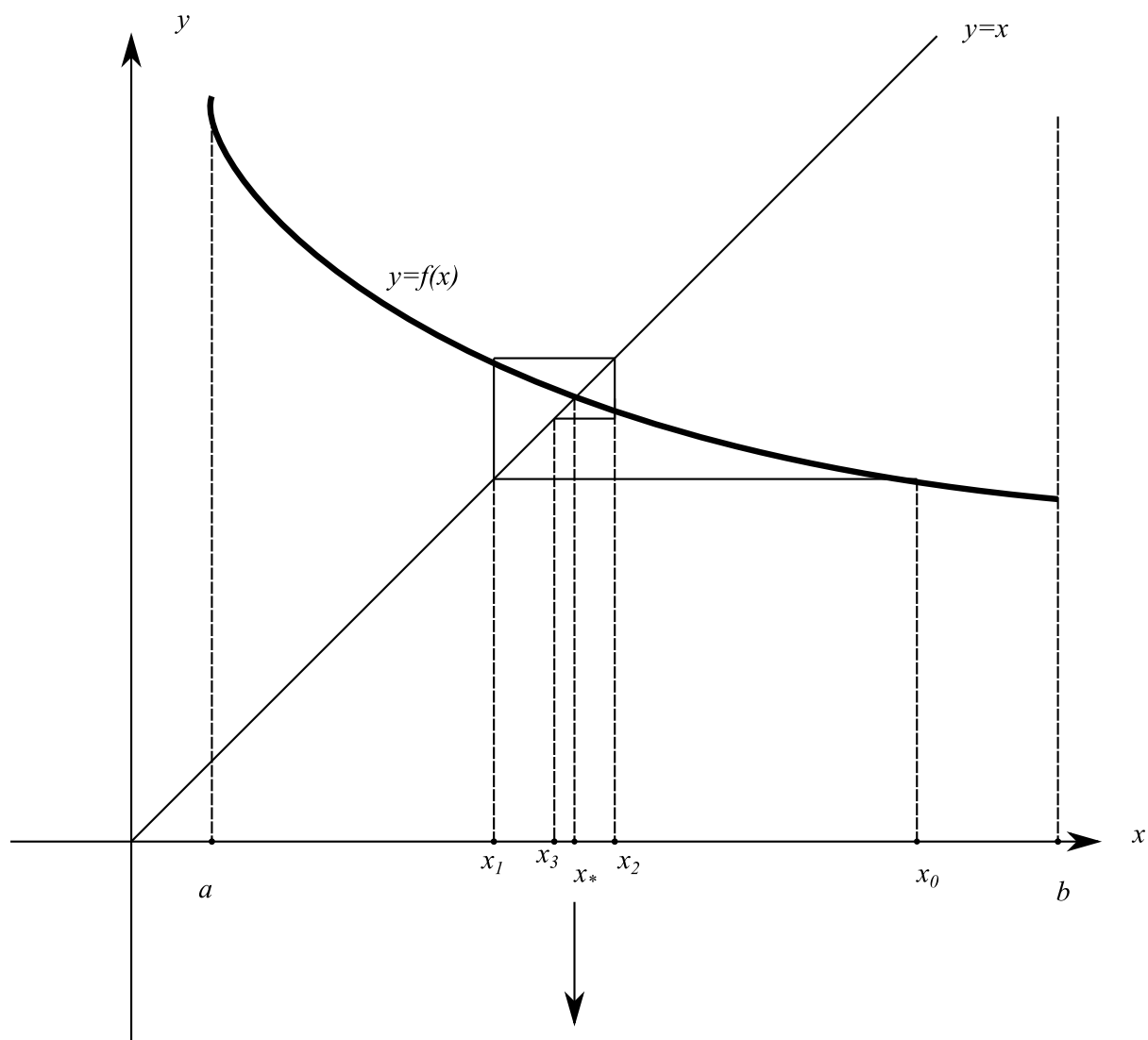


Figure 16: Assumiamo come punto iniziale dell'iterazione $x_0 > x_*$. Nel grafico sono illustrate le prime 2 iterazioni.

Risulta: $|f'(x)| = |\sin x| < 1, \forall x \in [0, 1)$ per cui la mappa f è una contrazione di $[0, 1)$. Ciò implica che l'equazione $\cos x = x$ è compatibile e determinata in $[0, 1)$. Assumiamo come punto di partenza $x_0 = 10^{-1}$ e utilizzando una routine di *Mathematica* [4], otteniamo il grafico di fig. 17, da cui vediamo che l'algoritmo converge rapidamente verso 0.73908.

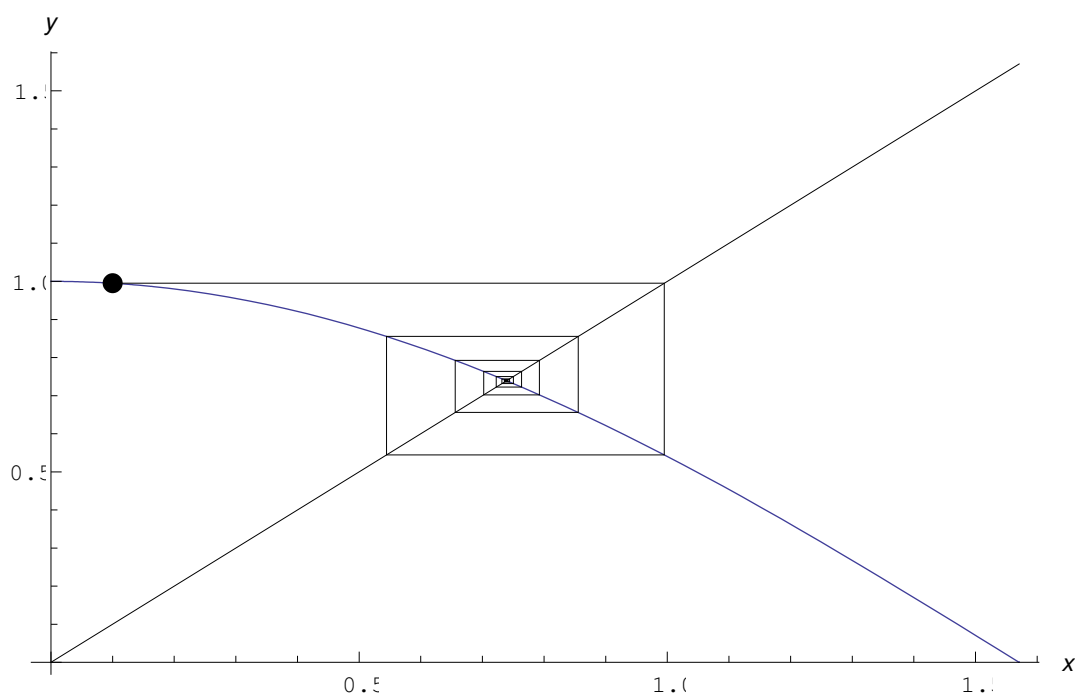


Figure 17: Diagramma delle orbite del sistema dinamico $S_f \doteq \{[0, 1], \cos x\}$ con punto iniziale $x_0 = 10^{-1}$. L'orbita converge verso il punto fisso $x_* \simeq 0.73908$.

Il teorema (27) assicura la convergenza dell'algoritmo iterativo anche nel caso di una contrazione locale. Ad esempio, consideriamo:

$$f : x \rightarrow x^2, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (75)$$

che per quanto detto, è una contrazione di $\left[0, \frac{1}{2}\right)$. Assumendo come punto iniziale $x_0 = 0.4$, otteniamo la convergenza indicata in fig. 18

Se la mappa $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ non è una contrazione, possono verificarsi due casi:

1. $r \cap \Gamma_{[a,b]} = \emptyset$
2. $r \cap \Gamma_{[a,b]} = \{x_*, x'_*\}$

Qui è $r : y = x$ e $\Gamma_{[a,b]} : y = f(x), \forall x \in [a, b]$. Cioè per una mappa f che non sia una contrazione l'equazione $f(x) = x$ può essere priva di soluzioni, o ammetterne più di una.

Esempio 32 *La mappa 1-dimensionale:*

$$f : x \rightarrow \left(\frac{2}{\pi^2}x + 1\right) |\sin 20x|, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

non è una contrazione di $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e possiede un numero finito di punti fissi, come si vede dal grafico di fig. 19.

Riprendiamo il caso della mappa (67). Per quanto detto non è una contrazione. Qui abbiamo i 2 punti fissi:

$$x_* = 0 \text{ e } x'_* = 1$$

Con l'ausilio di *Mathematica* possiamo vedere che il punto fisso x'_* è repulsivo, nel senso che per ogni punto iniziale $x_0 \in (x'_* - \delta, x'_*)$, la successione $\{x_n\}$ non converge a x'_* . Anzi, si allontana definitivamente da esso. Ad esempio, per $x_0 = 0.999$ otteniamo il diagramma delle orbite di fig. 20.

Più precisamente, abbiamo la seguente definizione:

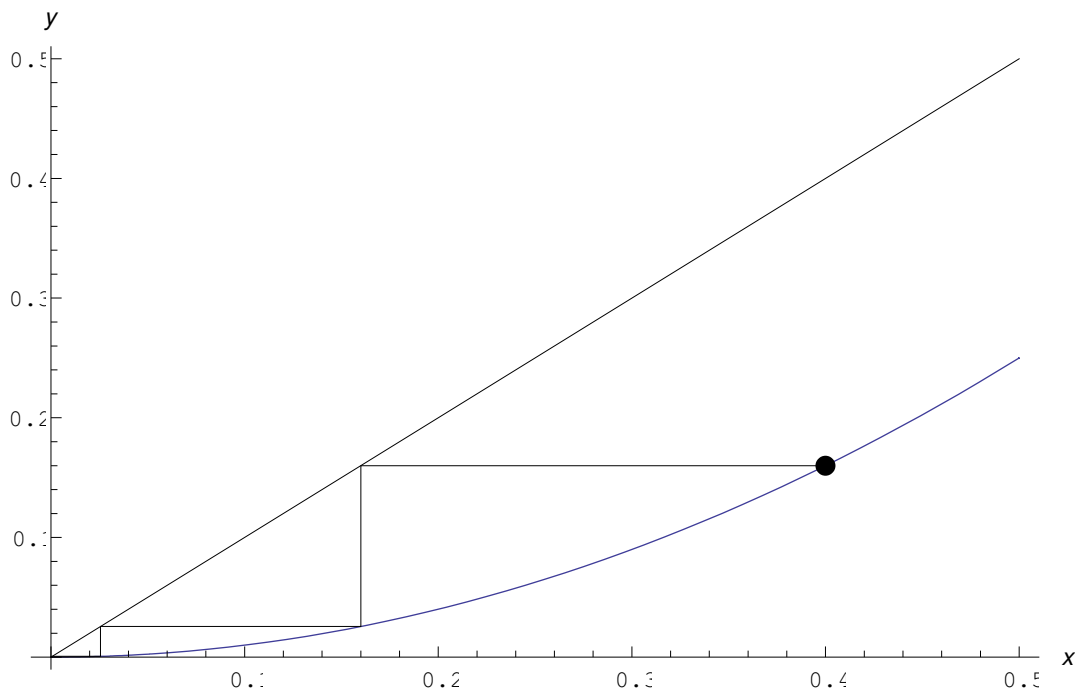


Figure 18: Diagramma delle orbite del sistema dinamico iterato $S_f^{(d)}$, dove f è data dalla (75). Il punto di partenza è $x_0 = 0.4$. L'orbita converge verso il punto fisso $x_* = 0$.

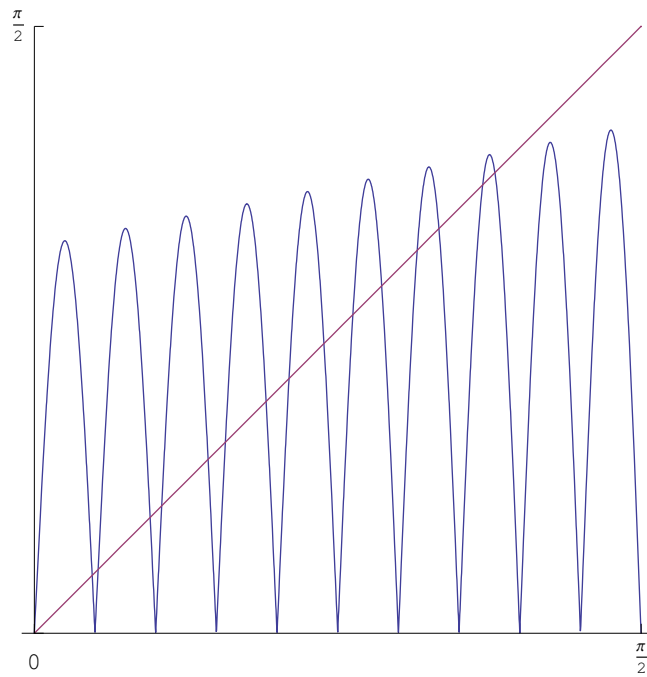


Figure 19: Intersezione della retta $r : y = x$ con il diagramma cartesiano $\Gamma_{[0, \frac{\pi}{2}]}$:
 $y = \left(\frac{2}{\pi^2}x + 1\right) |\sin 20x|$.

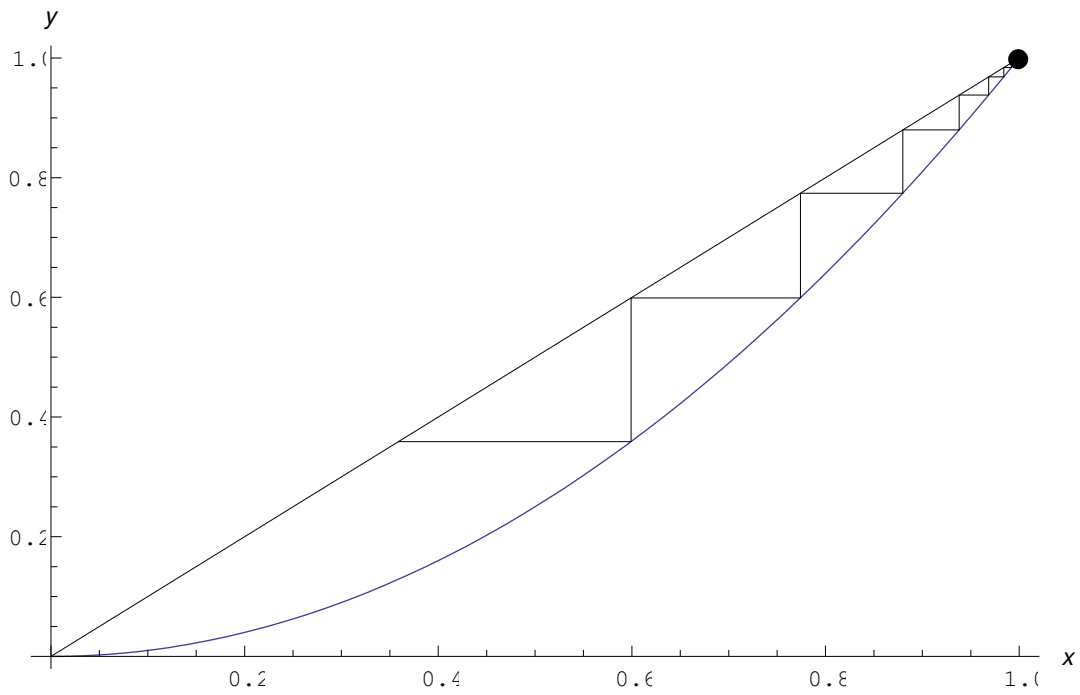


Figure 20: Diagramma delle orbite del sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} = \{[0, 1], x^2\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.999$.

Definizione 33 Il punto fisso x_* del sistema dinamico $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$ è **repulsivo**

se e solo se:

$$\exists I_\delta(x_*) = (x_* - \delta, x_* + \delta) \mid (x_0 \in I_\delta(x_*) \setminus \{x_*\}) \implies \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid f^n(x_0) \notin I_\delta(x_0)$$

essendo $x_n = f^n(x_0)$.

Dal teorema 27 segue il corollario:

Corollario 34 Sia $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una mappa 1-dimensionale. Se x_* è un punto fisso di $S_f^{(d)} = \{[a, b], f\}$, segue:

- x_* è un punto fisso attrattivo se $|f'(x_*)| < 1$
- x_* è un punto fisso repulsivo se $|f'(x_*)| > 1$

Conseguenza 35 Se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ è una contrazione di $[a, b]$, $S_f^{(d)}$ ha un unico punto fisso attrattivo x_* .

