Funzionali lineari e spazio duale. Matrice rappresentativa

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$.

Definizione 1 *Un* **funzionale lineare** *(o* **forma lineare algebrica***) è un'applicazione lineare da V verso $\mathbb{K}$, dove quest'ultimo è considerato spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ medesimo.*

Denotando con ϕ una tale applicazione, si ha:

$$\begin{aligned} &\phi : V \to \mathbb{K} \\ &\phi : \xi \to \phi(\xi), \quad \forall \xi \in V \end{aligned} \tag{1}$$

Ne consegue che $\phi \in \hom(V, \mathbb{K})$, dove $\hom(V, \mathbb{K})$ è lo spazio vettoriale degli omomorfismi da V verso $\mathbb{K}$.

Definizione 2 *Lo spazio vettoriale* $\hom(V, \mathbb{K})$ *si dice* **spazio duale** *e si indica con* $^*V$*:*

$$^*V = \hom(V, \mathbb{K}) \tag{2}$$

Per una nota proprietà:

$$\dim \hom(V, \mathbb{K}) = (\dim V) \cdot (\dim \mathbb{K}) \underset{\dim \mathbb{K}=1}{=} \dim V, \tag{3}$$

cosicché V e $^*V$ sono isodimensionali, quindi isomorfi. In fig. 1 è visibile l'azione di un elemento $\phi \in (^*V)$ su un qualunque vettore ξ di V.

Ci proponiamo ora di esprimere il risultato dell'applicazione del funzionale lineare ϕ a un generico vettore ξ di V, attraverso le componeoti di ξ in una base assegnata. A tale scopo consideriamo una base $\{e_k\}$ di V, onde comunque prendiamo un vettore $\xi \in V$, si ha

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \tag{4}$$

essendo $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ le componenti di ξ nella predetta base. Segue

$$\phi(\xi) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \phi(e_k),$$

che può essere scritta come

$$\phi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + ... + a_n\xi_n, \tag{5}$$

essendo

$$a_k \overset{def}{=} \phi(e_k) \tag{6}$$

Cioè gli scalari a_k sono i valori assunti da ϕ sui vettori di base. La (5) è manifestamente lineare nelle variabili $\xi_1, ..., \xi_n$ (come appunto doveva essere), giacché per un assegnato funzionale ϕ i coefficienti a_k non dipendono dalle ξ_k ma solo dai vettori di base. Ricordando l'espressione analitica della matrice rappresentativa di un omomorfismo tra due spazi vettoriali, segue:

$$\phi \doteq \Phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(1, n), \tag{7}$$

dove il simbolo $\doteq$ sta per "rappresentato da", mentre $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(1, n)$ è lo spazio vettoriale delle matrici $1 \times n$ su $\mathbb{K}$.

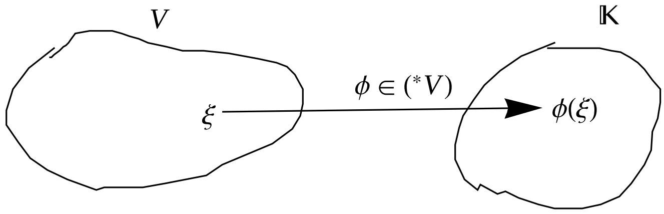

Figura 1: Un elemento ϕ dello spazio duale ${}^*V$, associa al vettore ξ lo scalare $\phi\,(\xi)$.