Per quanto visto, il paradigma dei sistemi dinamici a tempo discreto permette di integrare equazioni differenziali del tipo $\dot{x} = F(x)$. Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = \beta x, \tag{76}$$

dove $\beta > 0$ è un parametro adimensionale. Tale equazione regola l'evoluzione dinamica di $S_F^{(c)} \doteq \{x, \beta x\}$. L'integrale generale della (76) è:

$$x(t) = C e^{\beta t} \tag{77}$$

Per il teorema 15, al sistema $S_F^{(c)}$ corrisponde il sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{X, f(x)\}$, dove:

$$f(x) = F(x) + x, \quad \forall x \in X \subseteq \mathbb{R}$$

Cioè:

$$f(x) = (\beta + 1)x, \quad \forall x \in X$$

che è la trasformazione lineare di X in sé. È manifestamente $|f'(x)| = \beta + 1 > 1$, onde f non è una contrazione. L'unico punto fisso del sistema è $x_* = 0$. Si tratta di un punto fisso repulsivo. Il diagramma delle orbite del sistema $S_f^{(d)}$ è riportato in fig 21. Il sistema dinamico $S_f \doteq \{X, (1 + \beta)x\}$ ci permette di determinare il valore

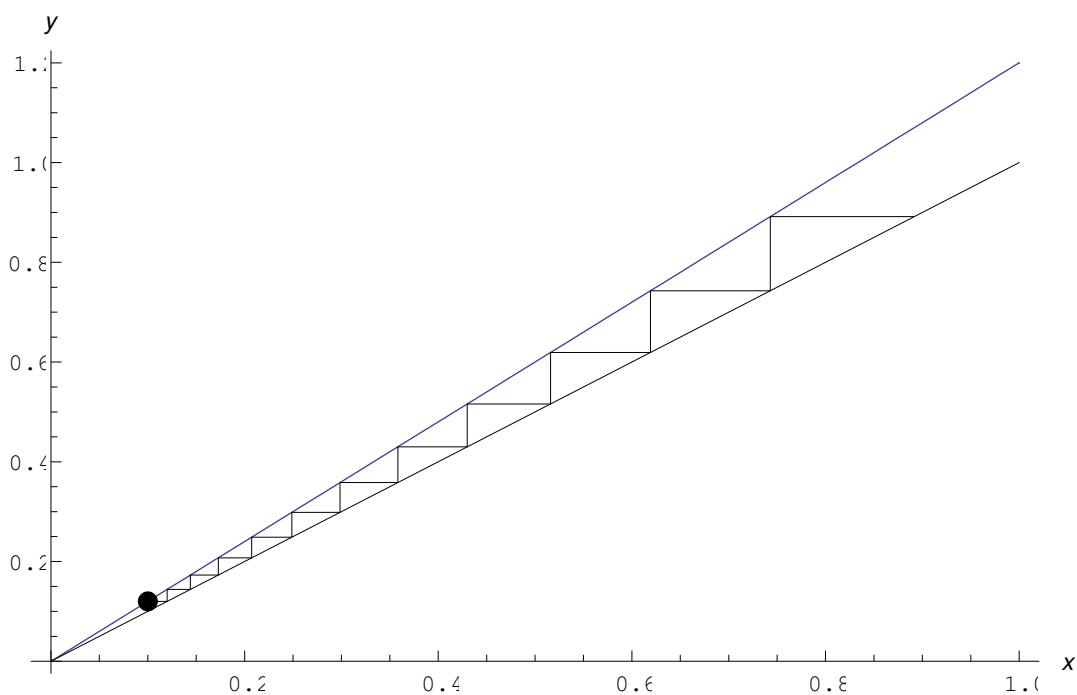


Figure 21: Diagramma delle orbite di $S_f^{(d)} \doteq \{x, (1 + \beta)x\}$ per $\beta = 2 \cdot 10^{-1}$. Il punto iniziale è $x_0 = 0.2$.

della grandezza x ai vari istanti di tempo t_n . Nei casi più semplici, ciò non offre alcun vantaggio, poichè in questi casi integriamo direttamente l'equazione differen-

ziale $\dot{x} = F(x)$ che, appunto, ci fornirà l'andamento di x a tutti i tempi. Tuttavia, tale paradigma offre uno strumento di calcolo alternativo a quello delle equazioni differenziali quando quest'ultimo fallisce. Più precisamente, un'equazione differenziale del tipo $\dot{x} = F(x)$ si integra per separazioni di variabili:

$$\frac{dx}{F(x)} = dt \quad (78)$$

Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{dx}{F(x)} = t + C, \quad (79)$$

dove C è una costante di integrazione. Pertanto, siamo in grado di integrare la (79) solo nel caso in cui il primo membro della (79) è dotato di espressione elementare.

Precisamente, se:

$$G(x) = \int \frac{dx}{F(x)},$$

e se $G(x)$ è invertibile, si ha:

$$x = G^{-1}(t)$$

Ad esempio, l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = \cos x,$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$, si integra immediatamente:

$$x(t) = \arctan(t + \tan x_0) \quad (80)$$

Il grafico di $x(t)$ è riportato in fig. 22.

Vediamo dunque che la soluzione $x(t)$ tende asintoticamente al valore $\pi/2$. Abbiamo dunque un sistema dinamico a tempo continuo $S_F^{(c)} \doteq \{x, \cos x\}$, il cui stato $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ha l'andamento del grafico di fig. 22. Passiamo ora al sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{[0, \frac{\pi}{2}), f(x)\}$, con $f(x) = F(x) + x = x + \cos x$, il cui grafico è riportato in fig. 23. Dallo studio della derivata prima vediamo che $|f'(x)| < 1, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, per cui f è una contrazione di $[0, \frac{\pi}{2})$. L'unica soluzione di $f(x) = x$ è $x_* = \frac{\pi}{2}$. Risulta $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$, per cui il corollario 34 non ci

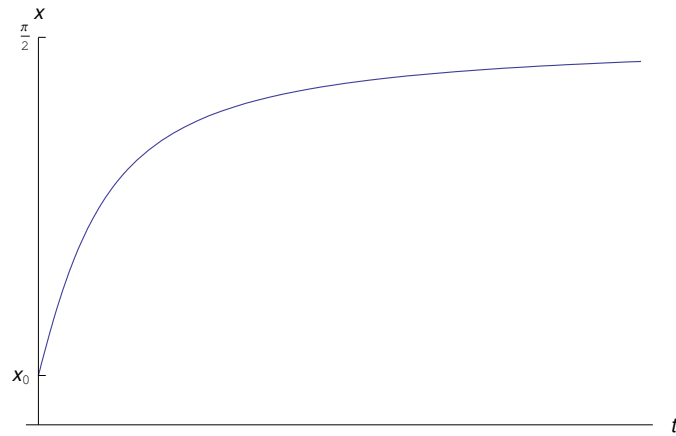


Figure 22: Andamento della soluzione di $\frac{dx}{dt} = \cos x$, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$.

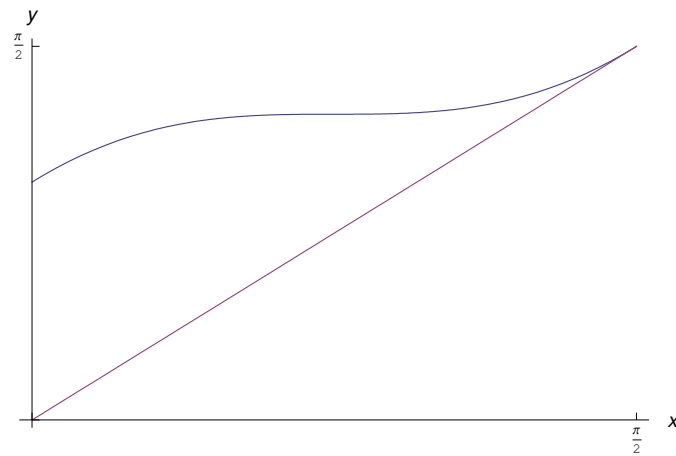


Figure 23: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = x + \cos x$.

dice nulla sulla natura di tale punto attrattivo (cioè se è attrattivo o repulsivo). Tuttavia utilizzando Mathematica, vediamo che si tratta di un punto attrattivo, come illustrato nel diagramma delle orbite riportato in fig. 24.

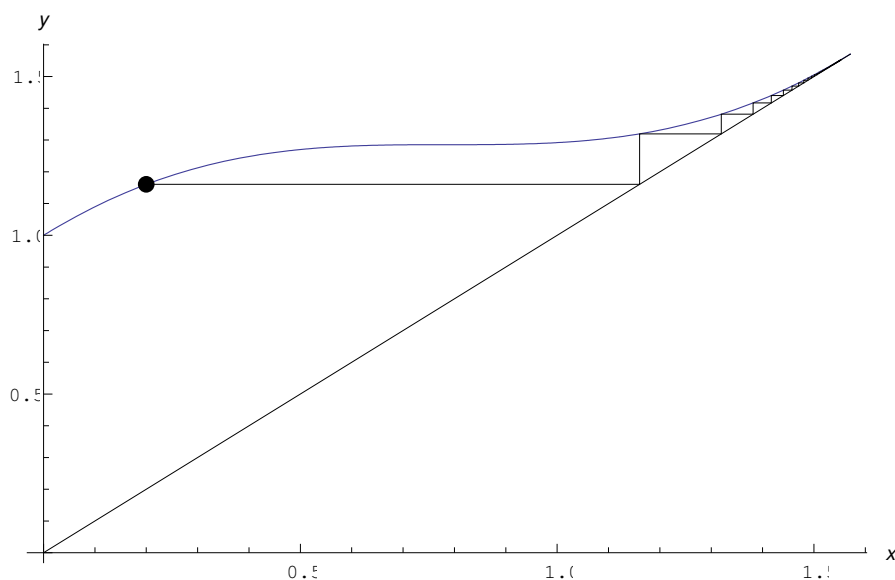


Figure 24: Diagramma delle orbite del sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{ [0, \frac{\pi}{2}), x + \cos x \}$ con punto iniziale $x_0 = 0.2$. Dopo 50 iterazioni, l'orbita converge al punto fisso $x_* = \frac{\pi}{2}$.

Da tale diagramma vediamo che assumendo come punto iniziale $x_0 = 0.2$, l'orbita converge verso il punto fisso $x_* = \frac{\pi}{2}$. Nel diagramma sono state eseguite 50 iterazioni, ma è ovvio che la convergenza avviene dopo un numero infinito di iterazioni. Vediamo dunque la perfetta equivalenza tra i due procedimenti. Nel primo, si integra l'equazione differenziale e si traccia il grafico della soluzione $x(t)$,

ove vediamo che lo stato del sistema tende asintoticamente a $\frac{\pi}{2}$. Nel secondo, invece, l'algoritmo ci fornisce i valori x_n al passo n -esimo, ovvero all'istante t_n . E per $n \rightarrow +\infty$, lo stato del sistema converge a $\frac{\pi}{2}$.

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}x - \sin x^{10} \quad (81)$$

Tale equazione non può essere integrata in forma chiusa, poichè non esiste un'espressione elementare dell'integrale:

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{3}x - \sin x^{10}}$$

Passiamo dunque al sistema discreto $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$, dove:

$$f(x) = F(x) + x = \frac{4}{3}x - \sin x^{10},$$

assumendo $X = [0, 1]$. Il grafico della funzione di trasferimento è riportato in fig. 25. Dallo studio della derivata prima, vediamo che f non è una contrazione di $[0, 1]$.

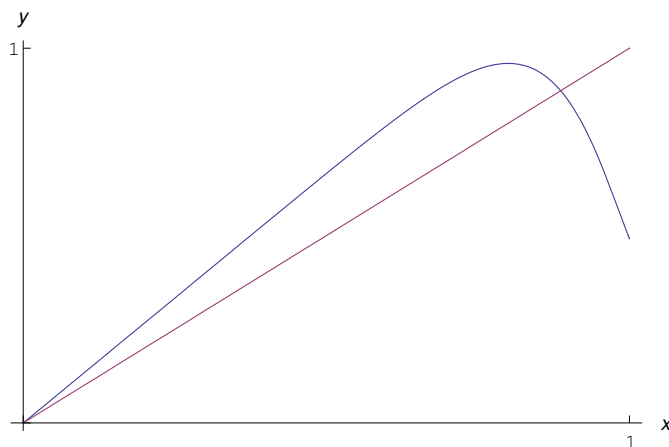


Figure 25: Diagramma cartesiano della funzione di trasferimento $f(x) = \frac{4}{3}x - \sin x^{10}$.

L'equazione $f(x) = x$ ammette 2 soluzioni: $x_*, x'_* = 0$. La prima si ricava per via numerica, ottenendo $x_* \simeq 0.89$. Inoltre, $|f'(x_*)| > 1$, per cui si tratta di un punto fisso repulsivo. Il diagramma delle orbite di $S_f^{(d)}$ è in fig. 26.

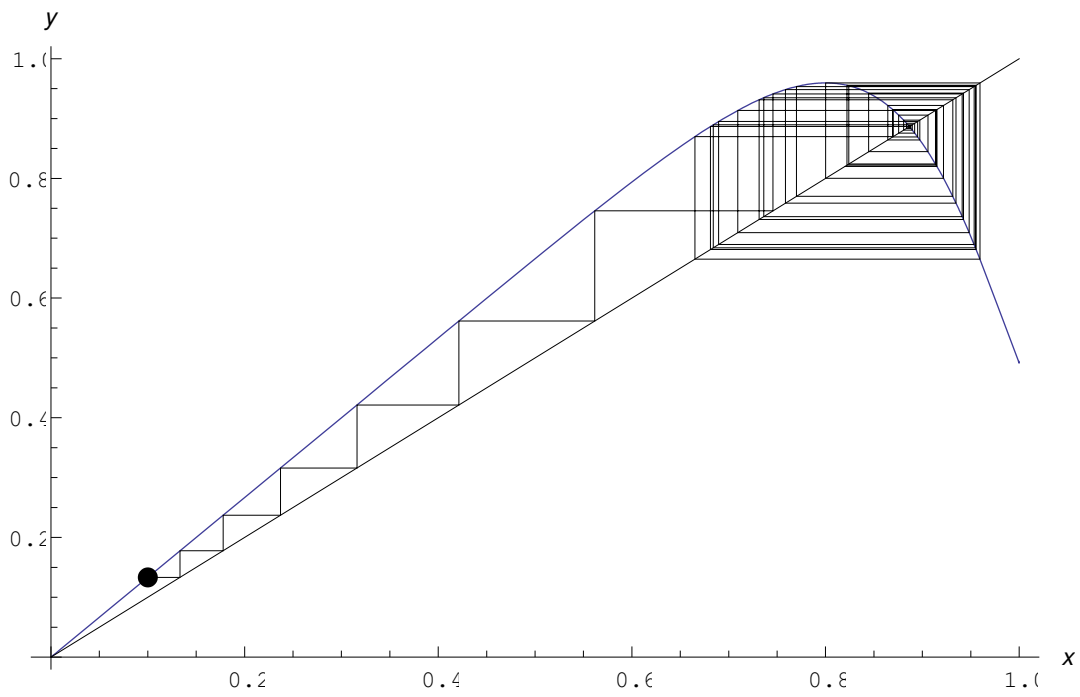


Figure 26: Diagramma delle orbite di $S_f^{(d)} \doteq \{[0, 1], \frac{4}{3}x - \sin x^{10}\}$. Il punto iniziale è $x_0 = 0.1$.

Il diagramma delle orbite di $S_f^{(d)} \doteq \{[0, 1], \frac{4}{3}x - \sin x^{10}\}$ è estremamente complesso, in quanto dotato di periodicità, il cui significato verrà compreso appieno nella sezione successiva.

Conseguenza 36 *Quando non è possibile trovare una soluzione in forma chiusa di un'equazione differenziale non lineare, si cerca di linearizzare l'equazione con un opportuno sviluppo in serie. Alternativamente, se l'equazione è della forma $\dot{x} = F(x)$, il paradigma dei sistemi dinamici iterati, permette di risolvere il problema posto.*

5.2 Punti periodici

Consideriamo un sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} = \{X, f\}$. Abbiamo visto che se f è una contrazione, comunque prendiamo $x_0 \in X$, la successione $\{x_n = f^n(x_0)\}$ converge all'unico punto fisso x_* radice dell'equazione $f(x) = x$. Di contro, se f non è una contrazione, possono esserci punti fissi repulsivi, cioè tali che $|f'(x_*)| > 1$. Ciò premesso, assegnata una generica trasformazione f , sussiste la seguente definizione:

Definizione 37 *Definizione di punto periodico*

Il punto fisso repulsivo $x_* \in X$ è un **punto periodico** per $S_f^{(d)}$ $\iff (\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid f^k(x_*) = x_*)$
L'intero naturale k si chiama *periodo* del punto x_* .

Osservazione 38 $x_* \in X$ è *periodico di periodo k* \implies $(x_*$ è *periodico di periodo k* , $\forall k' > k$)
Tale proprietà segue direttamente dalla definizione di punto periodico, poichè:

$$f^k(x_*) = x_* \implies f^{k'}(x_*) = x_*, \forall k' > k \quad (82)$$

Osservazione 39 *Ogni punto fisso attrattivo è un punto periodico di periodo unitario.*

Proposizione 40

$$\left. \begin{array}{l} x_* \in X \text{ è punto periodico di periodo } k \\ \text{per } S_f^{(d)} = \{X, f\} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} x_* \text{ è punto fisso} \\ \text{per } S_{f^k}^{(d)} = \{X, f^k\} \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla definizione di punto periodico. ■

Esempio 41 Consideriamo il sistema dinamico $S_f^{(d)} = \{\mathbb{R}, f\}$ con $f(x) = -x$. Per tale sistema $x = 0$ è l'unico punto fisso (repulsivo). Per la proposizione precedente, segue che $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è punto periodico di periodo 2. Infatti, risulta: $S_{f^2}^{(d)} = \{\mathbb{R}, f^2\}$ con $f^2(x) = f(f(x)) = f(-x) = x$. Nelle fig. 27-28 il diagramma delle orbite disegnato a mano, e poi tracciato con *Mathematica*.

Da tale esempio, vediamo che il sistema *oscilla* tra i punti x_0 e $-x_0$. Più precisamente, assegnato ad arbitrio $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ risulta:

$$x_n = f^n(x_0) = \begin{cases} -x_0, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ x_0, & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad (83)$$

Cioè $\{x_n\}$ è oscillante, per cui $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\}$.

Questa è una proprietà generale, nel senso che dato un punto periodico x_* di periodo 2, la successione $\{x_n\}$ - i.e. lo stato del sistema - oscilla tra una coppia di punti \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Per un punto periodico di periodo k , la successione $\{x_n\}$ oscilla tra k punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$.

Conseguenza 42

$$x_* \text{ è un punto periodico} \implies \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

6 Trasformazione quadratica (mappa logistica)

Riprendiamo l'equazione (25) che per $\Delta = 1$ è la funzione di trasferimento del sistema $S_f^{(d)} \doteq \{[0, 1], f\}$, con

$$f(x) = -\alpha x^2 + \alpha x, \quad (84)$$

dove $\alpha = \beta_H + 1 > 1$.

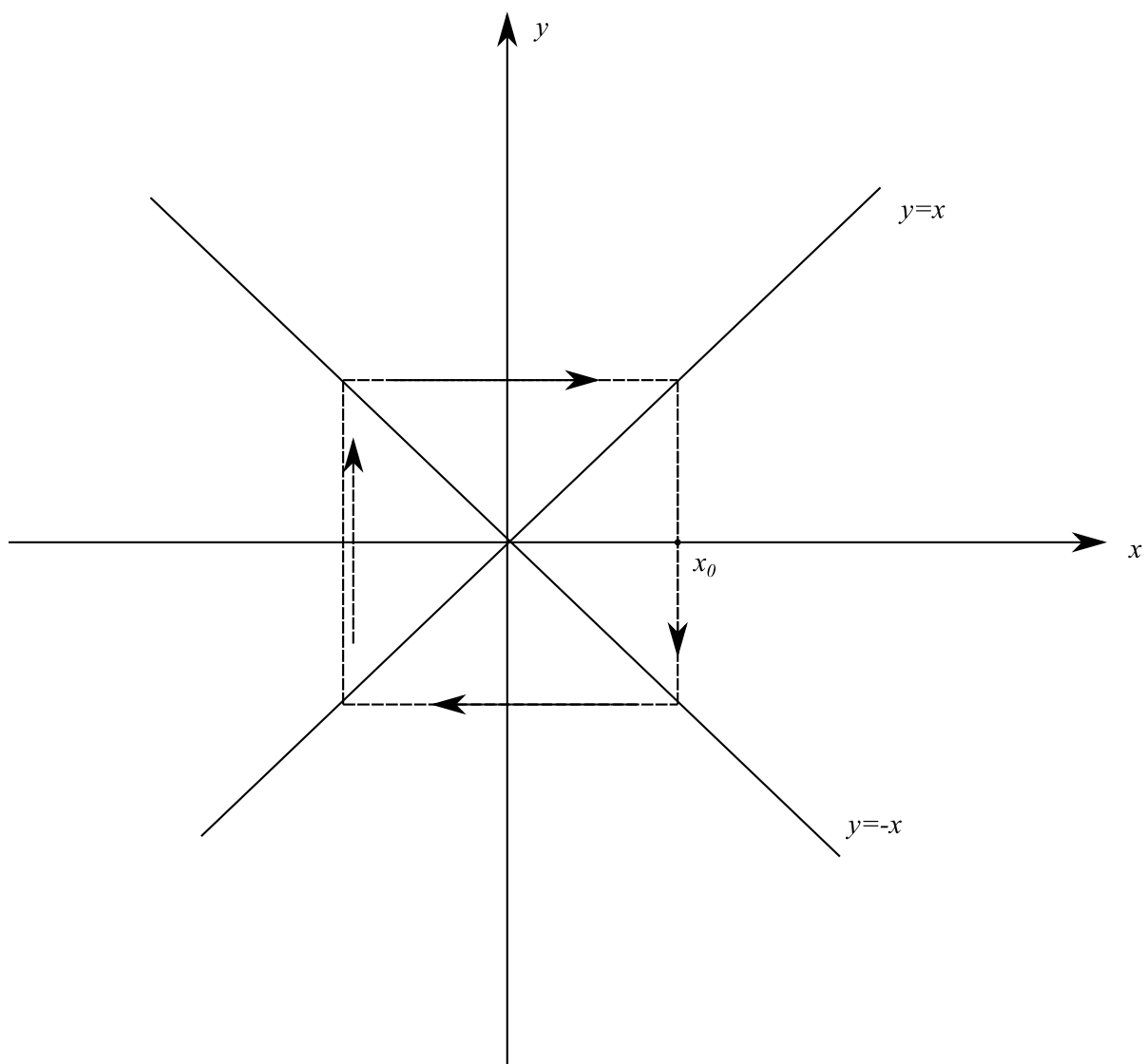


Figure 27: Diagramma delle orbite di $S_f^{(d)} = \{\mathbb{R}, -x\}$ con punto iniziale un arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}$.

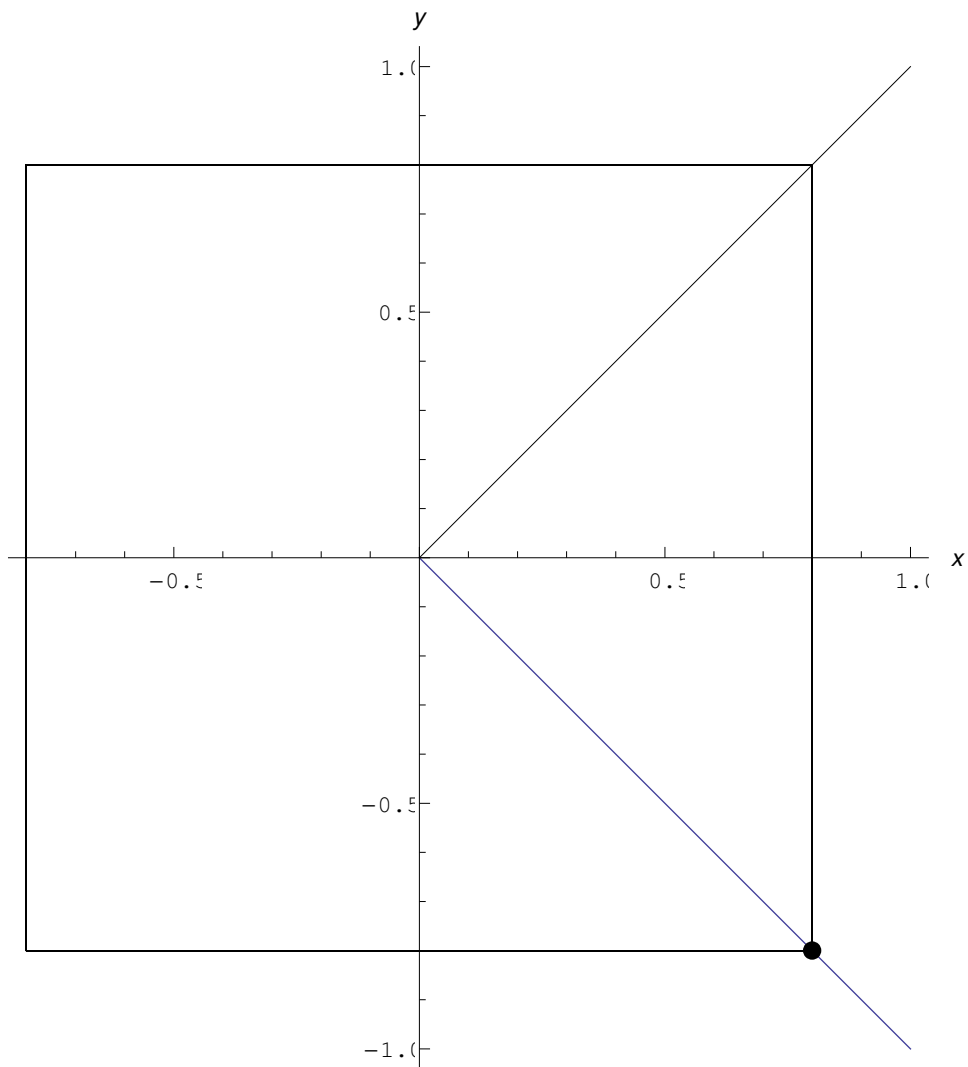


Figure 28: Diagramma delle orbite del sistema precedente tracciato con Mathematica.

6.1 Tracciamento del grafico

Nel piano cartesiano Oxy la (84) è l'equazione di una parabola passante per $(0, 0)$, $(0, 1)$ e che volge la concavità verso il basso. Il punto critico è tale che:

$$f'(x) = 0 \iff \alpha(1 - 2x) = 0 \iff x = \frac{1}{2},$$

ed è un punto di massimo assoluto per la funzione. Notiamo che è indipendente da α , mentre $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{4}$. Quindi, detto M il massimo assoluto di f , si ha $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{4}\right)$. Il grafico è riportato in fig. 29.

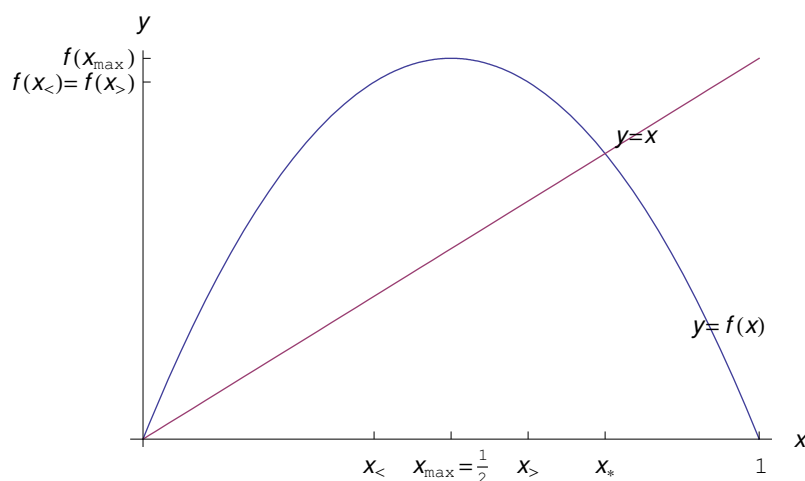


Figure 29: Diagramma cartesiano della restrizione della funzione $f(x) = -\alpha x^2 + \alpha x$ all'intervallo $[0, 1]$.

6.2 Studio dei punti fissi

Le radici dell'equazione $f(x) = x$ sono:

$$x_* = 1 - \frac{1}{\alpha}, \quad x'_* = 0 \tag{85}$$

Si noti che per $\alpha > 1$, è $x_* \neq x'_*$. Cioè per $\alpha > 1$ esistono dunque 2 punti fissi. Infatti per tali valori di α , f non è una contrazione di $[0, 1]$. Per mostrare ciò,

risolviamo la disequazione:

$$|f'(x)| < 1,$$

equivalente a:

$$|1 - 2x| < \frac{1}{\alpha} \quad (86)$$

Per quanto detto, è $\alpha > 1$. Vale la pena comunque, assumere $\alpha \geq 1$. Iniziamo con $\alpha > 1$. La (86) si risolve facilmente per via grafica, come vediamo in fig. 30.

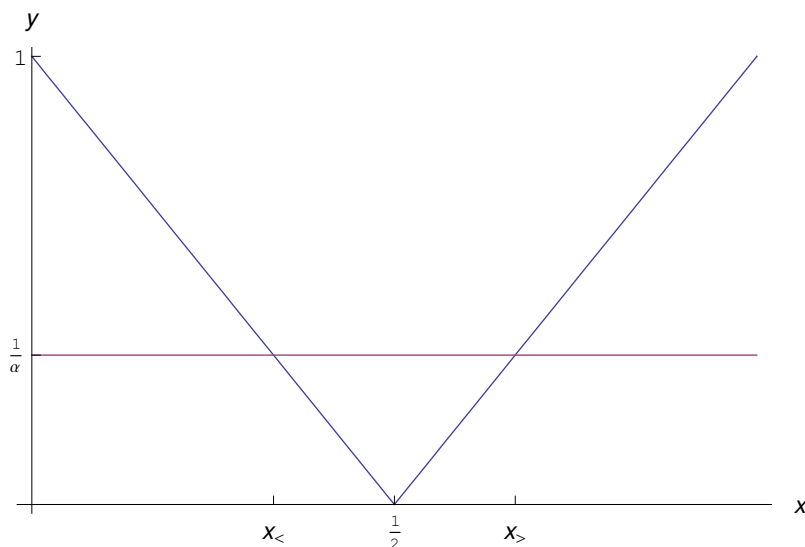


Figure 30: Risoluzione della disequazione $|1 - 2x| < \frac{1}{\alpha}$.

Otteniamo:

$$|f'(x)| < 1 \iff x \in (x_<, x_>),$$

dove:

$$x_< = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{x_*}{2} < \frac{1}{2}, \quad x_> = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) > \frac{1}{2} \quad (87)$$

Da ciò segue che f è una contrazione dell'intervallo $(x_<, x_>)$.

Conseguenza 43 *In base alla definizione 30, la trasformazione quadratica è una contrazione locale.*

Osserviamo che le (87) includono il caso $\alpha = 1$. Per tale valore di α , si ha $(x_<, x_>) = (0, 1)$, per cui $f(x) = -x^2 + x$ è una contrazione di $(0, 1)$. Rimangono esclusi i punti $x = 0$ e $x = 1$. Inoltre, per $\alpha = 1$, l'unico punto fisso è $x_* = 0$, come si evince dal grafico di fig. 31.

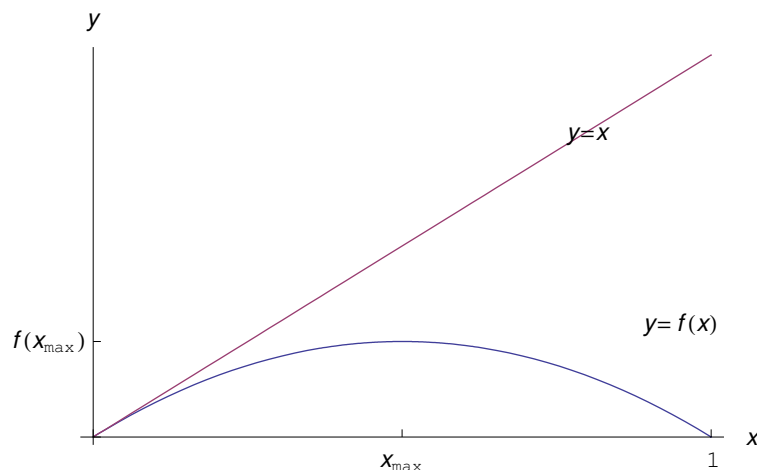


Figure 31: La trasformazione quadratica per $\alpha = 1$ ha come unico punto fisso $x_* = 0$.

Risulta $f'(0) = 1$, per cui il corollario (31) non ci dice nulla sulla reale natura (attrattiva o repulsiva) del punto fisso $x_* = 0$. Tracciamo dunque i diagrammi delle orbite con *Mathematica*, per diversi punti iniziali. In fig. (32) è riportato il diagramma delle orbite con $x_0 = 0.1$ e per un numero di iterazioni pari a 20, per cui viene determinato il punto $x_{20} = f^{20}(0.1)$. L'orbita converge verso il punto fisso $x_* = 0$. In fig. (33) riportiamo il diagramma delle orbite con $x_0 = 0.8$ e per un numero di iterazioni pari a 20. Anche in questo caso l'orbita converge verso $x_* = 0$. Ne concludiamo che si tratta di un punto fisso attrattivo.

Per $\alpha > 1$ è, invece, $f'(0) = \alpha > 1$ per cui $x_* = 0$ è un punto fisso repulsivo. Più specificatamente, abbiamo:

$$x_0 = 0 \implies f(x_0) = 0 \implies f^n(x_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cioè per $x_0 = 0$, la successione $\{x_n\}$ è la successione identicamente nulla. Per-

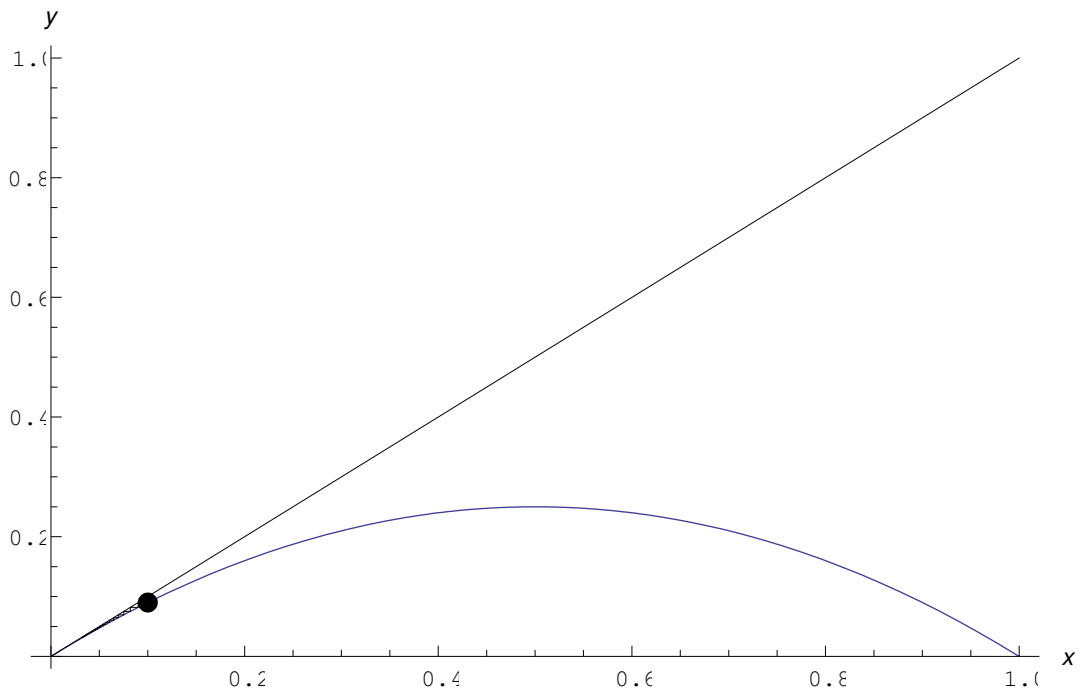


Figure 32: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -x^2 + x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

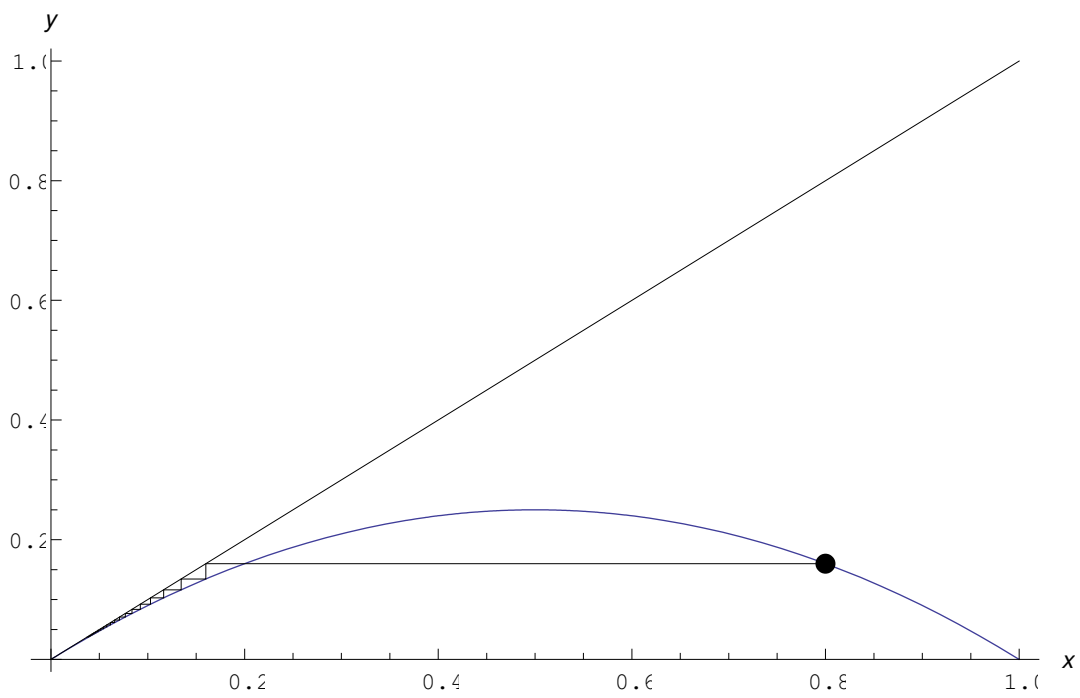


Figure 33: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -x^2 + x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.8$.

tanto il diagramma delle orbite si riduce al punto $(0,0)$, avendosi banalmente $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Un punto notevole è $x = 1$, zero non nullo di f . Assumendo come punto iniziale $x_0 = 1$, si ha $f(1) = 0$ e quindi $f^n(1) = 0$, per cui la successione $\{x_n\}$ è la successione:

$$x_0 = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0$$

Il corrispondente diagramma delle orbite converge al punto fisso 0 alla prima iterazione.

Esaminiamo ora il comportamento di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per specifici valori di $\alpha > 1$.

6.2.1 Punti fissi per $\alpha = \frac{3}{2}$

In questo caso è

$$x_* = \frac{1}{3}, x_< = \frac{1}{6}, x_> = \frac{5}{6}$$

Il grafico è in fig. 34.

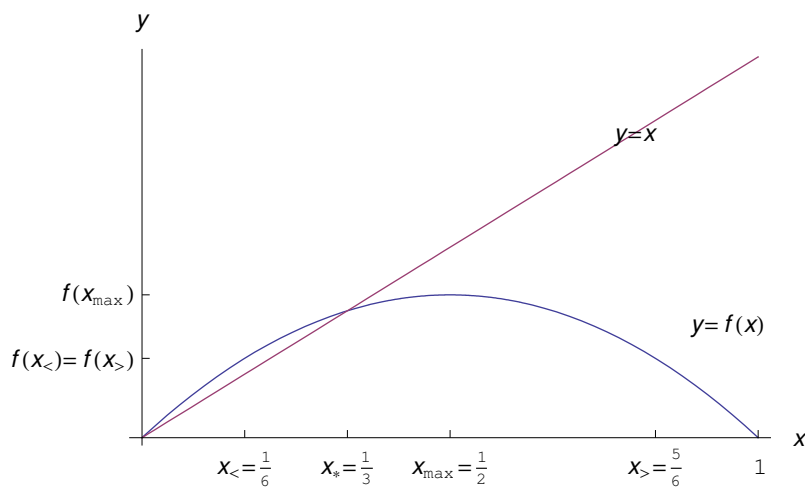


Figure 34: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = -\alpha x^2 + \alpha x$ per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Quindi, abbiamo il punto fisso non nullo è $x_* \in (x_<, x_>)$ e come tale è attrattivo.

In altri termini, ogni successione $\{x_n\}$ converge verso x_* . Più precisamente:

$$\forall x_0 \in (0, 1), \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = \frac{1}{3}$$

Ad esempio, assumendo $x_0 = 10^{-2}$, dopo 20 iterazioni otteniamo il diagramma delle orbite illustrato in fig. 35.

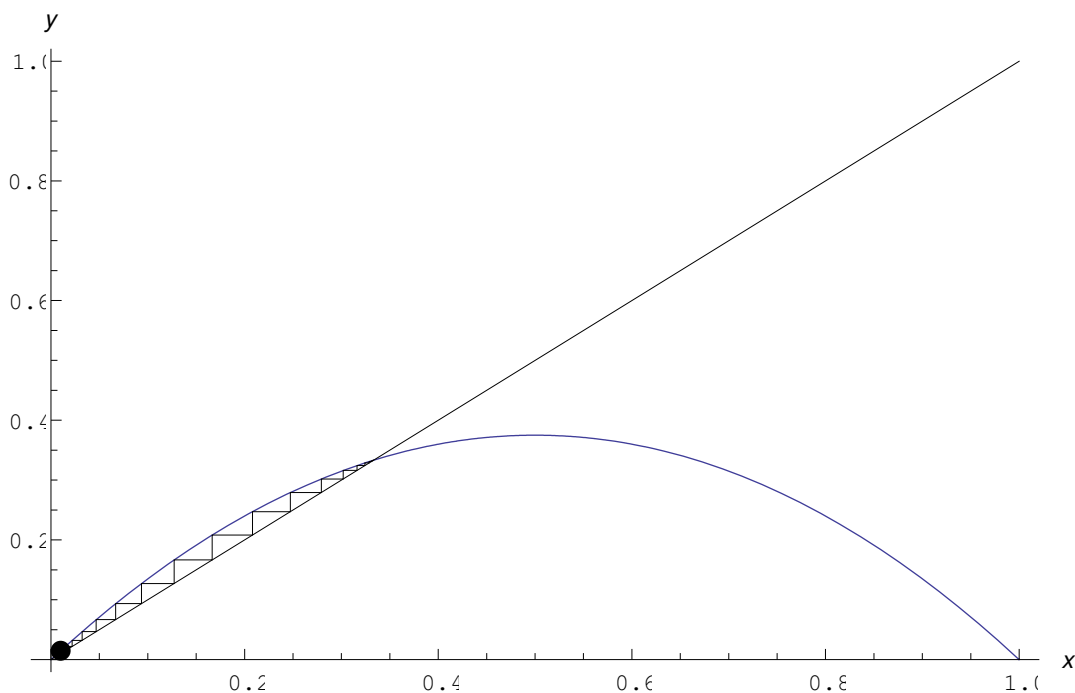


Figure 35: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = \frac{3}{2}$ con punto iniziale $x_0 = 10^{-2}$.

Assumendo $x_0 = 0.9$, otteniamo il diagramma di fig. 36.

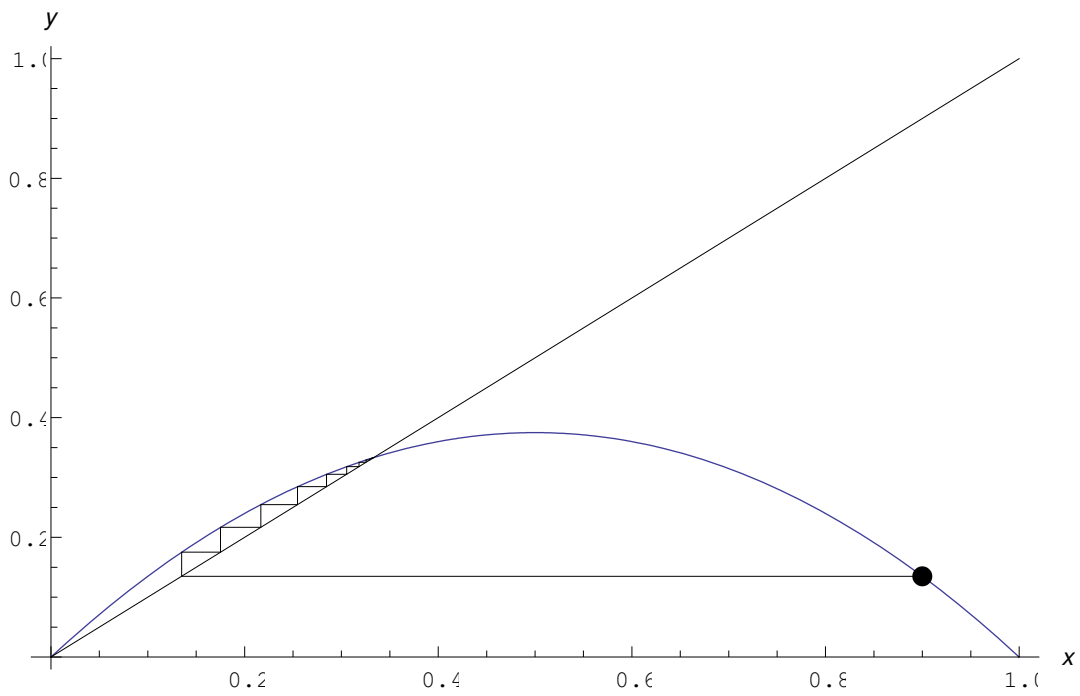


Figure 36: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = \frac{3}{2}$ con punto iniziale $x_0 = 0.9$.

Il punto $x'_* = 0$ è repulsivo. Inoltre, per quanto discusso in precedenza, assumendo come punto iniziale $x_0 = 1$, l'orbita converge a x'_* alla prima iterazione, come possiamo vedere dal grafico di fig. 37.

6.2.2 Punti fissi per $\alpha = 2$

In questo caso è

$$x_* = \frac{1}{2} = x_{\max}, \quad x_{<} = \frac{1}{4}, \quad x_{>} = \frac{3}{4}$$

Il grafico è in fig. 38.

Anche qui abbiamo il punto fisso non nullo $x_* \in (x_{<}, x_{>})$, ovvero punto fisso attrattivo. Assumendo $x_0 = 10^{-1}$, dopo 20 iterazioni otteniamo il diagramma delle orbite illustrato in fig. 39.

In fig. 40 riportiamo il diagramma delle orbite per $x_0 = 0.9$.

6.2.3 Punti fissi per $\alpha = 3.3$

In questo caso è

$$x_* = \frac{23}{33} = 0.\overline{69}, \quad x_{<} = \frac{23}{66}, \quad x_{>} = \frac{43}{66}$$

Il grafico è in fig. 41.

Qui abbiamo il punto fisso non nullo $x_* \notin (x_{<}, x_{>})$, ovvero un punto fisso repulsivo. Assumendo $x_0 = 0.2$, dopo 20 iterazioni otteniamo il diagramma delle orbite illustrato in fig. 42.

Dal diagramma di fig. 42 vediamo che $x_* = \frac{23}{33}$ è un punto periodico di periodo 2. Utilizzando il comando `NestList` di `Mathematica`, otteniamo i valori iterati riportati nella tabella 1, da cui vediamo l'andamento della successione $\{x_n\}$ con $x_n = f(x_{n-1})$. Qui è $n = 0, \dots, 20$. Dunque, assumendo $x_0 = 0.2$, la successione $\{x_n\}$ oscilla tra $\bar{x}_1 = 0.479427$ e $\bar{x}_2 = 0.823603$.

Assumendo $x_0 = 0.9$, otteniamo il diagramma di fig. 43, da cui emerge nuovamente la periodicità del punto $x_* = \frac{23}{33}$.

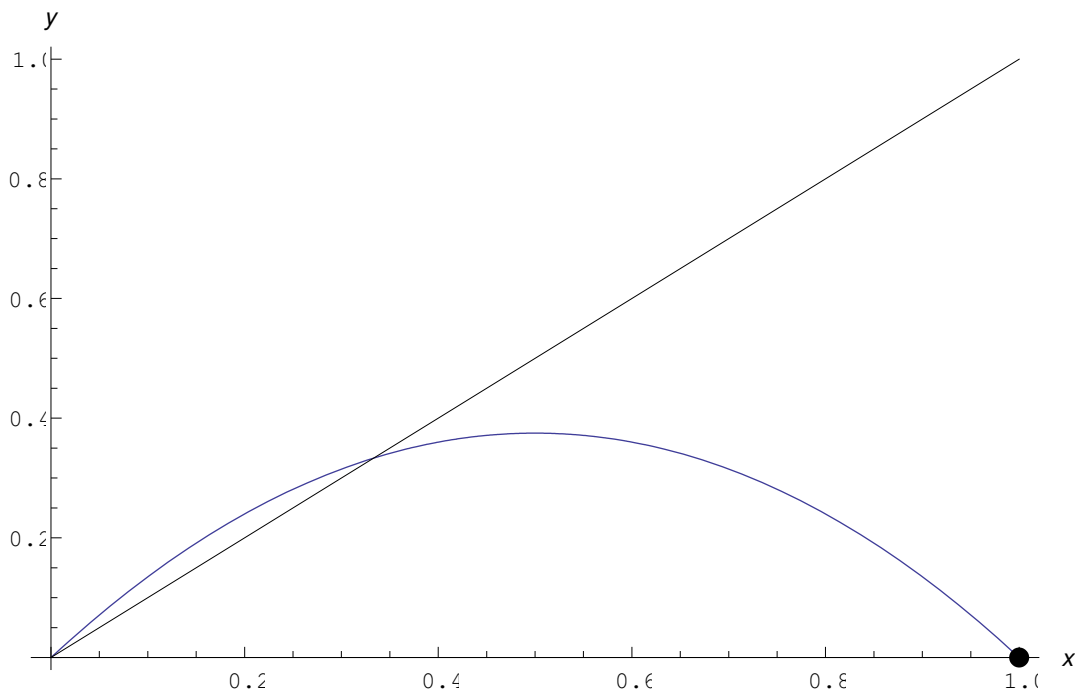


Figure 37: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = \frac{3}{2}$ con punto iniziale $x_0 = 1$. L'orbita converge a $x'_* = 0$ alla prima iterazione.

n	$f^n(x)$
0	0.200000
1	0.528000
2	0.822413
3	0.481965
4	0.823927
5	0.478736
6	0.823508
7	0.479631
8	0.823631
9	0.479368
10	0.823595
11	0.479444
12	0.823606
13	0.479422
14	0.823603
15	0.479428
16	0.823603
17	0.479427
18	0.823603
19	0.479427
20	0.823603

Table 1: La successione $\{x_n\}$ con $x_n = f(x_{n-1})$, essendo $f(x) = -3.3x^2 + 3.3x$. Qui è $n = 0, \dots, 20$. Dalla tabella vediamo che assumendo $x_0 = 0.2$, la successione $\{x_n\}$ oscilla tra 0.479427 e 0.823603.

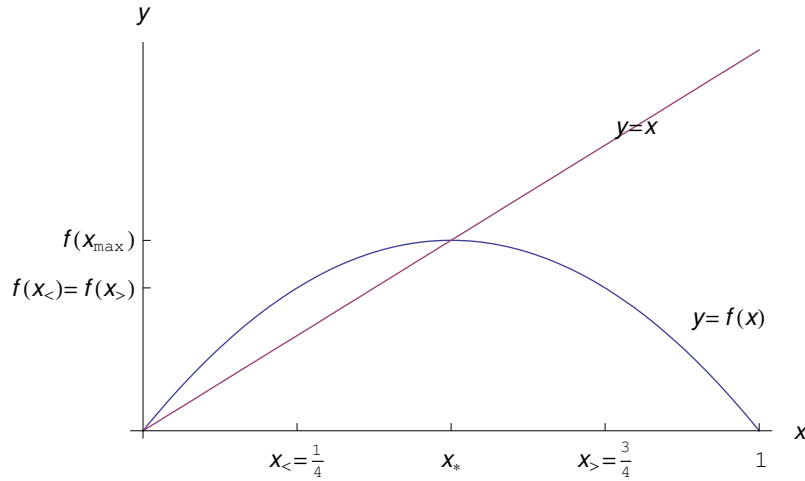


Figure 38: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = -2x^2 + 2x$.

La periodicit  dei punti pu  essere studiata attraverso la proposizione 40. A tale scopo chiamiamo $g(x)$ la composizione di ordine 2 della funzione f :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(f(x)) \\ &= -\frac{1089}{1000} (33x^3 - 66x^2 + 43x - 10), \end{aligned}$$

il cui grafico   riportato in fig. 44. Da qui vediamo l'esistenza di 3 punti fissi, ottenuti risolvendo $g(x) = x$:

$$\bar{x}_* = \frac{1}{66} (43 - \sqrt{129}), \quad \bar{x}'_* = \frac{23}{33} = x_*, \quad \bar{x}''_* = \frac{1}{66} (43 + \sqrt{129})$$

Risulta $|g'(x_*)| < 1$, onde x_*   punto fisso attrattivo per g . Da ci  segue che   un punto periodico di periodo 2 per la funzione f .

Proviamo a determinare l'immagine inversa del punto fisso x_* , ci :

$$x_*^{(-1)} = f^{-1}(x_*)$$

Utilizzando il comando **Solve** di **Mathematica**, otteniamo:

$$x_*^{(-1)} = \frac{10}{33}$$

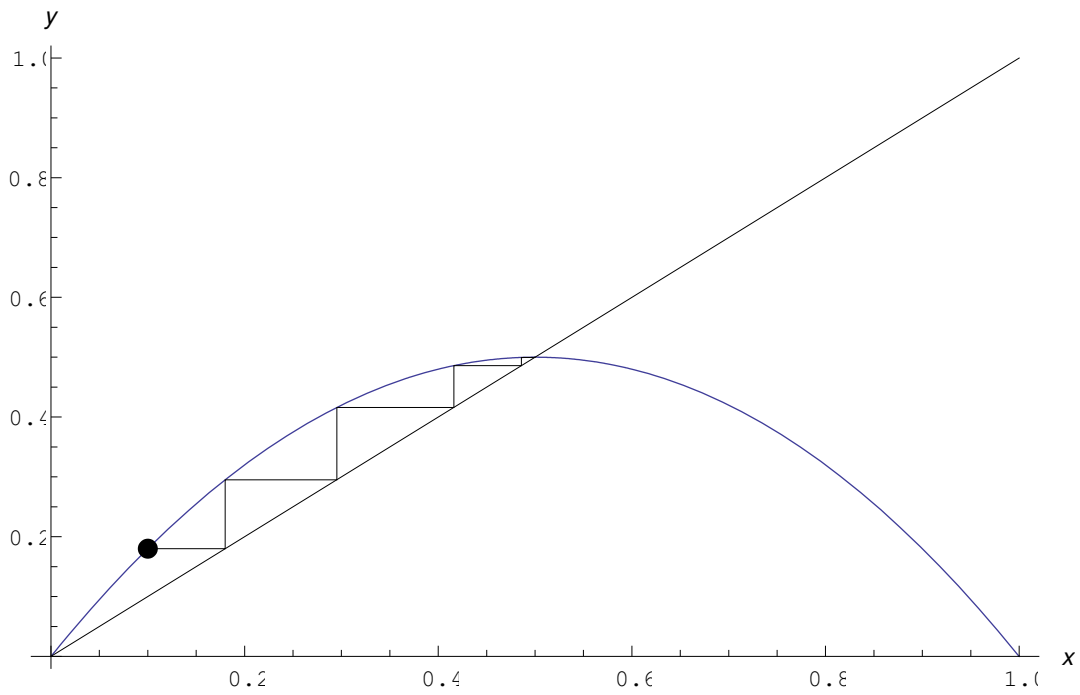


Figure 39: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f = \{[0, 1], -2x^2 + 2x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

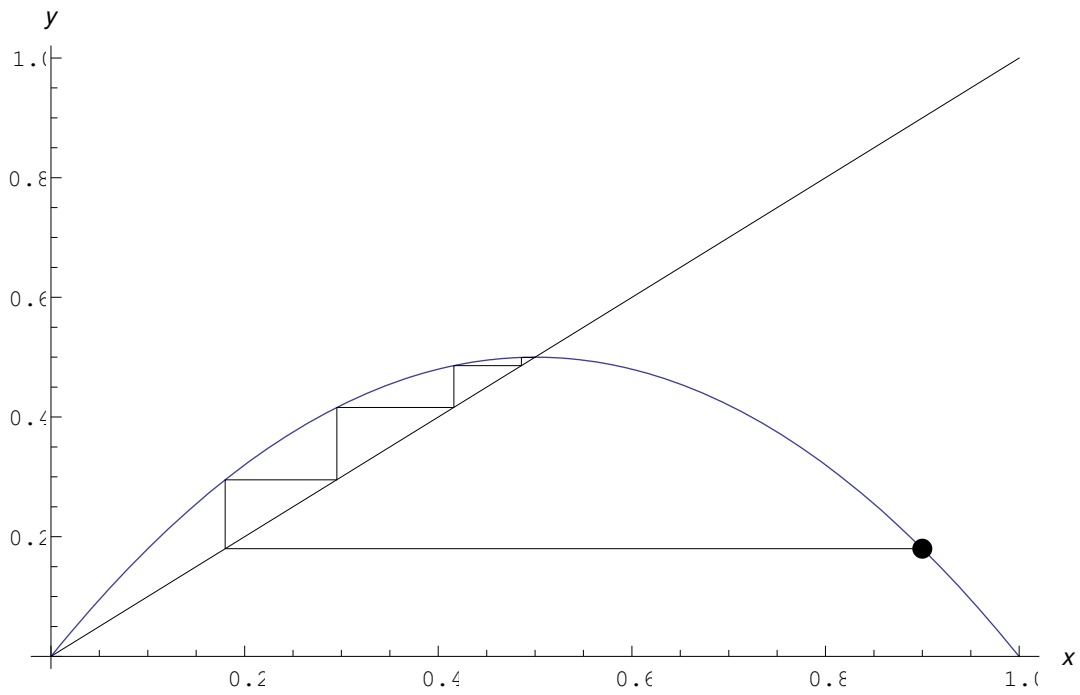


Figure 40: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -2x^2 + 2x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.9$.

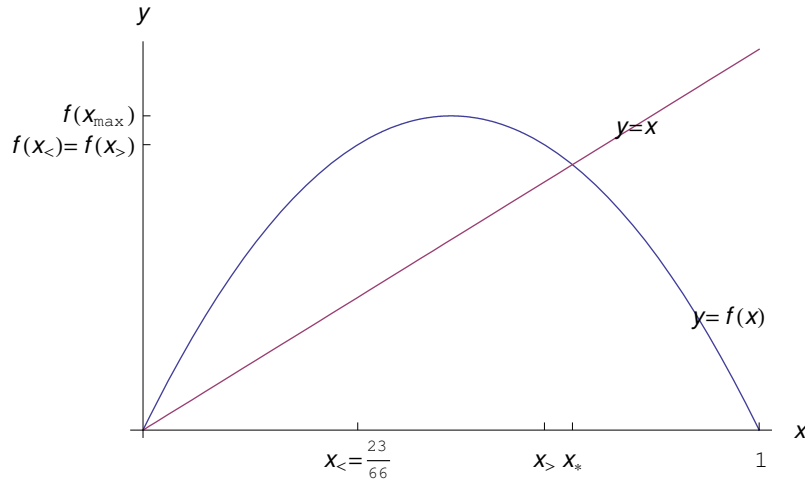


Figure 41: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = -\alpha x^2 + \alpha x$ per $\alpha = 3.3$.

Iteriamo il procedimento:

$$x_*^{(-2)} = f^{-1}(x_*^{(-1)}) = f^{-1}(f^{-1}(x_*)) = f^{(-2)}(x_*)$$

$$x_*^{(-3)} = f^{(-3)}(x_*)$$

...

$$x_*^{(-n)} = f^{(-n)}(x_*)$$

...,

ottenendo la successione $\{x_*^{(-n)}\}$ Mathematica restituisce i valori:

$$x_*^{(-2)} = \frac{1}{66} \left(33 - \sqrt{689} \right)$$

$$x_*'^{(-2)} = \frac{1}{66} \left(33 + \sqrt{689} \right)$$

Per $n = 3$, vediamo che

$$x_*^{(-3)} = \frac{1}{66} \left(33 - \sqrt{429 + 20\sqrt{689}} \right)$$

$$x_*^{(-4)} = \frac{1}{66} \left(33 - \sqrt{429 + 20\sqrt{689}} \right)$$

Quindi $\{x_*^{(-n)}\}$.

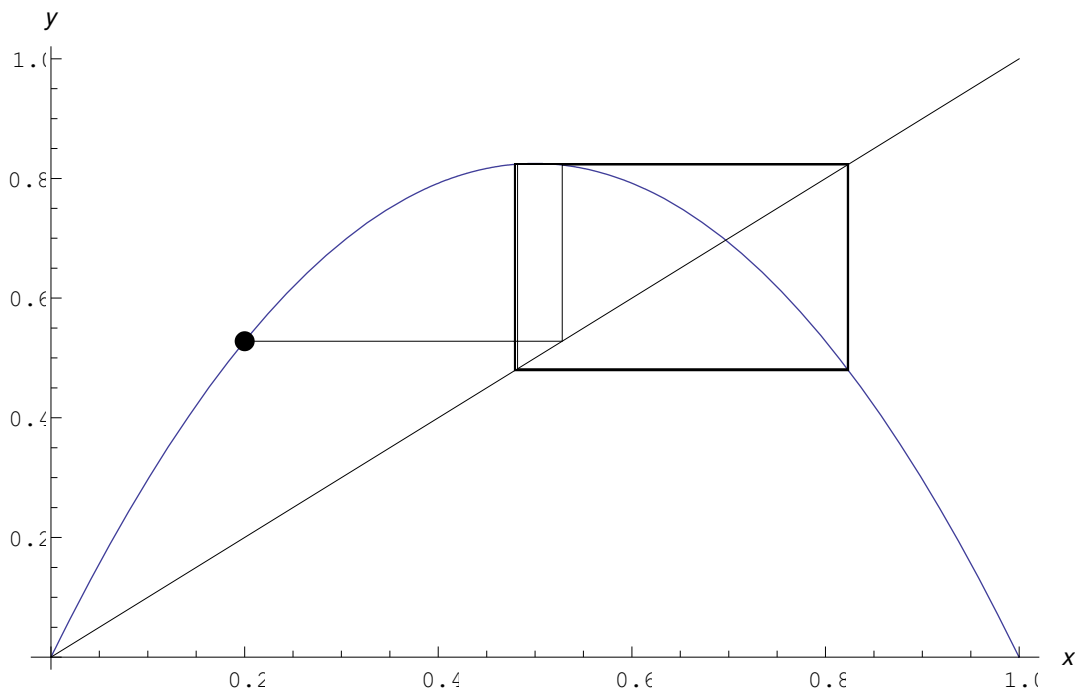


Figure 42: Diagramma delle orbite (20 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = 3.3$ con punto iniziale $x_0 = 0.2$. Il punto fisso $x_* = \frac{23}{33}$ è un punto periodico di periodo 2. Dal diagramma vediamo che lo stato di S_f oscilla tra $\bar{x}_1 = 0.479427$ e $\bar{x}_2 = 0.823603$.

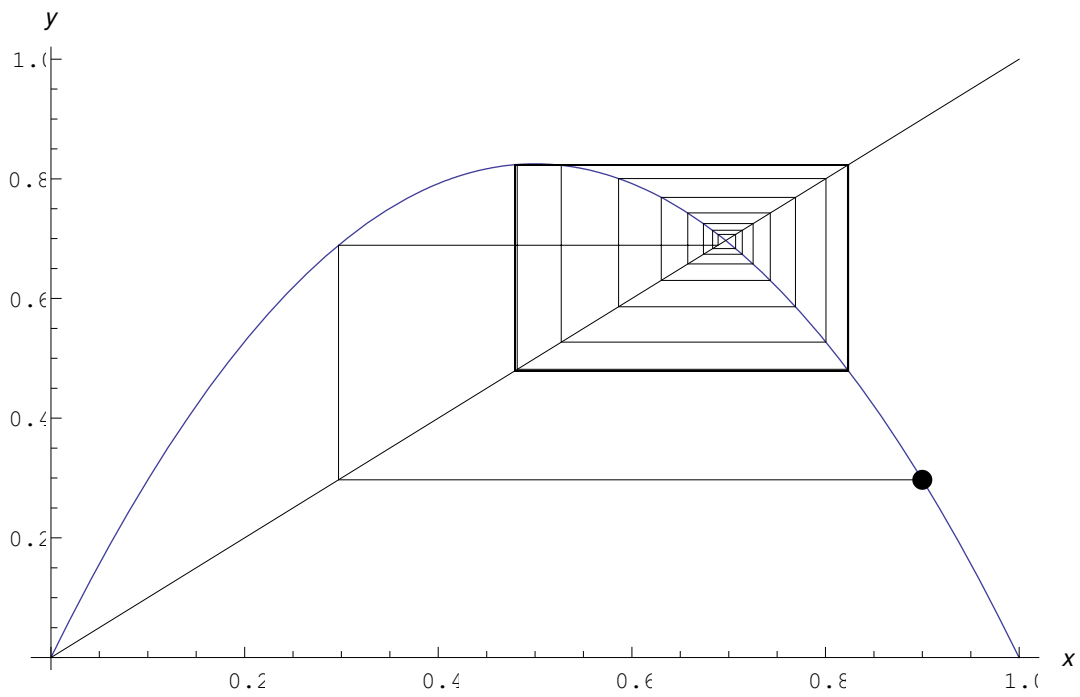


Figure 43: Diagramma delle orbite (550 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -3.3x^2 + 3.3x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.9$. Inizialmente l'orbita converge verso $x_* = 23/33$, per poi essere catturata da un ciclo di periodo 2.

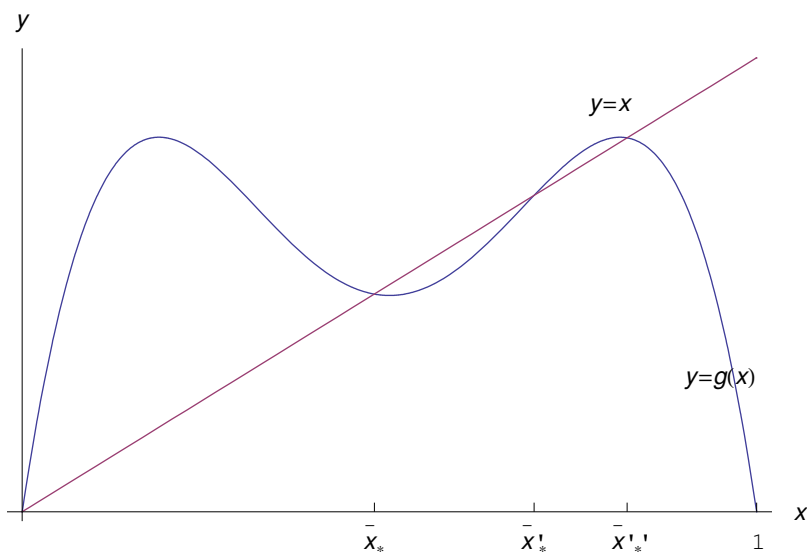


Figure 44: Grafico della funzione $g(x) = f(f(x))$ per $\alpha = 3.3$.

6.2.4 Punti fissi per $\alpha = 3$

Lo studio dei punti fissi per $\alpha = 3$ è cruciale, poichè per tale valore si verifica una *transizione* nel comportamento del diagramma delle orbite. Risulta:

$$x_* = \frac{2}{3}, \quad x_{<} = \frac{1}{3}, \quad x_{>} = \frac{2}{3}$$

Cioè:

$$x_* = x_{>}$$

Pertanto $x_* \notin (x_{<}, x_{>})$, per cui non è un punto fisso attrattivo. Inoltre, $|f'(x_*)| = 1$, per cui il corollario (31) non ci dice nulla sulla reale natura di x_* , nel senso che non sappiamo se è un punto repulsivo o attrattivo. Tracciamo dunque i diagrammi delle orbite con *Mathematica*, per diversi punti iniziali. In fig. (45) è riportato il diagramma delle orbite con $x_0 = 0.1$.

Dal diagramma di fig. 45 vediamo dunque che $x_* = \frac{2}{3}$ è un punto attrattivo. Più precisamente, è un punto attrattivo in *senso debole* (poichè la derivata vale esattamente -1). Infatti, inizialmente l'orbita entra in un ciclo di periodo 2 per poi convergere al punto fisso.

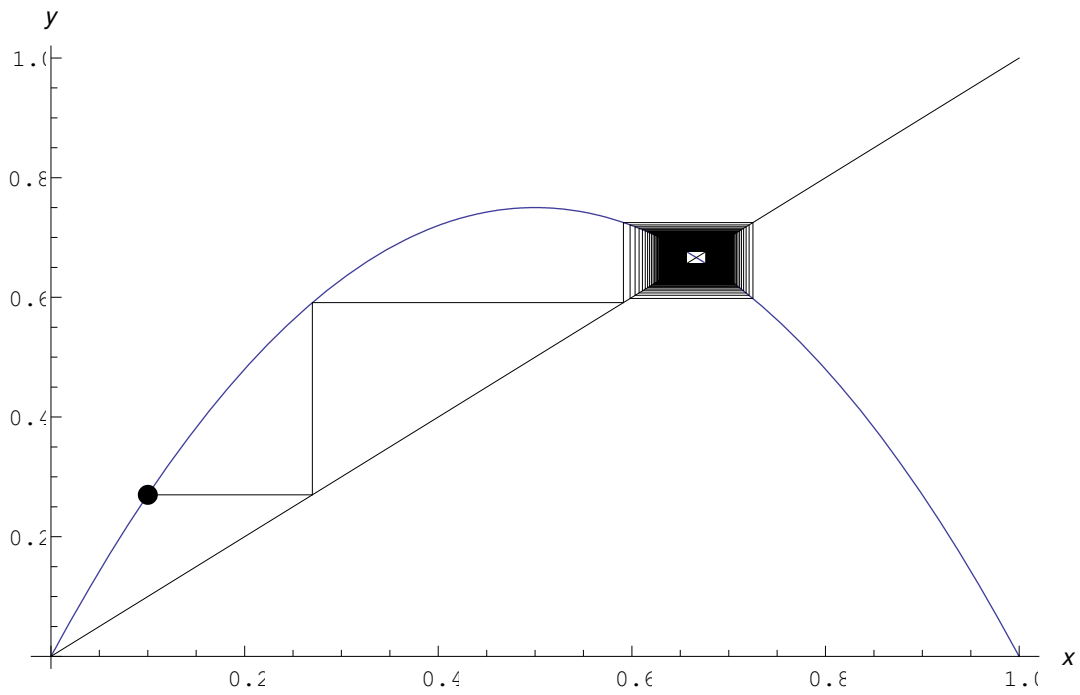


Figure 45: Diagramma delle orbite (500 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -3x^2 + 3x\}$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

6.2.5 Punti fissi per $\alpha = 3.45$

In questo caso è

$$x_* = \frac{49}{69}, \quad x_{<} = \frac{49}{138}, \quad x_{>} = \frac{89}{138}$$

Il grafico è in fig. 46.

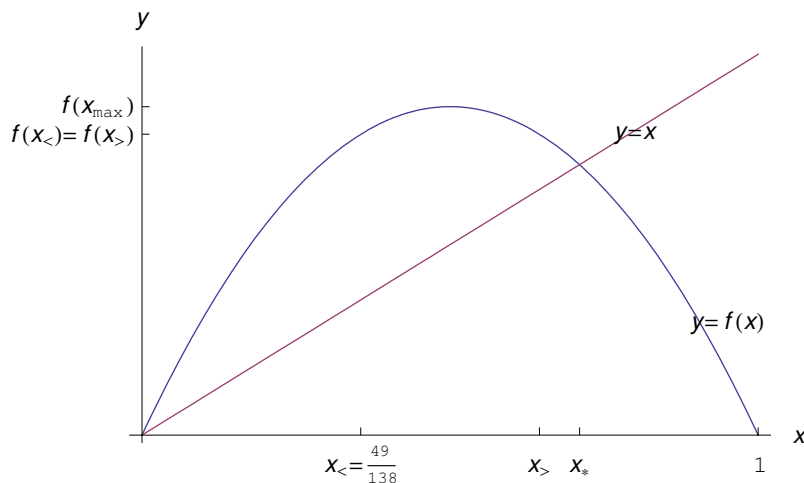


Figure 46: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = -\alpha x^2 + \alpha x$ per $\alpha = 3.45$.

Qui abbiamo il punto fisso non nullo $x_* \notin (x_{<}, x_{>})$, ovvero un punto fisso repulsivo. Ciò non deve sorprendere, poichè al crescere di α , il punto fisso x_* si sposta verso l'estremo 1 dell'intervallo $[0, 1]$. Precisamente:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_* = 1$$

Assumendo $x_0 = 0.1$, dopo 20 iterazioni otteniamo il diagramma delle orbite illustrato in fig. 47. Dal diagramma 47 vediamo che il punto $x_* = \frac{49}{69}$ è un punto periodico di periodo 4. Infatti, studiando la funzione:

$$g(x) = f^4(x),$$

scopriamo che x_* è punto fisso per g , come vediamo dal grafico di fig. 48.

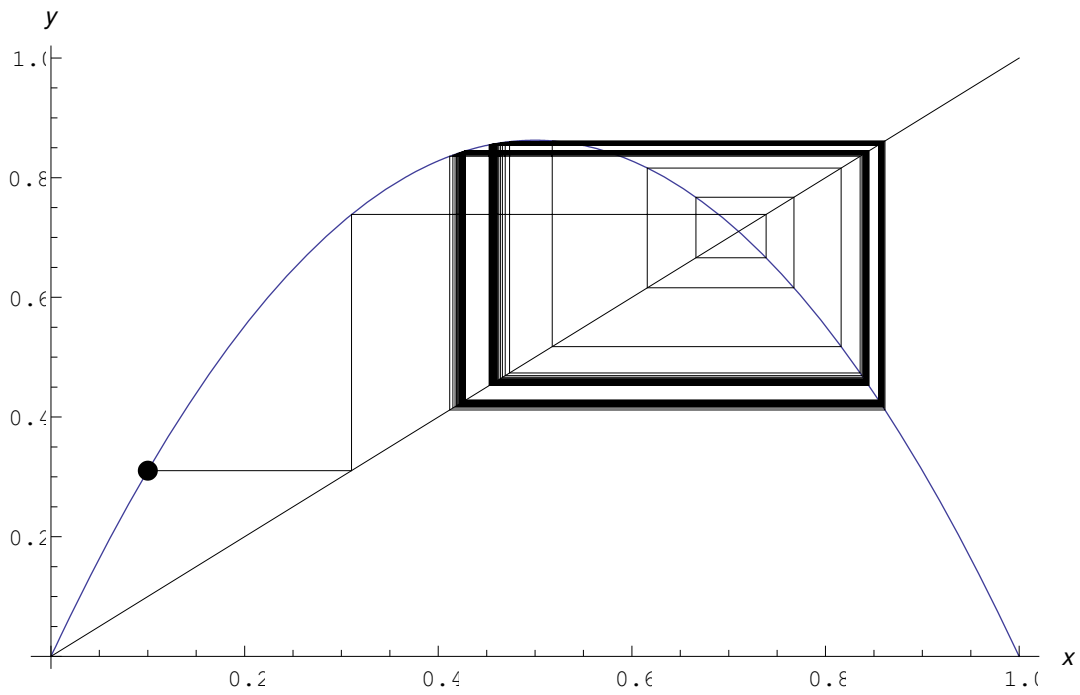


Figure 47: Diagramma delle orbite (100 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = 3.45$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

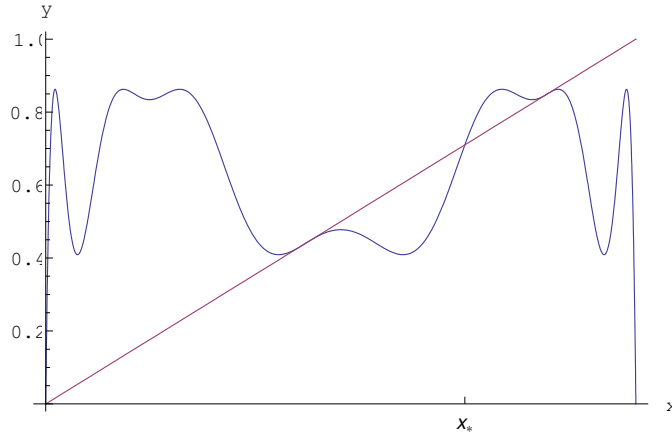


Figure 48: Diagramma cartesiano della funzione $g(x) = f^4(x)$ per $\alpha = 3.45$.

6.2.6 Punti fissi per $\alpha = 3.54$

In questo caso è

$$x_* = \frac{127}{177}, \quad x_< = \frac{127}{354}, \quad x_> = \frac{227}{354}$$

In fig. 49. riportiamo il diagramma delle orbite per $x_0 = 0.1$. Da tale diagramma vediamo che x_* è periodico di periodo 8. Tale conclusione è confermata dalla studio della funzione $g(x) = f^5(x)$, il cui diagramma cartesiano è riportato in fig. 50

6.2.7 Punti fissi per $\alpha = 3.839$

In questo caso è

$$x_* = \frac{2839}{3839}, \quad x_< = \frac{2839}{7678}, \quad x_> = \frac{4839}{7678}$$

Il punto x_* è repulsivo. In fig. 51. riportiamo il diagramma delle orbite per $x_0 = 0.1$. Dalla diagramma delle orbite riportato in fig. 51 vediamo che x_* è periodico di periodo 3. Tale conclusione è confermata dalla studio della funzione $g(x) = f(f(f(x)))$, il cui diagramma cartesiano è riportato in fig. 52

Per il teorema di Sarkovskii [7] esistono infiniti punti periodici. Infatti, f possiede un numero finito di punti periodici se e solo se il loro periodo è una potenza di 2.

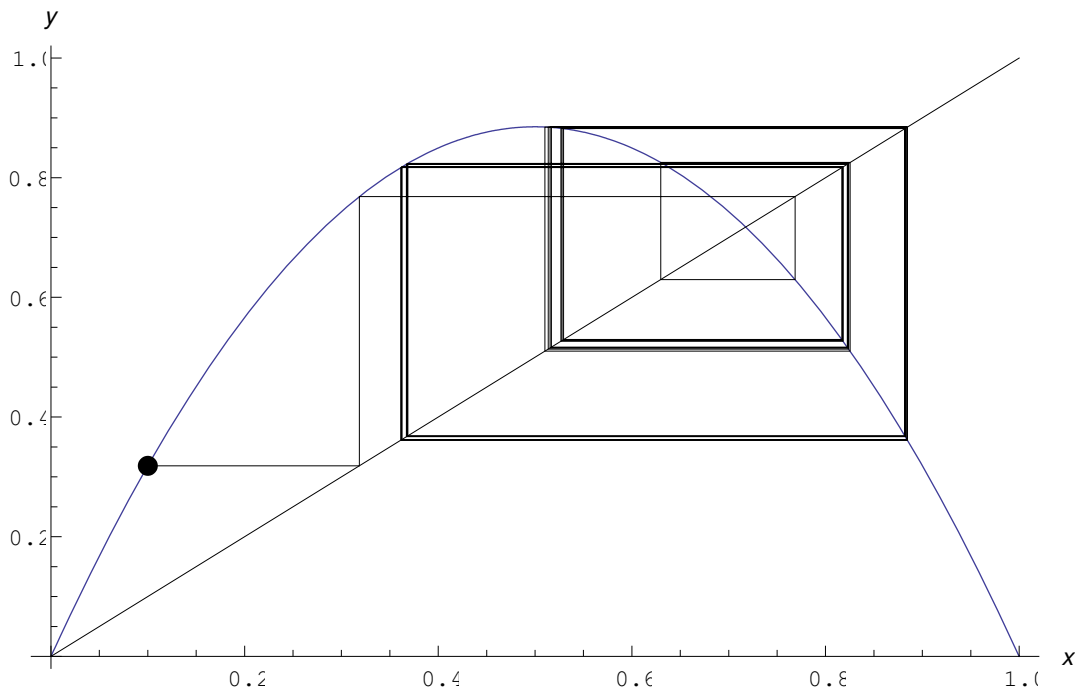


Figure 49: Diagramma delle orbite (200 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = 3.54$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

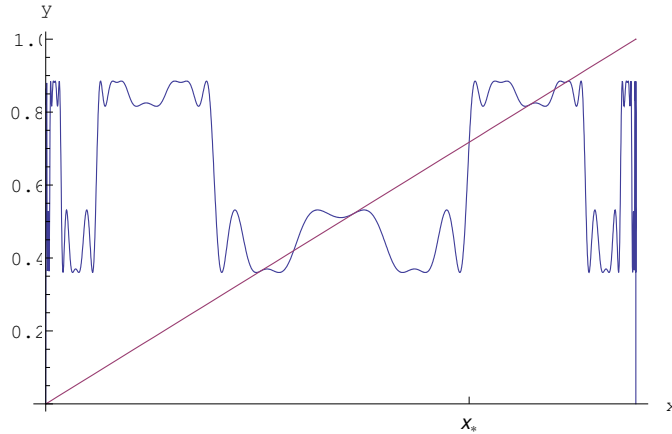


Figure 50: Diagramma cartesiano della funzione $g(x) = f^8(x)$ per $\alpha = 3.54$. Il punto x_* è punto fisso per g . Ciò implica che è punto periodico di periodo 8 per f .

6.2.8 Caso $\alpha = 4$ (caos)

Dedichiamo una sezione al caso $\alpha = 4$, poichè è il più importante. Ad esempio, con un punto iniziale $x_0 = 0.1$, otteniamo il diagramma delle orbite di fig. 53. Per $\alpha = 4$ l'insieme dei punti periodici è denso in $[0, 1]$.

Definizione 44 La mappa 1-dimensionale $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ è **topologicamente transitiva** se e solo se:

$$\forall I, J \subset [a, b], \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid f^n(I) \cap J \neq \emptyset.$$

Dal diagramma delle orbite riportato in fig. 53, vediamo che per $\alpha = 4$, la mappa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è topologicamente transitiva.

Definizione 45 La mappa 1-dimensionale $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ presenta dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali se assegnato ad arbitrio un punto iniziale $x_0 \in [a, b]$:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon), \exists x'_0 \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\}, n > 0 \mid |f^n(x_0) - f^n(x'_0)| > \varepsilon$$

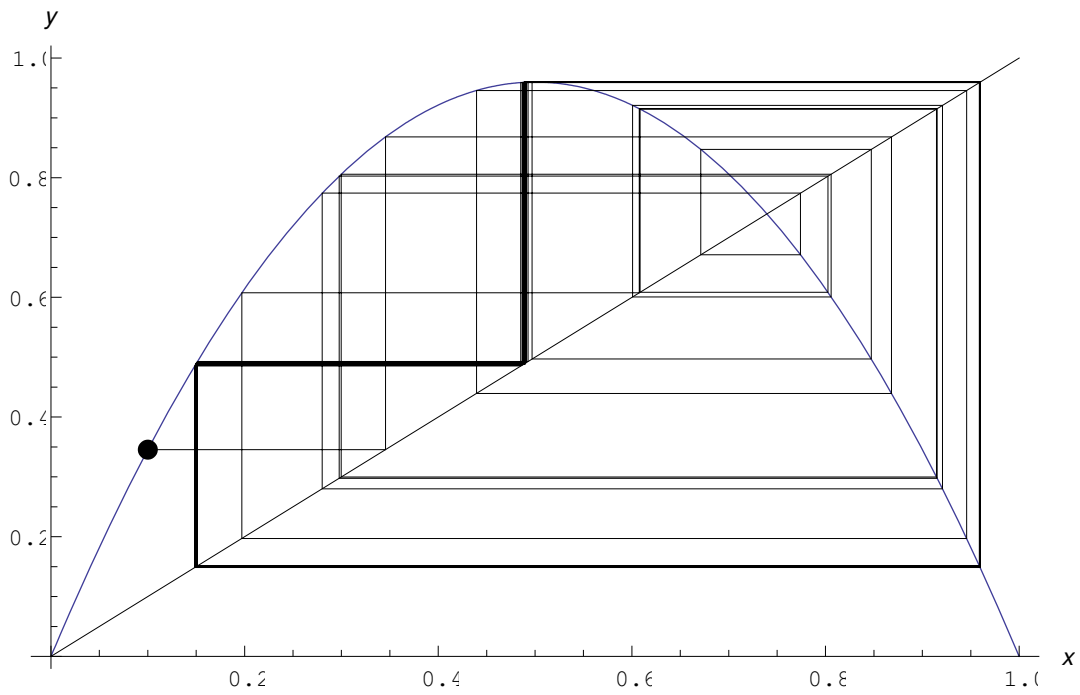


Figure 51: Diagramma delle orbite (200 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ per $\alpha = 3.839$ con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

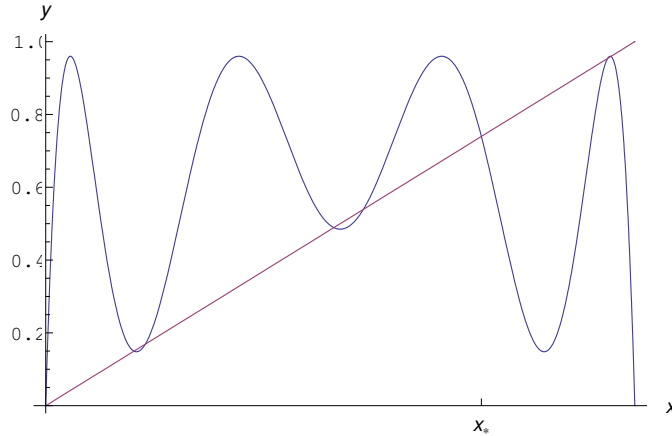


Figure 52: Diagramma cartesiano della funzione $g(x) = f^3(x)$ per $\alpha = 3.839$. Il punto x_* è punto fisso per g . Ciò implica che è punto periodico di periodo 3 per f .

Ciò premesso, abbiamo la seguente definizione di sistema caotico [7]:

Definizione 46 *Un sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$ è caotico se è caratterizzato da:*

1. *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali;*
2. *densità dei punti periodici in X ;*
3. *transitività topologica*

Per $\alpha = 4$, le condizioni 1,2,3 sono verificate, per cui il sistema iterato $S_f^{(d)} \doteq \{[0, 1], -4x^2 + 4x\}$ è caotico. In fig. 54 riportiamo lo stato x_n di $S_f^{(d)} \doteq \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$ in funzione di α .

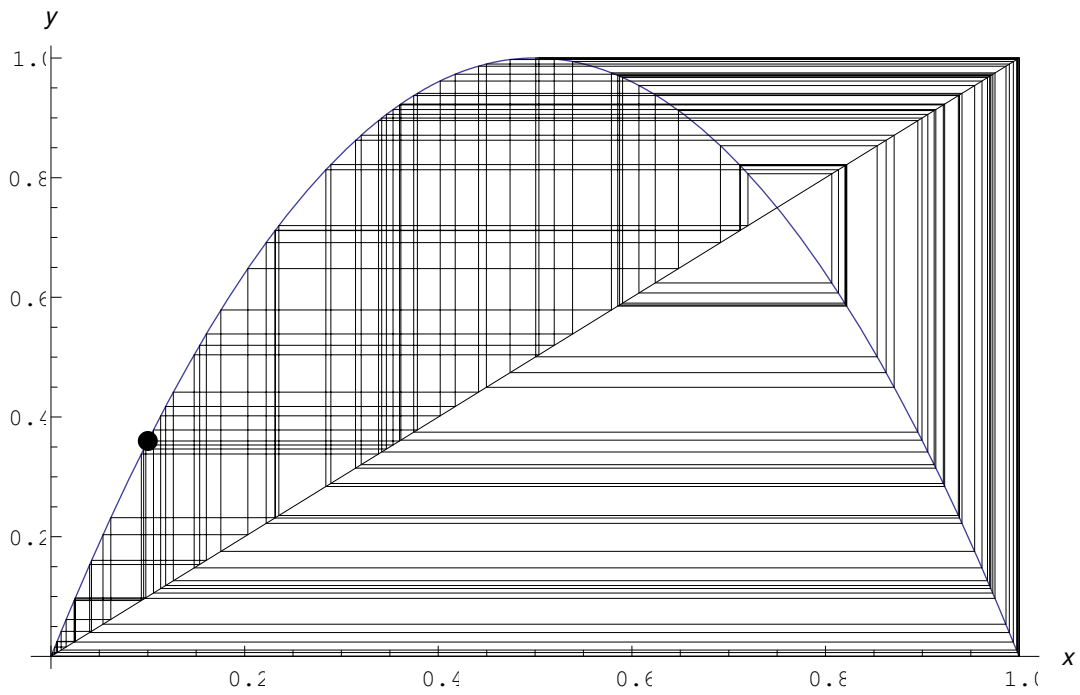


Figure 53: Diagramma delle orbite (100 iterazioni) di $S_f^{(d)} = \{[0, 1], -4x^2 + 4x\}$ per con punto iniziale $x_0 = 0.1$.

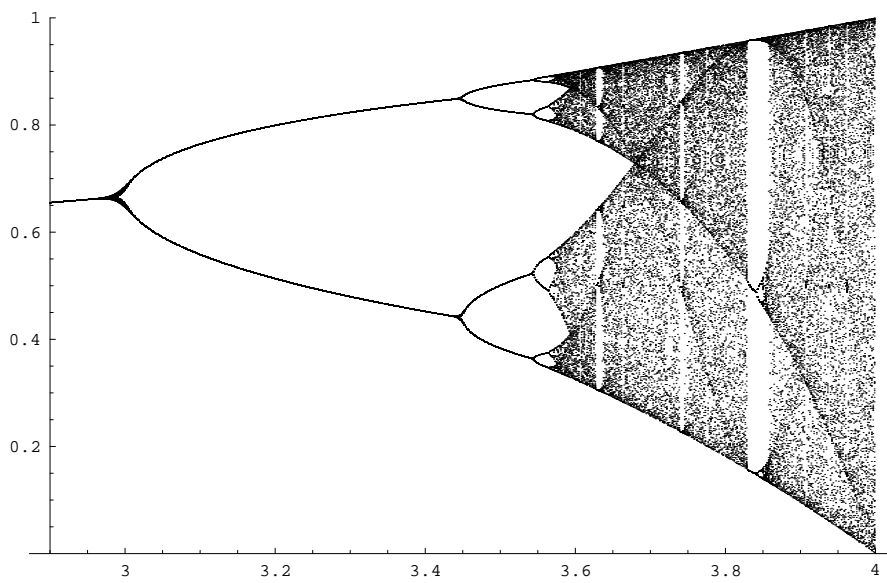


Figure 54: In ascisse riportiamo il parametro α e in ordinate lo stato $x_n = f^n(x_0)$ del sistema dinamico $S^{(d)} \doteq \{[0, 1], -\alpha x^2 + \alpha x\}$.

6.3 Conclusioni

In definitiva:

- $1 < \alpha < 3$

Abbiamo un solo punto fisso (punto periodico di periodo 1 o *attrattore stabile*).

- $\alpha = 3$

1 punto periodico di periodo 2. Quindi lo stato del sistema oscilla tra 2 attrattori stabili. Abbiamo dunque un raddoppiamento del periodo.

- $\alpha = 3.45$

1 punto periodico di periodo 4. Quindi lo stato del sistema oscilla tra 4 attrattori stabili. Abbiamo dunque un nuovo raddoppiamento del periodo.

- $\alpha = 3.54$

1 punto periodico di periodo 8. Quindi lo stato del sistema oscilla tra 8 attrattori stabili. Abbiamo dunque un nuovo raddoppiamento del periodo.

- $\alpha = 3.56441$

1 punto periodico di periodo 16. Quindi lo stato del sistema oscilla tra 16 attrattori stabili. Abbiamo dunque un nuovo raddoppiamento del periodo.

- $\alpha = 3.56876$

1 punto periodico di periodo 32. Quindi lo stato del sistema oscilla tra 32 attrattori stabili. Abbiamo dunque un nuovo raddoppiamento del periodo.

- $\alpha = 3.56994$.

È il primo valore caotico.

Abbiamo dunque una successione $\{\alpha_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ definita da:

$$\alpha_0 = 3$$

$$\alpha_1 = 3.45$$

$$\alpha_2 = 3.54$$

$$\alpha_3 = 3.56441$$

$$\alpha_4 = 3.56969$$

$$\alpha_5 = 3.56969$$

$$\alpha_6 = 3.56989$$

...

Alla $\{\alpha_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ possiamo associare la successione $\{\delta_r\}_{r \in \mathbb{N}}$:

$$\delta_r = \frac{\alpha_{r+1} - \alpha_r}{\alpha_{r+2} - \alpha_{r+1}}$$

Si dimostra che la successione $\{\delta_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ è convergente. Più precisamente:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_n = \delta_\infty \simeq 4.669$$

δ_∞ è la *costante di Feigenbaum*.

A Automi cellulari

Ci si può chiedere se il paradigma dei sistemi dinamici a tempo discreto sia qualcosa di più di un'alternativa alle equazioni differenziali. La risposta è affermativa. Esiste infatti una classe di enti matematici noti come *automi cellulari* [3] che simulano l'evoluzione temporale di un sistema a tempo continuo. Un automa cellulare è un insieme di *celle* distribuite su una griglia *N-dimensionale*. I casi significativi sono $N = 1, 2$.

Definizione 47 *Un automa cellulare 1-dimensionale infinito è l'insieme $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ dove $a_k \in \Sigma \subseteq \mathbb{K}$, essendo \mathbb{K} uno degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Se $\Sigma = \{0, 1\}$ l'automa si dice in base 2. L'elemento a_k è detto **cella k-esima** dell'automa.*

Definizione 48 *Lo **stato** dell'automa è il “vettore” a infinite componenti $\mathbf{x} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, mentre lo **spazio degli stati** o **spazio delle configurazioni** dell'automa è l'insieme:*

$$\mathbf{X} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \times_{k=-N}^N \Sigma, \quad (88)$$

dove \times denota l'operazione di prodotto cartesiano. Quindi:

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{x} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid a_k \in \Sigma \} \quad (89)$$

Osservazione 49 $\mathbf{x} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ non è propriamente un vettore, ovvero un elemento di uno spazio vettoriale. Conseguentemente, l'insieme (88) non è propriamente uno spazio vettoriale.

L'automa evolve nel tempo discreto $t_n = n\Delta$, con $n \in \mathbb{N}$. Più precisamente, lo stato della *k-esima* cella a_k evolve secondo la legge:

$$a_k^{(t_{n+1})} = F \left(a_{k-1}^{(t_n)}, a_k^{(t_n)}, a_{k+1}^{(t_n)} \right) \quad (90)$$

Nella (90) F è la **regola di aggiornamento** della *k-esima* cella di \mathcal{C}_A . Più precisamente:

$$F : \Sigma^3 \longrightarrow \Sigma, \quad F : \left(a_{k-1}^{(t_n)}, a_k^{(t_n)}, a_{k+1}^{(t_n)} \right) \rightarrow a_k^{(t_{n+1})} \quad (91)$$

Qui $a_k^{(t_{n+1})}$ è lo stato della k -esima cella al tempo t_{n+1} , che attraverso la (90) è funzione dello stato al tempo *precedente* t_n della medesima cella, nonché di quelle vicine (a_{k-1}, a_{k+1}) . Posto:

$$\mathbf{x}^{(t_n)} = \left(a_k^{(t_n)} \right)_{k \in \mathbb{Z}},$$

si ha:

$$\mathbf{x}^{(t_{n+1})} = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}^{(t_n)} \right), \quad (92)$$

dove \mathbf{f} è una funzione vettoriale:

$$\mathbf{f} \left(\mathbf{x}^{(t_n)} \right) = \left(F \left(a_{k-1}^{(t_n)}, a_k^{(t_n)}, a_{k+1}^{(t_n)} \right) \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (93)$$

la cui k -esima componente è la regola di aggiornamento della k -esima cella di \mathcal{C}_A , i.e. la funzione (91). Quindi:

$$\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$$

e definisce la regola di aggiornamento dell'automa.

Definizione 50 *La funzione F (definita dalla (91)) è la **mappa locale** dell'automa. La funzione (93) definisce, invece, la **mappa globale** dell'automa.*

Un automa cellulare 1-dimensionale infinito verrà denotato con la notazione simbolica:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{f}} \doteq \left[(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \mathbf{f} \right] \quad (94)$$

Definizione 51 *Un automa cellulare 1-dimensionale si dice **finito**, se non è infinito. Cioè:*

$$\mathcal{C}_{\mathbf{f}} \doteq \left[(a_k)_{k \in K}, \mathbf{f} \right],$$

dove $K \subseteq \mathbb{Z}$.

Proposizione 52 *Un sistema dinamico iterato $S_f^{(d)} \doteq \{X, f\}$ è un automa cellulare 1-dimensionale con una sola cella, la cui regola di aggiornamento è la mappa 1-dimensionale f .*

Dimostrazione. La funzione di trasferimento di $S_f^{(d)}$ è $f : X \rightarrow X$. Consideriamo un automa cellulare con una sola cella $\mathcal{C}_f \doteq [a, f]$, che per uniformità di notazione, riscriviamo $\mathcal{C}_f \doteq [x, f]$ con $x \in \Sigma \subseteq \mathbb{K}$. La regola di aggiornamento (92) di \mathcal{C}_A è del tipo

$$x^{(t_{n+1})} = \phi(x^{(t_n)}),$$

che nella notazione dei sistemi dinamici a tempo discreto si scrive:

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

Assumendo come regola di aggiornamento ϕ la mappa 1-dimensionale f di $S_f^{(d)}$, segue necessariamente $S_f^{(d)} \equiv \mathcal{C}_f$ i.e. $\{X, f\} \equiv [x, f]$. ■

B Approssimazione della derivata

Abbiamo visto che il procedimento esaminato nella sezione 4 è fondamentalmente basato sulla possibilità di approssimare la derivata prima $\frac{dx}{dt}$ con il rapporto incrementale $\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$. Riscriviamo l'equazione (61):

$$\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta} \simeq F(x(t)), \text{ con } 0 < \Delta \leq 1$$

Nella maggior parte dei casi si pone $\Delta = 1$. Ricordiamo infatti che Δ rappresenta il campionamento adimensionale, ovvero il rapporto tra il tempo t reso dimensionale e il tempo caratteristico medio $\bar{\tau}_H$. Abbiamo poi dimostrato che se la funzione $F(x)$ è sufficientemente regolare, l'approssimazione precedente è valida. Ciò implica l'assenza di punti di flesso a tangente verticale del diagramma della funzione $x = x(t)$. Infatti, se t_f è un punto di flesso a tangente verticale, in un intorno di tale punto si ha una variazione quasi istantanea di $x(t)$ per cui il valore $\Delta = 1$ dell'incremento della variabile indipendente non permette di approssimare la derivata a $\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$. Tuttavia, ci sono casi estremi in cui pur non essendoci punti di flesso a tangente verticale, si ha una variazione brusca della grandezza $x(t)$.

Consideriamo una grandezza che varia secondo la legge:

$$\eta(t) = \frac{\eta_0}{e^{\beta(t-t_1)} + 1} \quad (95)$$

La derivata prima è:

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta_0 \beta e^{\beta(t-t_1)}}{[e^{\beta(t-t_1)} + 1]^2}$$

Il tempo caratteristico istantaneo:

$$\tau_H(t) = \left| \frac{\eta}{\dot{\eta}} \right| = \frac{1}{\beta} [1 + e^{-\beta(t-t_1)}]$$

Il tempo caratteristico medio:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_H &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tau_H(t) dt \\ &= \frac{1}{\beta^2 T} [\beta T + e^{-\beta(t_0-t_1+T)} (e^{\beta T} - 1)] \end{aligned}$$

Adimensionalizziamo il problema, ponendo $\eta(t) = \eta_0 x(t)$ e passando al tempo adimensionale $t' = \frac{t}{\bar{\tau}_H}$. In tal modo, la soluzione (95) diventa:

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{\beta_H(t-t_1)} + 1}, \quad (96)$$

dove abbiamo ridefinito t' in t , mentre è $\beta_H = \frac{\beta}{\bar{\tau}_H}$. Abbiamo dunque il sistema dinamico a tempo continuo:

$$S_F^{(c)} \doteq \{x, F\},$$

dove:

$$F(x) = \beta_H \bar{\tau}_H \mathcal{F} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right),$$

dove $\mathcal{F} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)$ è tale che $\mathcal{F} \left(\frac{\eta(t)}{\eta_0} \right) = \dot{\eta} = -\frac{\eta_0 \beta e^{\beta(t-t_1)}}{[e^{\beta(t-t_1)} + 1]^2}$. La (96) è controllata dal parametro positivo β_H . Vediamo che:

$$\frac{x_0}{e^{\beta_H(t-t_1)} + 1} \xrightarrow{\beta_H \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0^+, & \text{se } t > t_1 \\ 1, & \text{se } t \in (0, t_1) \end{cases}$$

Cioè per $\beta_H \rightarrow +\infty$, la grandezza adimensionale $x(t)$ tende a una funzione a gradino. Precisamente:

$$x(t) \xrightarrow{\beta_H \rightarrow +\infty} x_0 \theta(t - t_1)$$

Per $\beta_H \rightarrow +\infty$ la derivata non è definita in $t = t_1$ e il sistema diviene patologico. Osserviamo peraltro, che anche per valori finiti di β_H , la grandezza varia in modalità quasi istantanea intorno a t_1 , come possiamo vedere dal grafico della funzione $x(t)$ illustrato in fig. 55.

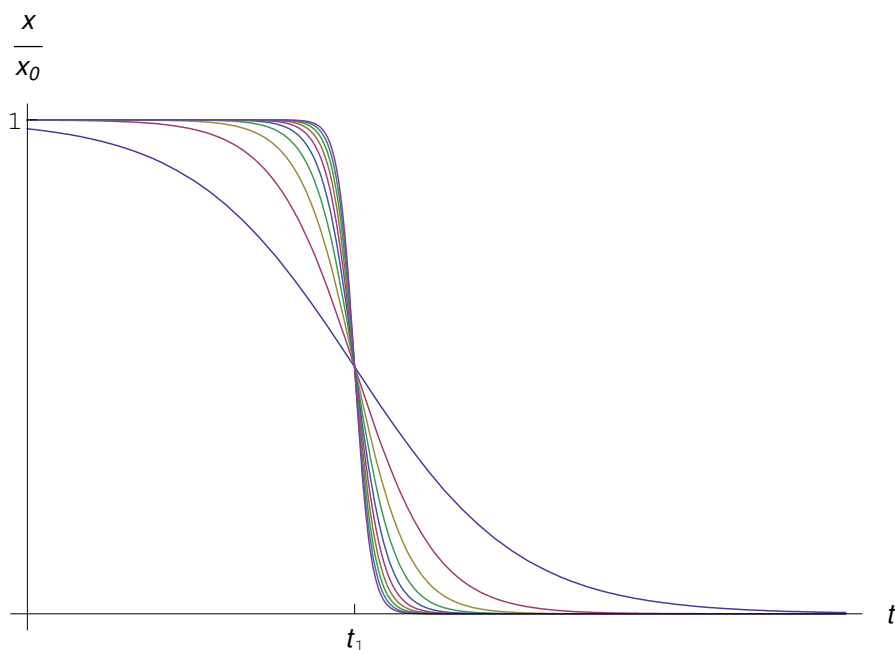


Figure 55: Andamento della soluzione $x(t) = \frac{x_0}{e^{\beta_H(t-t_1)} + 1}$ per $\beta_H = 1, \dots, 10$. Al crescere di β_H , la funzione $\frac{x(t)}{x_0}$ approssima il gradino unitario $\theta(t - t_1)$.

Dalla fig. 55 vediamo dunque che la derivata prima di $x(t)$ varia violentemente in un intorno di t_1 in seguito alla variazione quasi istantanea della $x(t)$ dal valore x_0 al valore $x = 0$. Infatti, se grafichiamo la derivata otteniamo il diagramma riportato in fig. 58.

Evidentemente:

$$\frac{dx}{dt} \xrightarrow{\beta_H \rightarrow +\infty} x_0 \delta(t - t_1),$$

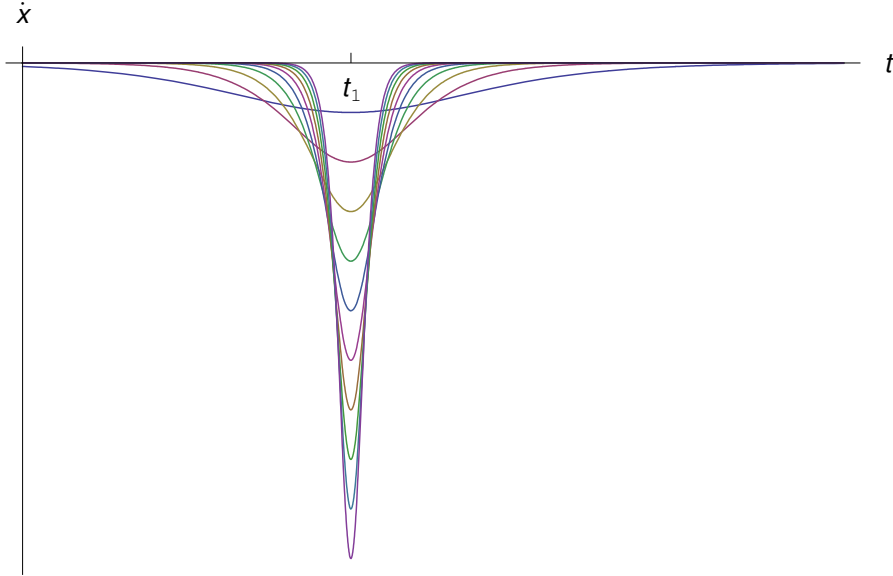


Figure 56: Andamento della derivata di $x(t)$ per $\beta_H = 1, \dots, 10$. Al crescere di β_H , la derivata prima diviene sempre più *deltiforme*.

dove $\delta(t - t_1)$ è la funzione delta di Dirac centrata in t_1 .

Per quanto visto, anche per valori finiti di β_H non è più valida l'approssimazione:

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta}$$

Infatti, in fig. 58 vediamo che per $\Delta = 1$ il rapporto incrementale non approssima la derivata di $x(t)$.

Solo diminuendo Δ si ottiene l'approssimazione voluta. Ad esempio, in fig. 58 riportiamo i medesimi andamenti per $\Delta = 10^{-1}$.

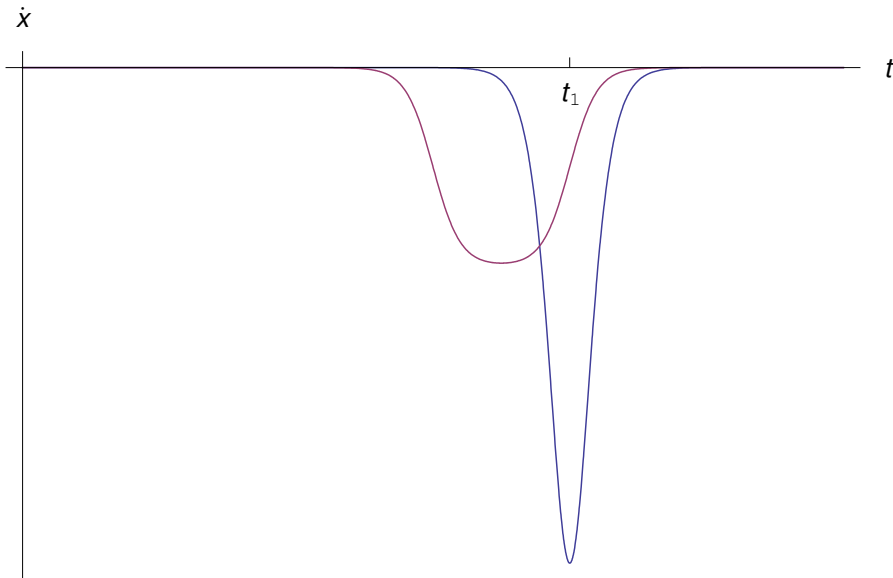


Figure 57: Andamento della derivata di $x(t)$ per $\beta_H = 10$ e del rapporto incrementale $\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$ per $\Delta = 1$ (curva a campana rovesciata).

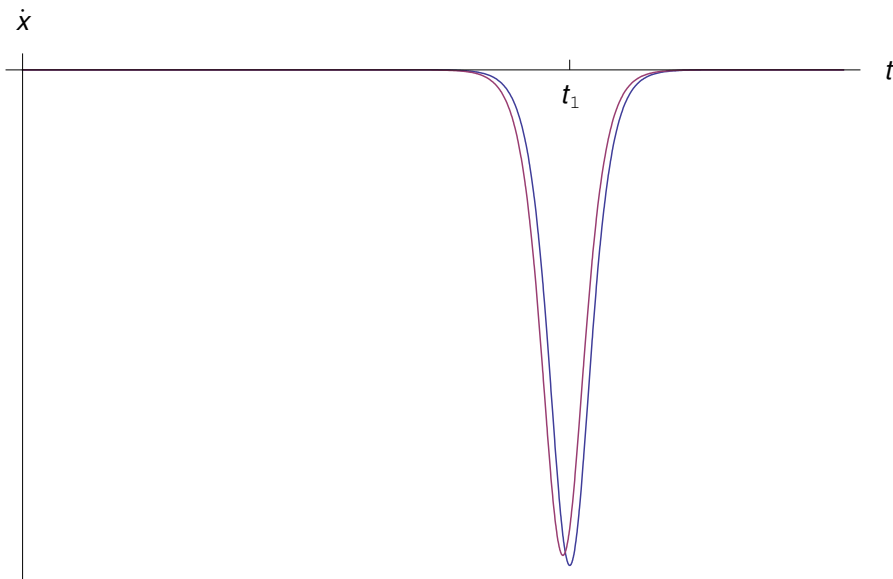


Figure 58: Andamento della derivata di $x(t)$ per $\beta_H = 10$ e del rapporto incrementale $\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$ per $\Delta = 10^{-1}$.

References

- [1] V. I. Smirnov, *Corso di Matematica superiore*, vol. II. Editori Riuniti
- [2] M. A. Arbib. Brains, *Machines and Mathematics*, McGraw-Hill, 1987.
- [3] S. Wolfram, Cellular Automata. Available at
<http://www.stephenwolfram.com/pdf/Cellular-Automata-Stephen-Wolfram-Article.pdf>
- [4] S. Wagon, *Guida a Matematica*. McGrawHill, pp. 98-113.
- [5] R. Fiorenza, D. Greco *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I. Liguori Editore
- [6] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos. An Introduction to Dynamical System*. Springer. 1989
- [7] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading Mass., 1989
- [8] R.L. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamical*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1989
- [9] P. Collet and J.P. Eckmann, *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauer, Boston, 1980.
- [10] J. Gleick, *Chaos*, Penguin, New York, 1987
- [11] R.L. Devaney and L. Keen (eds), *Chaos and Fractals, The Mathematics Behind the Computer Graphics*, Proc. Symp. Appl. Math, 39, American Mathematical Society, Providence, R. L., 1989.
- [12] M. Barnseley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [13] R. Penrose. *The Emperor's New Mind*. Oxford University Press.

- [14] A. Ballier. Limit sets of stable Cellular Automata. Aviable at <http://arxiv.org/pdf/1301.3790.pdf>
- [15] M. Edelman. Fractional Maps and Fractional Attractors. Aviable at <http://arxiv.org/pdf/1209.5681.pdf>
- [16] V. H. Mankar, T. S. Das, S. K. Sarkar. *Discrete Chaotic Sequence based on Logistic Map in Digital Communications*.
Aviable at <http://arxiv.org/pdf/1209.5681.pdf>
- [17] R: May. Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* (London), pp 261- 459, 1977
- [18] V. E. Tarasov, *Differential equations with fractional derivative and universal map with memory*, J. Phys. A 42 (2009) 465102
- [19] M. Edelman, *Fractional Standard Map: Riemann-Liouville vs. Caputo*, Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 16 (2011)
- [20] E. Zeraoulia, J.C. Sprott, Chaotifying continuous-time systems by symmetry. Aviable at <http://arxiv.org/pdf/1208.6413.pdf>